TEORÍA DE LAS SOMBRAS

PUNTOS Y LÍNEAS BRILLANTES

Y

DEGRADACIÓN DE TINTAS

POR

Antonio Rovira y Rabassa

ARQUITECTO

ACADÉMICO DE LA DE BELLAS ARTES DE BARCELONA
Y CATEDRÁTICO
DE LAS ASIGNATURAS DE SOMBRAS, PERSPECTIVA, GNOMÓNICA Y ESTEREOTOMÍA
EN LA ESCUELA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE LA MISMA CIUDAD

TEXTO

BARCELONA

IMPRENTA DE LA CASA PROVINCIAL DE CARIDAD
Calle de Montealegre, núm. 5

CAPÍTULO PRIMERO

Definiciones é ideas generales

1. **La luz.**—Es el agente que actúa en el sentido de la vista humana, dando origen á las sensaciones percibidas de las imágenes y de los colores. Este agente se halla extendido por doquier, llenando los espacios insondables del Universo.

No falta quien haya denominado, á la causa de la luz, *Lumínico*, definiéndolo, ser un fluído perfectamente elástico, imponderado y que por sus efectos da origen á la percepción de las formas y de los colores de los cuerpos.

Aunque, en absoluto, es desconocida la naturaleza del lumínico, sin embargo de semejante deficiencia, existe un hecho por el cual es permitido aventurar ciertas apreciaciones conducentes para aproximarnos al conocimiento en parte de este agente, y es: Que los fenómenos luminosos no pueden originarse sin la presencia en el espacio de los cuerpos ponderables. Es, pues, evidente que por el vacío perfecto puede pasar la luz, pero en el vacío no se pueden originar los fenómenos luminosos.

Y esta verdad se ha comprobado por gran número de experiencias, ya haciéndolas en gran escala con los cuerpos llamados astros *, ó ya con observaciones más reducidas

* Que son visibles á la vez, por diferentes observadores colocados en distintos lugares de la tierra.

echando mano de un trozo de fósforo ú otro cuerpo ponderable, sometido á la combustión, comprobando siempre semejantes operaciones la existencia de la materia ponderable, allí donde se percibe, y se está originando la luz

Semejantes hechos dieron motivo bastante para que Newton fundara la primera hipótesis sobre la naturaleza de este agente, conocida con el nombre de teoría de las *emanaciones*.

El lumínico consiste en esta hipótesis, en una emanación de substancia material, porque lo es la de los cuerpos de donde parte; substancia dotada de elasticidad perfecta, y tan tenue, que no ha sido posible pesarla. En esta hipotesis, los cuerpos se dividen en luminosos y opacos; en los primeros, las partículas del lumínico salen con una velocidad inmensa.

La segunda hipótesis, que tuvo por campeón á Descartes. que fué bautizada con el nombre de teoría de las *vibraciones y ondulaciones*, se originó á causa de que en la sucesión de adelantos que experimentó la Optica, llegó un momento en que algunos nuevos fenómenos no alcanzaron una explicación satisfactoria con la teoría newtoniana. En esta segunda teoría, los efectos de la luz se supone que pueden originarse, por los movimientos de un fluído etéreo, y muy sutil, de constante densidad, de elasticidad perfecta y que puede recibir y transmitir movimientos ondulatorios y vibratorios.

Con posterioridad, verdaderas eminencias como Fresnel y otros físicos, obligaron experimentalmente, á que la naturaleza reprodujera los fenómenos ópticos, variando hasta el infinito los procedimientos experimentales, y gracias á los esfuerzos de aquellos ilustres físicos, la teoría de las ondulaciones es la que actualmente priva ó cuando menos está adoptada por la generalidad.

2. Cuerpos luminosos.—Dos definiciones son consiguientes, una vez admitidas las dos teorías anteriormente apuntadas.

Por la teoría de Newton, son todos aquellos cuerpos de quienes se puede desprender el fluído sutil, llamado lumínico Aquí los cuerpos obscuros ó no luminosos por sí, son visibles cuando cae sobre ellos el lumínico de los otros cuerpos, y después de reflejarse la emanación luminosa en su superficie.

Por la teoría cartesiana, son todos aquellos cuerpos que pueden conmover vibratoriamente al éter que tienen en su

interior, ó al de las inmediaciones, y de lanzar por ondas el movimiento vibratorio á largas distancias. En esta hipótesis, el movimiento ondulatorio, causa de la luz, llega á la superficie de los cuerpos obscuros que existen en medio del éter, para ser rechazadas las ondas de una manera semejante á las ondas sonoras cuando al llegar á un obstáculo son reflejadas formando el eco.

3. Transmisión de la luz. Rayo luminoso.—Fúndase la teoría de las sombras, sobre la ley de óptica, de la *propagación rectilínea de la luz*, según dicha ley.

"La luz se transmite en línea recta, en torno del foco de donde parte, cruzando el espacio en todos sentidos; siempre, empero, que se considere homogéneo el medio por donde pasa, y no encuentre ningún obstáculo que la detenga en su camino.„

Una de estas rectas de luz que se desprenden del foco para lanzarse al espacio, cualquiera que sea la dirección que tome, es lo que se llama *Rayo luminoso*. Muchos rayos reunidos forman un manojo ó *haz de rayos luminosos*.

La precedente ley de la trasmisión queda plenamente demostrada observando un foco luminoso desde un lugar cualquiera é interponiendo entre él y el observador pantallas con unas pequeñas aberturas ú orificios muy reducidos, entonces se verificará, que sólo será visible el foco luminoso para el observador, cuando dichos orificios le correspondan en línea recta.

Aunque análoga á dicha experiencia, puédese indicar también otra si cabe más sencilla, y en la que se puede examinar con toda detención la línea recta formada por un hacecillo muy tenue de rayos luminosos. Prepárese al efecto una cámara obscura, en la que una de sus paredes lleva abierto un orificio muy pequeño, tanto como se pueda, por él pasarán los rayos solares, pues se dispone ya de antemano dicha pared para que así sea. En este estado, colóquese en el interior de la cámara una pantalla que detenga la marcha de los rayos luminosos; y de este modo podremos comprobar que el centro del astro solar, el pequeño orificio abierto en la pared antedicha, y, luego el pequeño elemento situado en la pantalla, en el mismo punto donde se ha quebrado el rayo luminoso, están los tres en línea recta.

Además en medio de la obscuridad de la cámara se hará

perfectamente visible la línea recta que forma el hacecillo de rayos luminosos.

4. **Velocidad de la luz.**—No siendo dable suponer que exista movimiento que se propague *instantáneamente*, esto es, sin dar lugar al intervalo de tiempo, por pequeño que se considere; infiérese forzosamente que la luz ha de invertir un cierto tiempo para salvar la distancia que media desde el foco luminoso al observador. Varias han sido las experiencias que á este efecto se han hecho, y una de ellas la que hizo el físico *Roemer* en el año 1765, cuyo resultado fué encontrar para ella una velocidad aproximada, cuya fué la 80.000 leguas de 25 al grado por segundo de tiempo.

Para la demostración de semejante aserto Roemer se valió de las observaciones por él hechas, referentes á los eclipses de uno de los satélites de Júpiter.

Los antiguos creyeron que la luz se transmitía con una velocidad infinita, y hasta que el dinamarqués Roemer vino á demostrar no ser cierta tal especie, haciendo público el número de que era objeto esta velocidad, no se dió al traste con tal creencia.

5. **Intensidad de la luz.**—Observaciones detenidas, comparando las impresiones recibidas por el sentido de la vista, cuando la luz llega á iluminar un cuerpo obscuro, colocado á distintas distancias de un foco luminoso, han dado por resultado que la intensidad de aquellas sensaciones se disminuye conforme la distancia del foco luminoso se aumenta. La ley matemática de este decrecimiento es fácil deducirla por simples consideraciones geométricas.

Compárense entre sí las superficies (lám. 1 fig. 1) A B C, que pueden suponerse bases de otras tantas pirámides semejantes en cuyo vértice común F se halla colocado un punto luminoso. Las moléculas radiantes, ó las ondas del éter que llegasen á la primera superficie A, tendrían que dispersarse proporcionalmente hasta iluminar toda la superficie B, y en el espacio que media entre este último plano y la superficie C continuarían divergiendo y dispersándose hasta cubrir y hacer visible todo el plano C; pero la intensidad se disminuye según la observación, conforme la distancia del punto luminoso se aumenta. Es evidente que las superficies A B C crecen como los cuadrados de las distancias; siendo B cuatro veces mayor que A, y C nueve veces mayor; pero la cantidad de luz originada en F la suponemos constante; luego su intensidad en los planos A B C *decrecerá conforme se aumentan los cuadrados de las distancias.*

6. **Cuerpos opacos.**—Llámanse opacos los cuerpos, cuando no transmiten la luz por el interior de sus masas, por lo tanto á su través no son visibles los objetos. *

En las hipótesis de las emanaciones, la diafanidad de los cuerpos se explica suponiendo que la substancia sutil de la luz pasa en cantidad variable al través de las masas, mientras que la opacidad de los cuerpos es un efecto de su impenetrabilidad para la luz.

En la teoría de las ondulaciones, la transparencia y la opacidad se explican diciendo que el éter, además de llenar los espacios vacíos, existe en el interior de todos los cuerpos, dispuestos á recibir vibraciones, y á transmitirlas por ondas, á través de los espacios llenos de materia ponderable, la cual puede destruir una parte del movimiento vibratorio, ó anularle; de cuyas acciones de la materia ponderable sobre los movimientos vibratorios del éter, resulta la transparencia de los cuerpos en sus diferentes grados, y la opacidad.

7. **Sombra.**—Literalmente hablando, es la obscuridad que se causa de oponerse á la luz un cuerpo opaco. Así es la obscuridad que contornea un espacio ó superficie determinada, á la cual no han podido llegar los rayos luminosos.

8. **Nomenclatura de los rayos luminosos, con relación al cuerpo.**—El fenómeno de las sombras, es la inmediata consecuencia de la propagación de la luz en línea recta. Evidentemente; si analizamos la (fig. 2) en donde F representa un foco luminoso, del cual parten infinidad de rayos luminosos, atravesando el espacio en todas direcciones (§ 3) y formando el haz de rayos luminosos de que más antes hemos hablado. Si ahora, colocamos frente al foco F un cuerpo opaco tal como Σ, sucederá, que existirán rayos tales como A, A′, que no

* Sin embargo, la opacidad no es una propiedad absoluta, pues aun los metales cuando se reducen á hojas delgadas, como suceda son los panes de oro son algo traslúcidos, percibiéndose á su través, y cuando se hallan expuestos á la luz directa del sol, un color ó luz verdosa.

encontrando al cuerpo Σ, proseguirán su camino, indefinidamente en el espacio, de modo que ellos no tendrán ninguna importancia para el cuerpo.

Otros habrá como los B. B'. que herirán de lleno al cuerpo, quebrándose al encontrarlo en los puntos, como por ejemplo, *g. h.*

Y otros, finalmente, tales como C C' C'' C''' serán tales que lamerán al cuerpo siéndole tangentes, continuando, á pesar de eso en marcha atravesando el espacio de la otra parte del cuerpo Σ.

Los primeros son los *rayos laterales*; los segundos los *rayos incidentes;* y, finalmente los descritos en tercer lugar, son los *rayos límites*, y los de verdadera importancia, bajo el punto de vista geométrico del problema de la sombra.

9. Parte en luz. Sombra propia. Línea divisoria de luz y sombra.—Si de estas tres clases de rayos luminosos consideramos los que hemos llamado *límites* C C' C'' etc., éstos siendo tangentes al cuerpo Σ, formarán en su conjunto una superficie cónica cuyo vértice está en F y cuya base será la curva de contacto *abcd*, del mismo con la propia superficie; es evidente ahora que esta línea de contacto divide al cuerpo en dos partes, la una anterior, más próxima y directamente expuesta al punto luminosa; y la otra posterior opuesta y más distante del mencionado punto F; la primera es el lugar geométrico, de todos los puntos, tales como por ejemplo *g*, *h*, en donde los rayos incidentes se quiebran, deteniendo ya su marcha en el espacio: Esta es la *región iluminada*.

Mas en cuanto á la segunda, carece por completo de luz, pues hasta á ella no han podido llegar los rayos luminosos, por oponerse la opacidad del cuerpo (§ 6); toda la extensión, de esta región es lo que se conoce por *Sombra propia del cuerpo*.

Finalmente, semejantes dos regiones deslindadas por la línea de contacto *abcd*, antes mentada esta es la *línea divisoria* de luz y sombra.

10. Sombra arrojada.—Hemos dicho que los rayos límites, siguen indefinidamente su marcha en el espacio, sin embargo, se les intercepta muchas veces, oponiéndoles á su paso, un cuerpo opaco cualquiera, como por ejemplo un plano P; entonces, uniendo todos los puntos de intersección *a'b' c'd'*, que así resultan, se obtendrá una línea cerrada, la cual encierra una extensión de superficie P que está privada de luz es lo que se conoce por *sombra arrojada*, del cuerpo Σ sobre el cuerpo extraño P.

11. Cono de luz. Cono de sombra.— Considerando al cono de contacto prolongado en su totalidad, éste visiblemente quedará dividido en dos partes, por la línea de base *a*, *b*, *c*, *d*, la una comprende la parte de cono entre el vértice y la base; es precisamente la que encierra todos los rayos luminosos que precisamente dan luz al cuerpo, éste es el que se llama *cono de luz*, mientras que si consideramos el resto de superficie cónica que existe desde la base *a*, *b*, *c*, *d*, hacia la parte opuesta del foco, ella será tal que en su interior comprenderá un espacio el cual estará completamente privado de los rayos luminosos, por lo cual estará en obscuridad completa, será lo que hemos llamado *cono de sombra*. Aquí en nuestro caso de la figura segunda el cono de sombra lo constituye el tronco de cono comprendido entre la línea divisoria de luz y sombra *a*, *b*, *c*, *d*, y la de sombra arrojada *a'*, *b'*, *c'*, *d'*.

12. Plano de luz. Plano de sombra. Rayo de sombra.—Por analogía, si en lugar de considerar un cuerpo, tenemos en cuenta una recta, así como los rayos luminosos que por ella resbalan, será evidente que la recta por una parte y el punto luminoso por otra determinarán un plano, y éste, dividido en dos partes, la primera toda la región que media entre la recta y el punto y formará *el plano luminoso*, la segunda formada imaginando la prolongación de dichos rayos desde la recta hacia la parte opuesta del foco luminoso formando un plano privado de luz, es precisamente *el plano de sombra*.

Por igual concepto, al considerar un rayo luminoso B éste queda detenido en su marcha en el punto *g*; mas si lo considerásemos con la imaginación prolongado desde *g* á *g'*, entonces claro es también que esta recta así producida estaría producida por una serie no interrumpida de puntos todos privados de luz: ésta sería la recta conocida con el nombre de *rayo de sombra* Hemos consignado esta nomenclatura, atención hecha que en el curso de posteriores explicaciones tendremos necesidad de hacer mención de todos estos elementos y saber con ello á qué atenernos.

13. Objeto de las sombras.— El objeto principal del estudio de la llamada *Teoría de las sombras*, es simplemente la determinación de la línea que separa la parte iluminada de la obscura, en un cuerpo que esté expuesto bajo la influencia de un foco luminoso, así como también determinar la sombra arrojada sobre otros cuerpos; echando mano para ello de las operaciones más breves y fáciles, y á la vez que cumplan con todo el grado de exactitud posible.

Hasta cierto punto la teoría de las sombras viene á ser el complemento del estudio de la Geometría descriptiva, pues si ésta lleva consigo la misión de hacernos conocer los cuerpos describiendo sus contornos y detalles, por medio de las referencias de que se vale, aquélla contribuye por su parte á perfeccionar dicha descripción, comunicándole el relieve, haciendo destacar el dibujo ó proyección del papel ó cuadro, y así ilusionarnos, haciendo aparecer con la misma verdad que lo observamos en el espacio, pues las sombras nos acusan los entrantes y salientes, así como las distintas entonaciones, ya sea en la mayor ó menor cantidad de luz ó de color que cada elemento recibe, convergiendo semejantes resultados á dar movimiento y vida y esa expresión que parece animar á los cuerpos cuando sobre ellos caen haces de luz acentuando sus contornos, sus formas, dimensiones comparadas y todo el grado de perfección ó belleza de que sea susceptible, y apareciendo finalmente al observador tal cual se encuentran en el espacio.

No hay duda, pues, que importancia tiene y mucha la parte que como aplicación de la Geometría descriptiva nos vamos á ocupar, pues que si bien es verdad que los dibujos que representan á los cuerpos por medio de sus proyecciones, sirven perfectamente y cumplen con todas las necesidades que pueda desear el más exigente Arquitecto ó Ingeniero, sin embargo, ellos no llenarían por sí solos su misión cuando fuesen destinados al uso de los operarios encargados de llevar al terreno de la práctica los planos preconcebidos por el director; y así si á los dibujos de las proyecciones se les acompaña con las sombras, cuya representación sea fiel reproducción de los fenómenos que tienen lugar en el espacio ó natural, entonces será cuando, poseído el que ha de dar cima al trabajo de todos sus detalles y pormenores, y teniendo el modelo ante sí cual si fuera en el mismo espacio y realidad de los hechos, es cuando podrá llegar á alcanzar el resultado con el éxito más feliz.

Pero aún hay más, pues no solamente con el auxilio de la representación de las sombras en los dibujos conseguimos dar más verdad y excelencia de efectos, en el objeto que se quiere representar, sino que también, y eso muy frecuente: se logra con ellas un medio de descripción, si aun se quiere más simple que en el sistema diédrico, toda vez que para éste son necesarias dos referencias separadas por la línea de Tierra, mientras que aquí con sólo tener á mano el plano de proyección horizontal con el dibujo á él referido, acompañado de las sombras arrojadas, basta para que el objeto quede determinado en el espacio, pues realmente en un mismo plano contamos con dos proyecciones, una horizontal, que es la planta, y otra oblicua, que es la sombra arrojada; y aún muchas veces tal convención puede hacerse en la dirección de los rayos luminosos, que la extensión de las mismas sombras arrojadas vienen á ser iguales á las alturas de los puntos del objeto, cuya proyección hortogonal es el dato.

14. Rayos rasantes.—Cuando el cuerpo cuya sombra se desea no está terminado por una superficie continua (fig. 3) como por ejemplo un poliedro cualquiera, entonces las aristas que limitan sus caras sirven de directores á los rayos luminosos, éstos si bien bordean el contorno, lo hacen, pero ya no son tangentes, son simplemente *rasantes*, y el artificio queda reducido á determinar las aristas que dividen cada cara iluminada con la contigua obscura. La línea divisoria de luz y sombra se compone en este caso de una línea quebrada como la *abcdef*. El cono de iluminación y el de sombra se cambian á su vez por pirámides de igual denominación, mientras que la sombra arrojada, siendo intersección de una pirámide con el plano P, queda compuesta por un polígono irregular cualquiera $a'b'c'd'e'f'$.

15. Clasificación de las sombras arrojadas.—Al tomar en consideración dos cuerpos destinados á combinarse en un problema de sombras, pueden ocurrir tres casos para con respecto á la relación que exista en sus sombras arrojadas. Así, por ejemplo (fig. 4), se tienen dos cuerpos Σ, Σ', iluminados por el foco S, y ellos están dispuestos de tal modo que sus sombras arrojadas sobre una superficie cualquiera, por ejemplo el plano P, son las curvas A, B ambas independientes y aisladas entre sí, entonces es cuando se llaman, al comparar-

las, sombras arrojadas *externas*. En semejante estado aparecen completamente cerradas.

2.° (Fig. 5) Los cuerpos Σ, Σ' se hallan en tal situación que al trazar los conos luminosos, el que corresponde por ejemplo á Σ', se halla completamente comprendido en el interior del primero ó por mejor decir todo el cuerpo Σ' se encuentra dentro del cono del cuerpo Σ, por cual concepto se infiere que el cuerpo Σ' está cubierto en parte por la sombra que produce la opacidad del de Σ'. En semejante situación se infiere que la sombra B que arrojaría el cuerpo Σ' sobre el plano P si Σ no existiera se halla dentro el recinto que coge en su extensión la sombra arrojada del cuerpo Σ. En este caso se dice que hay sombra arrojada, *perdida* ó *parásita*, viene, pues, sumergida la una dentro la otra, una de las sombras arrojadas es imaginaria, para con respecto al plano P, demostrando con ello que el cuerpo que la produciría la proyecta en el cuerpo Σ.

3.° (Fig. 6). Los cuerpos pueden estar de tal modo situados que uno de ellos, el Σ por ejemplo, arroje parte de su sombra sobre el Σ', y entonces sus sombras arrojadas se combinan de modo que la una entra parte de ella dentro la otra; aquí la B dentro la A en toda la parte comprendida por la línea *a, c, b*; esta zona que queda interna es lo que se llama *sombra parásita ó perdida* correspondiente al cuerpo Σ', siendo los puntos *a, b* en que se cortan los dos contornos los llamados *puntos de pérdida*, y como se comprende cada uno de ellos representan sombra arrojada de dos puntos *m, n* para el *a*, y los *p, q*. para el *b*, correspondientes cada par de estos puntos á las líneas de separación de luz y sombra que respectivamente pertenezcan á cada uno de los cuerpos considerados. Se comprende perfectamente que la línea *a, c, b* no es realmente arrojada en el cuerpo P en atención á que antes lo ha sido sobre el cuerpo Σ', el cual se ha interpuesto entre los rayos luminosos y dicho plano P. Se distingue este caso de los demás en que la línea correspondiente á la sombra arrojada B está abierta.

4.° La sombra arrojada, se llama, *arrojada virtual ó sobrepuesta* cuando, por la estructura y forma especial del cuerpo que la produce, aquella cae sobre el propio cuerpo.

16. Penumbra.—Hasta ahora se ha considerado el foco luminoso como constituyendo un punto matemático, y esto llevaba como á consecuencia que tanto el límite de la sombra propia como la arrojada venían á formar como líneas completamente perfiladas y por las cuales pasaba bruscamente de la región iluminada á la obscura; mas en realidad no sucede así, pues los focos luminosos, formando cada uno de ellos un cuerpo, en éste puédense contar infinidad de puntos de los cuales parten rayos luminosos, cuales obrando conforme hemos visto al encontrar los cuerpos que se oponen á su marcha dan también sus respectivas líneas de contacto, modificándose la sombra parcial y relativa según la magnitud ó extensión de la parte de foco luminoso accesible para la iluminación del cuerpo dado. Semejante modo de obrar la luz, hace que el cuerpo se divida ahora en tres regiones ó zonas, la una en que la obscuridad sea completa: es la *sombra pura*. Otra en que la obscuridad no solamente no es completa, sino que también se verifique en ella un paso graduado de la luz á la sombra pura, formando una suerte de degradación lenta, cuyas tintas van decreciendo insensiblemente en intensidad hasta encontrar la parte completamente iluminada; esta región es la *penumbra*, y finalmente la tercera región la concreta toda la superficie del cuerpo que se encuentra por completo iluminada.

17. Penumbra simple.—Mas al objeto de preparar los razonamientos para la debida comprensión del modo como se sucede la penumbra, propiamente dicha, empezaremos considerando el cuerpo Σ (fig. 7), expuesto tan sólo á dos focos luminosos, expresados por los puntos F, F'; el primero será vértice del cono envolvente de la superficie, cuya curva de contacto es *acbd*, mientras que el segundo F' será vértice del segundo cono envolvente cuya base es *mcnd*. El primer cono prolongado hacia la parte posterior del cuerpo Σ viene á ser cortado por el plano P según la curva *b'c''a'd''*, cuya en su interno será la sombra arrojada del cuerpo Σ sobre el plano P en el concepto de ser F' el foco luminoso, mientras que repitiendo idéntica operación para el foco F, la sombra arrojada de dicho cuerpo sería lo interno de la curva *n'c'm''d'*. Combinando ambas últimas curvas vemos que éstas se cortan dándonos tres regiones en A, A', y B: las dos primeras de igual intensidad, pero ésta mucho más débil que la correspondiente dentro de la zona B; y es que en la zona B no llega ninguno de los rayos luminosos de F ni de F', pues todo punto

que considerásemos dentro de esa región, tal como el α, al querer imaginar un rayo de luz, que partiera del mismo para pasar por F ó F', encontraría la masa del cuerpo Σ que se opondría á su paso; mientras que si el punto lo considerásemos en β dentro la región A ó en γ dentro la región A', sucedería en el primero que podría unirse libremente con F aunque no con F', y en el segundo un rayo de F' lo alcanzaría, no pudiendo lograrlo ninguno de los rayos de F, resultando con ello que toda la zona A está iluminada por F y la zona A' por F'; así es que si los focos F, F' fueran de igual intensidad, igual intensidad también alcanzarían las penumbras A y A', por cuya razón denomínanse en este caso especial por peuumbra simple, terminándose por una línea escueta ó perfilada en su contorno.

Semejantes consideraciones hechas para con respecto á las sombras arrojadas, se comprende, pueden reproducirse para con respecto á las propias del cuerpo Σ, y así vendremos á inferir que toda la región *mcbd*, pertenecerá á la sombra pura, mientras que las *mcad*, *cndb*, corresponderán á las propias que también serán de igual intensidad.

Observemos de paso que las curvas de sombra arrojada, tendrán dos tangentes comunes $c'c''$, $d''d''$, debidas á la intersección del plano P, con los planos tangentes de Σ, en los puntos *c*, *d*, en donde se cortan las curvas de contacto ó de separación de luz y sombra propia; toda vez que en los indicados puntos los planos tangentes son comunes á los de las dos superficies cónicas formadas por los rayos luminosos que parten de F y F'.

17. Penumbra compuesta ó sea penumbra propiamente dicha, real y efectiva, tal como tiene lugar en el espacio en oposición de la últimamente mencionada simple, cual es puramente imaginaria, sirviéndonos tan sólo de ella para poder explicar la real, auxiliando con ello los razonamientos.

Consideremos, pues, ahora el foco luminoso, tal como aparece en el espacio, esto es, constituyendo cuerpo, el cual podemos siempre suponer en él infinidad de puntos de los cuales partirán series de rayos luminosos en todas direcciones. Es visible ahora que para cada punto podemos repetir iguales operaciones que las hechas anteriormente, cuando se trataba de los puntos F', F, de la fig. 7.ª y así todas las curvas de contacto del cuerpo Σ, análogas á las *acbd*, *mcnd*,

se irán cortando combinándose de modo á poder trazar las dos envolventes límites, una interior análoga á la *mcbdm*, será la línea separación de la sombra pura con la penumbra; y la otra exterior como la *cndac*, y será la línea de separación de la penumbra con la parte iluminada.

Sin embargo, no puede ocultarse que semejante modo de proceder para satisfacer el problema, resultaría largo y penoso, pudiéndose al efecto resolver la cuestión por medios más breves y fundados en la teoría de los planos tangentes á dos superficies á la vez.

A este fin demos por supuesto que Σ sea la superficie que represente al cuerpo luminoso, y Σ' la del cuerpo opaco, ambas de formas cualesquiera.

Concibamos ahora un plano π, que les sea tangente exteriormente, esto es, que las deje á las dos hacia un mismo lado, es bien sabido ahora que haciendo girar este plano resbalando por las dos superficies, y permaneciendo tangente á ellas en sus distintas posiciones π', π'', π'''... etc., nos dará en las tangencias á Σ, Σ', una serie de puntos *a*, *a'*, *a''*... etc., en la superficie Σ, y otra serie *b*, *b'*, *b''*... etc., en la superficie Σ', unidos los primeros nos darán una curva A, y unidos los segundos una curva B, esta curva B, será el límite de la sombra pura, siendo en definitiva la línea de contacto de Σ', con una superficie desarrollable Ξ formada por el lugar geométrico de las intersecciones sucesivas de los planos π, π', π''... etc. Que esta línea B será el límite de la sombra pura, se comprende desde luego, toda vez que siendo exteriores los planos tangentes, serán límites de ambas superficies en semejante disposición, y todo punto escogido en Σ', hacia la parte opuesta del cuerpo luminoso, no podrán llegar á él los rayos luminosos.

Del propio modo si ahora colocamos un plano P, detrás del cuerpo Σ', este plano vendrá á cortar á la superficie desarrollable Σ, prolongada, dando así en su sección una línea S, que no será más que la línea que encerrará la sombra arrojada pura.

Mas es evidente, que aun pueden trazarse otra clase de planos tangentes á la vez, á las dos superficies, estos planos Θ, Θ', Θ''... etc., serán aquellos en los cuales las tangencias se verifiquen interiormente, ó sea intermedias entre la distancia que las separa; ó dicho de otro modo, dejando á la superficie Σ á un lado y á la Σ' en el opuesto, y entonces obtendremos

en la envolvente de dichos planos, otra superficie desarrollable Δ, dándonos en sus tangencias con Σ y Σ', una línea de contacto L, con la primera y otra L' con la segunda; esta L' será el límite de la penumbra ó línea divisoria de la penumbra con la parte iluminada. Finalmente, esta superficie Δ prolongada cortará al plano P, y entonces en su sección K proporciona la línea límite de la penumbra arrojada.

Mas aquí en nuestro caso, toda la zona de penumbra comprendida entre las líneas B y L' en el cuerpo Σ', así como la zona comprendida entre las líneas S y K en el plano P, no serán de igual intensidad, antes al contrario, esta irá degradándose, pasando lenta é insensiblemente de sombra pura á la parte que está completamente bañada por la luz.

Como es sabido tratándose de superficies desarrollables, como lo son las Ξ, Δ, que sintetizan todas las soluciones de los planos tangentes comunes á las superficies Σ, Σ', tendrán sus respectivas aristas de retroceso, á las cuales serán tangentes las respectivas generatrices.

En el caso en que la superficie Σ' sea desarrollable, entonces el problema puede ó no admitir solución, y en el caso probable de tenerla, no admitirá como en el caso general infinidad de soluciones, pues la índole genérica de semejantes superficies, exige de por sí que el plano tangente lo sea á lo largo de la generatriz, que es de contacto, y entonces los planos tangentes serán en número finito, dados por los puntos de contacto situados en Σ' y cada una de las generatrices de Ξ, Δ, que en número reducido satisfacen la cuestión.

Mas al objeto ahora de particularizar el problema, y poder apreciar en detalle todas las operaciones últimamente mentadas, pondremos por caso tratarse de dos cuerpos de forma esférica (fig. 8), uno Σ que es el luminoso y el otro Σ' que es el opaco, en cuya disposición los fenómenos luminosos serán iguales alrededor del centro de figura del cuerpo Σ', y las consideraciones que hagamos, en una sección meridiana se repetirán para todas las demás.

En primer lugar observemos que siendo esféricas las dos superficies Σ y Σ', las otras dos que hemos denominado Ξ y Δ ambas desarrollables y circunscritas á las primeras, se convierten aquí en dos superficies cónicas, cuyos vértices O y O' estarán colocados en la recta que una los centros ω y ω'.

El primer cono, ó sea el que es tangente exteriormente nos da las curvas de contacto, que aquí serán los círculos

proyectados según las rectas AB, *ab*, mientras que el segundo cono tangente interiormente de la separación de las dos esferas, dará las curvas de contacto, que serán también círculos proyectados según las rectas CD, *cd*; sabido es ahora que las aristas de retroceso de las dos superficies desarrollables de que tratamos se convertirán aquí en los puntos O', O, vértices de dichos conos.

En este estado, demos por supuesto, que ambos conos se cortan por un plano P, de perfil, colocado hacia la parte posterior del cuerpo Σ', y que en dicha sección nos dan las curvas proyectadas según la misma traza del plano, la una en *a'b'* y la otra en *c'd'*, giremos ahora este plano hasta rebatirlo, en la disposición que nuestra P', en la cual podremos hacernos cargo con conocimiento de causa, de la verdadera magnitud de las curvas de sección colocadas en *a''b''*, *c''d''*, así como de su relativa posición que entre sí guardan.

La primera; la *a''b''* será el límite de sombra arrojada pura, y la segunda la correspondiente al límite de la penumbra arrojada; en cuanto á las líneas de igual denominación pero que incumben al cuerpo Σ', serán respectivamente la *ab* y la *cd*. Con todos estos antecedentes, tratemos ahora de observar y hacernos cargo de la distinta intensidad de la penumbra y como ésta va debilitándose con gradación sucesiva, desde la línea *ab* hasta la *cd*, desde la cual empieza la parte completamente iluminada, y que igual fenómeno se sucede en las sombras arrojadas sobre el plano P', cuya penumbra arrojada, decrece insensiblemente en intensidad desde la línea *a''b''*, hasta la *c''d''*, en el trecho interior del anulo que las separa.

Hagamos á este efecto, la observación á lo largo de un meridiano cualquiera, como por ejemplo, el que pasa por la recta M_1N_1, y empecemos á considerar un punto tal como el α dentro de la curva *a''b''*; este punto α, cuya verdadera posición está en α', se halla de tal suerte, que si por él tratáramos de trazar dos tangentes al cuerpo Σ, no sería posible conseguirlo, pues encontrándose ellas dos en el interior del cono de vértice O, impediría prolongarlas la masa del cuerpo Σ', indicándonos con ello, que dicho punto α, así como cualquiera de los que tomemos en cuenta, dentro de la curva *a''b''*, no podría estar iluminado por ningún elemento del foco Σ, y por lo tanto, dentro del perímetro *a''b''*, existirá obscuridad completa, es, pues, la sombra pura arrojada. Mas consi-

deremos ahora un punto m'', exterior al límite $a''b''$, y en l dirección M_1N_1; este punto colocado en su debida posició estará en m', y desde él nos será fácil trazar una tangent al cuerpo Σ', esta prolongada viene á cortar en M, al cuerp Σ, y con ello nos indica que para el punto m' y también par el m, no más es accesible para ellos la cantidad de luz qu dependa del treecho comprendido en MB. Pero á medida qu vayamos escogiendo puntos tal como n'' más separados de b'' la intensidad de la sombra disminuirá, aclarándose sin cesar y es que en el punto n'' ó su equivalente n', al trazar la tangente á Σ', ó lo que es lo mismo su rayo límite para con respecto á este punto, nos encontramos que la luz que reciba, l propio que el n, dependerá del trecho del cuerpo luminoso comprendido en el arco BN, mucho mayor que el anterio BM, y por lo tanto, mucho más iluminado n'' que el m''.

Finalmente, de escoger ahora un punto q'' ó q' fuera de l curva límite $c''d''$, nos será fácil ensayar que desde dicha q' pueden trazarse las dos tangentes (que representarán rayo luminosos límites) al cuerpo Σ, sin que ahora, se oponga á su paso la masa de Σ', luego eso mismo por sí solo, indica que toda la luz de Σ, es accesible para el punto q' y otros que estén como él, en análogas circunstancias, existiendo para ellos iluminación completa. Resulta, pues, que la sombra irá disminuyendo por grados, desde a'' á c'' y desde ab á cd, constituyéndose con ello la penumbra, y que igual propiedad acaecerá en torno de la línea $a''b''$ y dentro del círculo que media entre las curvas $a''b''$, $c''d''$. Dichos fenómenos se reproducirán para el cuerpo Σ', según ya hemos indicado, y allí la penumbra propia irá decreciendo en los mismos grados, desde la línea ab hasta la cd, desde cuya última aparecerá iluminación completa.

18. Por lo últimamente estudiado, puede inferirse, que el problema de las sombras, llevado bajo la solución más general, esto es, de encontrarse el operador con dos cuerpos de forma cualquiera, uno luminoso y el otro opaco, aparece lleno de trabajos, que aunque fáciles, son, sin embargo, largos y penosos, sobre todo, por ser obligada la construcción de las dos superficies desarrollables, de que hemos hecho mención.

19. Rayos luminosos paralelos. Foco solar. — Mas si bien aparece algo complicada la determinación de la penumbra tal como acabamos de ver, queda solventada, sin embargo, su resolución en la práctica general de las sombras, en donde siempre se emplea la luz solar, y en este caso por ser tan grande la distancia que media del sol á nuestro globo, comparación hecha á las distancias á que estamos acostumbrados, y aún también comparándola con el radio terrestre (pues se calcula aproximadamente que es igual á 23,280 veces mayor que el radio terrestre *), resulta que es tan inapreciable el ángulo de los rayos luminosos límites (para un observador colocado en un punto cualquiera del globo terrestre, y dirigiendo sus rayos visuales tangentes al astro solar, en los puntos de tangencias situado en los extremos de un diámetro), que sin error sensible, se pueden considerar, y se consideran como paralelos, y en esta hipótesis, claro está que la penumbra desaparece, pues las dos superficies desarrollables Σ, Σ, se transforman en un cilindro circunscrito al cuerpo opaco, y cuyas generatrices son paralelas á la dirección de la luz.

Es fácil, por otra parte, convencernos del escaso error que incurrimos en al admitir la hipótesis de los rayos luminosos paralelos. En efecto, todo está reducido á probar que la extensión de arco da (fig. 8) á que se extiende el ancho de la zona ocupada por la penumbra, es insignificante comparación hecha con el radio de una esfera cualquiera cuya sombra tratamos de determinar.

En efecto, la extensión lineal del arco ad en la esfera de radio R guardará la misma relación con el propio arco, que la que tiene la extensión de la circunferencia entera, con el número de grados de esta misma circunferencia; ahora bien, como la medida del arco ad es la que corresponde al ángulo $a\omega d$, de las normales ó radios en los puntos a y d, y este ángulo es igual al ATD formado por las tangentes límites TA, TD al astro solar dirigidas por las visuales de un observador colocado en T, ángulo por el cual apreciamos el diámetro aparente del astro solar, desde un punto del globo terrestre, y este ángulo, por diferentes observaciones, se ha deducido ser igual á 32', de aquí que podrá establecerse la siguiente proporción:

$$360^\circ = 21600' : 32' :: 2\pi R : x$$

* Véase al efecto para más aclaración el párrafo núm. 45 de nuestro *Tratado de Gnomónica*.

llamando x la extensión lineal que buscamos del arco ad. De esta proporción inferimos:

$$x = \frac{32' \times 2\pi R}{21600'} = \frac{32' \times \pi R}{10800} = \frac{32' \times 3'1415 \times R}{10800} =$$

$$\frac{100'53}{10\,800} R = \frac{1}{108} R = 0{,}0093 \times R.$$

Vemos que, dando por supuesto que el radio sea R la extensión de la penumbra en la esfera correspondiente, ocuparía un poco más que nueve milésimas de radio, y siendo 1^m el radio de la esfera, la penumbra cogería de extensión un poco más de nueve milímetros. Fijémonos, pues, en lo que representaría en el espacio esta pequeña medida, y deduciremos que apenas sería perceptible.

Sin embargo, si á tal extremo de veracidad quisiéramos llegar, sería, por otra parte, sencillísimo, una vez encontrado el punto a, trazar una tangente dd' á la esfera, que formará con la tangente $a\,a'$ de la sombra propia, el ángulo $d'T$ á que fuese igual á 31'.

En resumen, que apareciendo de tan poca importancia la penumbra como á cuestión de resultado, no la tendremos en cuenta en la práctica de los distintos problemas que de las sombras se resuelvan.

20. Distintos sistemas de rayos luminosos.—Tomando, pues, los rayos luminosos como á paralelos y como á provenientes de la luz solar, queda no más á determinar la dirección más adecuada de los mismos, y éstas pueden ser varias según los casos.

1.° **Dirección cualquiera.**—La escoge el operador según sea la índole del cuerpo y la posición que tenga en el espacio, pues viniendo la teoría de las sombras á contribuir á la mejor representación del objeto, claro está que aquella dirección se ha de sortear de tal modo que produzca el sistema de sombras propias y arrojadas más convenientes para que aparezca en el mayor grado el relieve del cuerpo, con sus entrantes y salientes, acusando cuanto posible sea la forma y curvatura del mismo si la tuviera, por estar contorneado por superficies curvas. Se comprende fácilmente, que si la luz tuviera una tal dirección, que iluminara todas las caras vistas del contorno aparente de un cuerpo sobre uno de los planos

de proyección, el efecto que produciría no sería de mucho tan recomendable; como si la dirección de dichos rayos hicieran aparecer á la vez caras iluminadas y obscuras, cuales en las líneas de separación del claro y obscuro, contrastan más, para la ilusión á que concurren para hacer comprender el avance de unas caras de otras.

Si por otra parte se escogiera un rayo luminoso, en dirección muy próxima á ser paralela al plano horizontal ¿qué de extensión no tendrían en general las sombras arrojadas sobre dicho plano? Entonces el efecto sería por exceso, y la mancha de sombra que apareciera, sería nociva para el dibujo del propio cuerpo, el cual quedaría relativamente absorbido su efecto, por la mayor atención que llamaría sobre sí el gran espacio ocupado por la referida sombra.

Consideraciones análogas podríamos pasar á discurrir, si el cuerpo ó cuerpos que tuviéramos á mano estuvieran inclinados en el espacio de un modo cualquiera; ó bien que su sombra arrojada cayera proyectada sobre otros cuerpos, pues en este caso la inclinación escogida por el rayo luminoso, dependería de las caras ó superficies del objeto, á las cuales diéramos la preferencia, para que destacaran más de las otras, ó ya también, para aminorar ó aumentar las sombras arrojadas que sufren quebranto en la dirección de sus líneas por caer arrojadas sobre cuerpos accidentados, cuya mayor ó menor extensión, puede caber á los fines que se proponga todo aquel que, encargado de estudiar un proyecto trate de hacerlo aparecer en dibujo con toda la apariencia de verdad, buen efecto y unidad en las líneas, tanto del dato como de la sombra. En suma que no cabe dar reglas precisas para fijar en absoluto la dirección de los rayos luminosos, pues en problema tan complejo, en donde son infinitas las condiciones que actúan á combinarse dependientes del dato, que sólo la mucha experiencia del operador puede traslucir y acertar de momento la más conveniente, atención hecha de los elementos con que cuente en el planteo del problema y del efecto que conciba y pueda de su ingenio realizar.

Los rayos luminosos paralelos, ó sea la luz solar, llevan ventaja á los rayos convergentes ó sea empleando luz artificial, toda vez que facilitan las construcciones, á la vez que no saliendo tan deformadas las sombras arrojadas, con los primeros, se avienen mejor los contornos que ellas producen, con las originales de los cuerpos originarios.

Así, por ejemplo, cuando se trata de una serie de cuerpos iguales y colocados en disposiciones también iguales, basta determinar con precisión la sombra de uno de ellos, tanto propia como arrojada, y reproducirla luego, copiándola simplemente, para cada uno de los cuerpos de igual conformación. Por ejemplo, una serie de pilares ó columnas iguales, arrojando sombra sobre un mismo plano, ó en una fachada en donde figuren una porción de ventanas ostentando guardapolvos, ó bien sean balcones con sus repisas, etc., etc., en todos estos casos bastará resolver el problema tan sólo en uno de estos detalles, copiando luego fielmente en todos los demás análogos. No así sucedería empleando luz artificial, en razón de que la divergencia de los rayos luminosos sería distinta para cada uno de los mencionados objetos, teniendo precisión de efectuar las operaciones para cada uno de ellos en particular, al paso que la deformación de dichas sombras se acentúa según sea la distancia del foco luminoso al objeto, así como las distancias de dichos objetos al plano ó planos que reciben las sombras arrojadas, produciendo en suma un efecto, por cierto nada agradable, al aparecer masas de sombra extendidas en divergencia, cuales alteran la armonía de las líneas generales del dibujo, quitándole la unidad, base principal de las propiedades estéticas. Por otra parte salta á la vista que con luz natural, hemos de trabajar con cilindros, mientras que con luz artificial, son conos las superficies auxiliares, siendo las primeras mucho más sencillas que las segundas, bajo el punto de vista de las operaciones, cuales precisa sean breves, sencillas y que se presten al mayor grado de exactitud posible.

2.° **Rayos luminosos á 45° con la línea de tierra** —En sus proyecciones este rayo está inclinado con un ángulo de 45° con la línea de tierra, más no así en el espacio cuya inclinación no es de 45° con los planos de proyección, cuya inclinación que conoceremos por ω es igual para con respecto al ángulo que formara ya sobre el plano horizontal ya sobre el plano vertical.

Semejante rayo luminoso, tiene situación tan original en el espacio, que siempre se le puede considerar (fig. 9) como la diagonal R de un cubo, en que dos de sus caras son paralelas al plano horizontal, otras dos, son paralelas al plano vertical, y otras dos situadas en planos de perfil, escogiendo ordinariamente la diagonal dirigida de izquierda á derecha

del observador, y de arriba abajo, tal como muestra la letra R. Este cubo, se le suele conocer por el *cubo de luz*. En esta disposición la proyección de R sobre el plano vertical es R^v, diagonal del cuadrado ó cara del cubo más próxima ó confundida en el plano de proyección vertical, la proyección horizontal es R^h, diagonal de la cara más próxima ó confundida con el plano horizontal, y finalmente la proyección auxiliar en las caras de canto ó laterales, serán en el espacio, las diagonales R' ó R'' de los cuadrados de las propias caras. Fs necesario fijarse bien en semejantes disposiciones y propiedades, pues ellas son la base fundamental de las ventajas que proporciona, tamaño dirección de la luz, y que vamos á enumerar desde luego.

Supongamos en primer lugar que nos proponemos encontrar la sombra del punto a^v, a^h, sobre el plano de proyección vertical (fig. 12), siendo R^v, R^h la dirección de un rayo luminoso cualquiera; á este efecto y suponiendo posible que el punto se encuentre materializado, vendrá herido por el rayo luminoso y este último, será interrumpido en su marcha al chocar sobre dicho punto, y de modo que quedará hacia la parte posterior del mismo una línea recta privada de luz y en la misma dirección que el rayo luminoso. Ahora es evidente, que si dicha línea, que hemos llamado en otro lugar *rayo de sombra*, encuentra á su paso otra superficie que detenga su marcha, por ejemplo el plano de proyeción vertical, el citado rayo al encontrar el plano, dejará marcado en él un punto privado de luz, es el a^s, sombra del dado. La esencia, pues, de estas construcciones es sencillamente encontrar la traza vertical del rayo luminoso que pasa por el punto en cuestión, y con ello vemos que necesitamos disponer los datos, como á un problema de Geometría descriptiva, esto es el plano de proyección vertical, en pos del horizontal, confundido en un solo plano, aunque separadas sus dos regiones por la línea de tierra; y luego resolver el problema de las trazas de una recta.

El engorro y lo penoso de semejante disposición, es bien notorio, al tratarse de proyectos y dibujos de Arquitectura é Ingeniería, en donde la proyección horizontal expresa las plantas, y el plano vertical los alzados, ambos hechos á escalas relativamente de gran tamaño, y ocupando, por lo tanto, hojas de bastante extensión, para que fuera muy difícil moverlas á cada momento al objeto de trabajar en ellas, en

el concepto de hallarse en un solo lienzo tal como acontece con los planos de proyección.

Adoptando el rayo luminoso, cuyas dos proyecciones hagan ángulos de 45° con la línea de tierra, desaparece semejante inconveniente, pudiendo formarse el alzado y la planta, en dos planos ú hojas sueltas y separadas é independientes entre sí, así como también llevar á cabo las construcciones separadas unas de otras y cada una de ellas en su plano especial; y para esto bastará tan sólo inspeccionar lo que sucede, en la fig. 12. Tracemos al efecto, la horizontal $a^s b$, habremos formado un triángulo rectángulo isósceles $a^v b a^s$, y por lo tanto, los ángulos en a^v, a^s son de 45° por construcción, pues así lo exige el dato; igualmente es rectángulo é isósceles el triángulo $n\ a^h\ m$. De semejante disposición resulta ahora que el lado $a^h\ n$, es igual á $nm = ba^s = a^v b$, y por lo tanto, teniendo en cuenta que el lado $a^h n$, es la distancia ó separación, del punto del espacio al plano vertical, esto es, al plano sobre el cual se desea encontrar la sombra arrojada, inferimos que sabiendo de antemano esta distancia, podremos prescindir en este caso del plano horizontal, pues bastará trazar la vertical que pasa por a^v tomar por ella) hacia la parte inferior y á partir del punto a^v, la distancia $a^v b$ igual á aquélla separación, por b, trazar una horizontal, hacia la dirección del rayo luminoso, tomando también sobre ella, á partir de b, la $ba^s = a^v b$, y así el punto extremo obtenido será la sombra del punto del espacio. Si nos hacemos cargo ahora que en la práctica de las sombras son muchos los puntos cuyas sombras son necesarias encontrar dentro de una misma cuestión, y comparamos el primer procedimiento de las trazas, con el incomparablemente más cómodo y expedito que acabamos de realizar, con el rayo particular de 45° de la línea de tierra, con sus proyecciones, tendremos prueba plena que la elección de semejante sistema de rayos será siempre conveniente y recomendable para facilitar y dar rapidez en las operaciones; como más adelante trataremos de ampliar, viéndolo prácticamente en algunas cuestiones, que á ello se presten de una manera especial.

Excusado es decir que lo dicho para el plano vertical, puede repetirse si se quisiera encontrar la sombra arrojada del punto c^v, c^h, sobre el plano horizontal, pues siguiendo lo antes indicado y conociendo de antemano la altura $c^v f$, del punto sobre dicho plano, la colocaremos sobre la perpendicular á la línea de tierra en $c^h d$, luego sobre dc^s, en la perpendicular á la $c^h d$; el punto obtenido en c^s, es la sombra arrojada del punto c sobre el plano horizontal.

En general este modo de obrar, es tanto más recomendable en ciertos casos particulares, como por ejemplo si se tiene como á dato un perfil de moldura complicada, pues teniendo en cartera, las cotas de un punto al plano de comparación ó de sombra arrojada, el resultado se obtiene con gran rapidez.

En segundo lugar ocurre con frecuencia, para facilitar las construcciones, recurrir á un tercer plano de proyección auxiliar, cual es un plano de canto ó de perfil, sobre el cual se hace preciso desde luego proyectar el rayo luminoso para luego rebatir dicho plano con todo lo que haya en él sobre uno de los planos de proyección, el vertical, por ejemplo, efectuando en esta situación las operaciones, volviendo á trasladar el resultado obtenido á su debida posición en el espacio. Pues bien, de escoger el rayo luminoso de modo que sus proyecciones hagan ángulos de 45° con la línea de tierra, no habrá necesidad de llevar á cabo la operación de giro para con respecto á dicho rayo, toda vez que la misma proyección vertical se confundiría con el rebatimiento. En efecto, fijémonos para esto en la fig. 9, en ella el plano mna representa el plano, que en proyecciones sería de perfil; en él está proyectado el rayo en R″, al girar el plano mna en torno de la arista ab para rebatirse sobre el plano vertical, ó sea la cara $m'b$, el punto m describirá en el giro un cuadrante y se colocará en m', y como a, es fijo, R″ se superpondrá con R^v; no así sucedería si escogiéramos una dirección cualquiera.

Sabiendo, pues, de antemano que tal sucede, no tenemos necesidad de semejante operación y el mismo rayo proyectado en R^v sirve como de rebatido. Si en lugar de considerar el plano de perfil el mna considerásemos el opuesto $m'cd$, en que el rayo se proyecta en R′, y lo hiciéramos girar alrededor de la arista $m'c$, y en el mismo sentido que el anterior, entonces R′ quedaría rebatido paralelamente á R^v, lo cual sería lo mismo que decir que se rebate, confundiéndose con un rayo luminoso proyectado en el plano vertical. La fig. 10 confirma semejantes propiedades considerando al cubo en sus dos proyecciones.

Hemos observado anteriormente, que si bien el rayo luminoso en sus dos proyecciones forma ángulos de 45° con la línea de tierra, no guarda, sin embargo, la misma inclinación

con los planos de proyección, con los cuales forma un ángulo menor. En efecto, si pretendemos averiguar el ángulo que forma con el plano horizontal, no habría más que girar el plano vertical am que lo proyecta (fig. 10) hasta rebatirlo con el plano vertical, en este concepto si el giro se hace alrededor de la vertical mn el punto a pasará en a''', y siendo fijo el m el rayo rebatido vendrá en $a'''m$ ó sea R, y en este estado el ángulo lo tendremos en verdadera magnitud en $a'''ma''$, que conoceremos de ahora en adelante por ω.

Es muy conveniente tener á mano, en casi la mayor parte de las cuestiones de sombra, este último ángulo, en razón de la mucha frecuencia que se recurre á planos secantes á las superficies y que tienen la dirección vertical y son paralelos al rayo luminoso para luego rebatirlos con los rayos que en sí contienen, esta es la razón porque si lo conocemos ya de antemano en función de sus líneas trigonométricas, será fácil emplearlo rápidamente echando mano del valor en línea trigonométrica que más nos convenga, á este efecto fijémonos en la fig. 10 y conviniendo en tomar por unidad el lado del cubo deduciremos en seguida que la diagonal R^h será igual á $\sqrt{2}$.

Ahora bien, en el triángulo $a'''a''m$ se tiene $a'''a''=a''m$ tang ω ó bien substituyendo valores $1=\sqrt{2}$ tang ω, despejando tang ω será $\text{tang}\ \omega=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si nos conviene el sen ω observaremos que $\overline{a'''m}^2=\iota^2+(\sqrt{2})^2=3$ ó bien $a'''m=\sqrt{3}$.

Y por lo tanto del triángulo $a'''a''m$, deduciremos $a''a'''=a'''m$ sen ω de donde $\text{sen}\ \omega=\frac{a''a'''}{a'''m}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Finalmente si es el coseno ω el que nos conviene, nos valdremos de la siguiente analogía deducida del triángulo $a'''a''m$; $a''m=a'''m$ cos ω, de donde $\cos\omega=\frac{a''m}{a'''m}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Así como regularmente nos valemos en la práctica de las operaciones de una escuadra ó cartabón, cuyos catetos formen ángulo de 45° con la hipotenusa, así también convendría, para contribuir á la mayor rapidez de las operaciones, tener á mano un cartabón con el ángulo ω, este instrumento

es fácil de trazar, aún en la misma escuadra que lleva el ángulo á los 45°. Con efecto (fig. 11), concíbase una recta de paralela á un cateto en el triángulo cde, la df es la altura del triángulo cde, ó lo que es lo mismo, aquí en nuestro caso la mitad de la diagonal del cuadrado cuyo lado sea de, por lo tanto $df=\frac{\sqrt{2}}{2}$; si llevamos ahora la df en df' y unimos f' con e, entonces el ángulo $f'ed$ será el ω que se desea; y así es porque el triángulo $f'de$, da, $\text{tang}\ \omega=\frac{f'd}{de}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, expresión encontrada más arriba para dicho ángulo. En el mismo instrumento, según esto, pueden obrar dichos dos ángulos 45° y ω, cortándole á este efecto con dichas inclinaciones, lo cual, valiéndose de él facilitará gran brevedad á todas las operaciones.

3.° **Rayo luminoso inclinado á 45° para con respecto al plano horizontal.**—Este rayo tiene también en ciertas ocasiones inmejorables ventajas, en primer lugar porque puede escogerse la dirección de su proyección horizontal, dando con esto gran libertad al artista, el cual adopta en semejante circunstancia la que más le place y mejor cumple para obtener el resultado que se propone para el efecto del dibujo, dando más relieve á los objetos con la aparición de ciertas sombras arrojadas, más convenientes que otras, de adoptar otra dirección para la luz. Así tiene latitud suficiente para ir sorteando distintas direcciones en la proyección horizontal del rayo hasta que queden más ó menos iluminadas, unas con preferencia de otras, según la importancia que pretenda tengan ellas relativamente y entre sí.

Mas lo esencial, rápido y provechoso de este singular rayo luminoso, consiste en que las sombras representadas sobre un plano horizontal nos indican ya las alturas ó separaciones de cada uno de los puntos del espacio, al plano horizontal referido, bastando con ello una sola ojeada al dibujo de sombra para poder formar concepto del cuerpo del espacio; en una palabra, aquí el solo dibujo de la proyección horizontal con sus sombras, viene á formar un verdadero sistema de dos proyecciones en que la una es la propia proyección horizontal del dato, y la otra el sistema de proyectantes verticales, cuyas se tienen en su verdadera magnitud en cada una de las rectas que representan los rayos de luz y que median entre

los puntos de la proyección horizontal y los de sombras. Así en la fig. 13 P es un plano horizontal, *a* un punto en el espacio y *a'* su proyección sobre P, ahora R es un rayo luminoso que pasando por el punto está inclinado de 45° con dicho plano, al cual hiere en el punto a^s, cual es la sombra de *a*. En este supuesto, el triángulo que se forma en $aa'a^s$ es rectángulo é isósceles, y por lo tanto la vertical proyectante *aa'* será igual á la distancia que media del punto *a'* al a^s; de modo que si *aa'* fuese una varilla vertical, su altura ó longitud sería precisamente igual á su sombra arrojada, y por lo tanto el conocimiento de ésta nos facilitaría aquella altura, por la cual imaginaríamos en seguida colocado el punto extremo *a* en el espacio. Así, pues, si con este rayo luminoso quisiéramos encontrar la sombra del punto *a—a'* sobre P bastará sencillamente trazar por *a'* el rayo R^h, tomar sobre él á partir de *a'* la separación *aa'* del punto considerado sobre P, y el punto a^s, así obtenido, resolverá la cuestión; y por la inversa dado el punto *a'* y el de sombra a^s, sobre el plano P, con ello evidenciaremos el punto *a* del espacio. Se comprende perfectamente que ese mismo rayo luminoso ya no reuniría semejantes ventajas si quisiéramos adoptarlo para el plano vertical de proyección, compañero del horizontal escogido; mas se comprende por otra parte muy bien que si precisión tuviéramos de representar el objeto en el plano vertical, con él también podríamos adoptar otro rayo de luz especial, formando 45° con el dicho plano vertical, y en la dirección de su proyección que más nos pluguiera, análogamente como se ha hecho con el plano de proyección horizontal.

Es bien cierto ahora que los dos dibujos, esto es la *Planta* y el *Alzado* vendrán iluminados por rayos luminosos distintos, mas esto que á primera vista puede aparecer anómalo, deja de serlo si se tiene en cuenta, por otra parte, que aquí, aunque dichos dos dibujos tengan entre sí una relación estrecha, puesto que significan partes de un todo unificadas por las líneas proyectantes, sin embargo, bajo el punto de vista de iluminación pueden considerarse como dibujos independientes, tanto más en cuanto están dibujados en hojas separadas, no pugnando así el que el alzado venga iluminado por un rayo luminoso, y el alzado valiéndose de otro distinto.

Mas ya anunciamos en el párrafo 12, que podrá considerarse la teoría de las sombras como medio de descripción, pues cualquiera que sea la dirección que se adopte para el rayo luminoso, siempre la proyección ortogonal del objeto sobre el plano horizontal, y la sombra arrojada sobre el mismo plano, que no es otra cosa que una proyección oblicua, darán siempre dos agrupaciones de líneas proyectantes, las unas rectas y las otras oblicuas, cuales al encontrarse respectivamente, formarán el objeto en el espacio. Sin embargo, para que tal suceda, será forzoso tener proyectado el objeto, tanto ortogonal como oblicuamente, en todas sus líneas, tanto vistas como ocultas, tanto iluminadas como obscuras.

21. Medios de investigación.—Varios son los procedimientos de que nos podemos valer para resolver el problema de las sombras, cuales los vamos á exponer por su orden.

Primero: **Sistema de planos secantes.**—Fué el primero que se empleó, usado exclusivamente por los antiguos. Sea al efecto (fig. 14), un cuerpo C, un plano P, y el rayo luminoso R; imaginemos una serie de planos que corten á la superficie C, y que á la vez sean paralelos al rayo R; demos por supuesto, que por los procedimientos que enseña la Geometría descriptiva se han encontrado las secciones producidas, y éstas son las curvas V, X, Y, Z. Es evidente que á estas curvas será siempre dable trazar las tangentes paralelas al rayo luminoso; sean éstas las que pasan por los puntos de tangencia *a*, *b*, *d*, *c*, entonces, uniendo todos estos puntos por un trazo continuo, nos dará en *mcnh*, la curva línea de separación de la sombra propia, con la parte iluminada; porque todas las mencionadas tangentes á las curvas de sección, lo son también á la superficie, y además pueden considerarse cada una de ellas como un rayo luminoso.

Ahora el plano P es el destinado á recibir la sombra arrojada y para encontrarla, tengamos en cuenta que cada plano secante anterior, convenientemente prolongado, cortará al plano P, según una recta; así si nos fijamos en el que ha producido la sección V, éste cortará á P según la recta AA', la cual es cortada á su vez por los rayos que pasan por los puntos de tangencia *a*, *b*, en los puntos *a'*, *b'*, cuales pertenecerán á la sombra arrojada; y como semejante operación se repetirá para los otros planos secantes, cuyas intersecciones con P son las rectas BB', DD', etc., de aquí es que se obtengan nuevos puntos que juntos facilitarán la curva *a'm'b'c'd'e'n'f'g'h'*, contorno de la sombra arrojada.

Hemos dicho que la tangente paralela al rayo luminoso, á

la curva de sección producida al cuerpo que se considera, nos proporcionaba, con el punto de tangencia, un punto de la sombra propia; esto es lo que efectivamente acontece en general, mas no siempre se realiza semejante propiedad de una manera absoluta; pues hay superficie de tal índole, que no permiten en algunos de sus sitios el poder realizar semejante operación.

Veamos para esto la fig. 18, en la cual el contorno curvilíneo Σ, supone ser la sección producida á un cuerpo, por un plano paralelo á R.

Tracemos en ella todas las tangentes geométricas posibles, paralelas también al rayo de luz R, y veremos que resultan seis puntos de tangencia. Primero los *a, b, c*, segundo el *d*, y tercero los *m, n*. Teniendo en cuenta los primeros, ellos no ofrecen ninguna novedad, son puntos de verdadera tangencia exterior en que el rayo luminoso llega á ellos sin ningún impedimento; ellos pertenecen á la línea divisoria de luz y sombra, semejantes á los que hemos visto hasta ahora; mas si consideramos el punto *d*, éste, aunque se ha podido, por él, trazar la tangente exterior, sin embargo, si bien se observa el rayo luminoso, prolongación de la tangente geométrica, es el R‴, el cual encuentra á la superficie en el punto *q*, y allí se detiene, impidiéndole su libre camino la masa opaca del cuerpo Σ, no pudiendo, por lo tanto, llegar á iluminar el punto *d* el cual queda sumergido en la sombra que arroja la superficie sobre sí misma.

Tampoco en los puntos *m* y *n*, pueden facilitarnos puntos de la línea de separación, sus tangentes geométricas son las confundidas con las prolongaciones de los rayos R″, los cuales son detenidos en su marcha en los puntos *r* y *t*, pues no pueden penetrar en la masa de la superficie, la cual maciza se opone á ello.

Tenemos, pues, con ello, tres clases de puntos y líneas tangentes á los mismos, y ellos entre sí quedan clasificados del modo que á continuación se expresa: 1.° Los *a, b, c*, puntos reales, y también reales sus tangentes, ellos realmente son aprovechables para formar parte de la línea de separación de luz y sombra. 2.° El punto *d*, punto también real, pero sumergido en la sombra arrojada de la propia superficie, y que de suprimir de ella la parte anterior, quedaría dicho punto formando también parte de la línea de separación correspondiente, mas no ahora, en que dicha segunda sección de línea queda *parásita*, llamándose también parásito (15), el punto *d*, por lo que se refiere á formar parte de dicha línea; y 3.° Los puntos *m* y *n*, llamado *virtuales*, así como también sus tangentes, que caen hacia lo interior del cuerpo, en donde no pueden penetrar los rayos de luz.

Por segundo ejemplo, consideremos ahora, un cuerpo que sea tal, que se presente accesible su interno; esto es, que aparezca hueco, y sea de igual conformación que el que acabamos de estudiar, pero invertido en su masa; esto es, que lo que antes era macizo, ahora sea hueco, y lo que era contorno exterior, ahora sea contorno interno (fig. 23). En este caso se invierten también las funciones de los puntos y sus tangentes; así los *a, b, c, d*, pasarán á ser virtuales, mientras que los *m* y *n* serán reales.

Finalmente, en la fig. 18 se observa que el rayo R′, tangente en el punto *a*, encuentra á la misma superficie en *a′*, siendo éste arrojado por el primero, ahora bien; de tal modo podemos ir aumentando el número de planos secantes á la superficie, aproximándolos cada vez más al contorno de la misma, que los tres puntos *a, m, a′*, váyanse aproximándose sin cesar, hasta el caso de llegar á colocarse infinitamente próximos, en cuya situación, los dos tangentes interiores se habrán confundido, dándonos la disposición que muestra la figura 24, en este caso el punto ó elemento de tangencia se llama punto de *pasaje ó transición*, distinguiéndose en que en él hay una inflexión en la curva de sección, encontrándose el rayo luminoso tangente á la misma inflexión.

Todas estas propiedades y excepciones que se separan del caso general expuesto, usando el sistema de planos secantes y rectas tangentes á las secciones por ellos producidas, tienen lugar cuando se trata de superficies formadas de curvaturas opuestas y también las llamadas no convexas, como tendremos ocasión de estudiar en detalle en su lugar correspondiente.

Semejantes procedimientos de los planos secantes, si bien es fácil, no puede ocultarse por otra parte que es relativamente largo y penoso, pues según sea la forma del cuerpo cuya sombra se desee hallar, se necesita la inversión de tiempo considerable para el trazado de cada curva de sección, máxime si ésta no es de propiedades definidas, en cuyo caso, para rectificarla, se hacen indispensables gran número de puntos, así como también de sus tangentes, empleándose no

más en casos especiales, que tan sólo la práctica hace vislumbrar, así como también la mucha pericia del artista, habituado en la resolución del problema en toda la gran variedad de superficies conocidas. Hemos de acudir á otros medios más expeditos.

22. Segundo. **Sistema de planos tangentes. Superficies auxiliares circunscritas.**—Como el mismo enunciado indica, consiste semejante sistema en conducir (fig. 15), planos como el Q, paralelos al rayo R, y tangentes á la superficie C, de que se trate, precisando el punto de tangencia *b*, y unidos que sean todos ellos proporcionarán la línea *abc*, de división de luz y sombra propia, y como que por cada uno de dichos puntos pasará su correspondiente rayo luminoso *bb'*, contenido en el plano Q, de aquí que el punto *b'*, de intersección de *bb'*, con toda otra superficie P, que se oponga á su paso, dará uno de los puntos de sombra arrojada, siendo toda ella la *a'b'c'*, de cuya es originaria la *abc*.

Ahora bien los procedimientos que enseña la Geometría descriptiva, para el trazado de estos planos tangentes, son distintos, aunque basados en un mismo principio, cual es, hacer depender el plano tangente de una superficie cualquiera, del de otra superficie mucho más sencilla circunscrita á la primera.

Así, por ejemplo (fig. 16), si se trata de una esfera C, siempre será dable imaginar en ella un cono circunscrito á la misma, teniendo de común cono y esfera la curva ó paralelo *abcfd*; determinando luego los planos tangentes al cono y paralelos al rayo R, aquéllos proporcionarán las generatrices de contacto V*b*, V*d*, cuales cortando en *b* y *d* á la curva de base, determinarán estos puntos que, perteneciendo á la esfera, formarán parte de la línea *fbed*, divisoria de luz y sombra. Ahora los rayos luminosos *bb'*, *dd'*, que parten de dichos puntos encontrados, encontrando al plano P, en *b'*, *d'*, darán puntos de sombra arrojada, cuyos originarios son *b* y *d'*. Repitiendo la operación para otros nuevos conos, obtendremos otros puntos de la línea de sombra propia, así como los que conciernen á la arrojada.

Obsérvese aquí, en este caso particular, que aunque tangentes esfera y cono, á lo largo del paralelo *abcd*, no lo son, sin embargo, las líneas de separación V*b*, *fbe*, y es que para que tuviera lugar esta circunstancia fuera menester, no un

simple acuerdo, sino verdadera osculación, y semejante requisito, no es dable cumplirlo en nuestro caso, pues sabido es, que dos superficies son osculatrices, cuando todo plano que pasa por la normal común, las corta, según dos líneas que á su vez sean osculatrices entre sí, esto es, que tengan el mismo rayo de curvatura.

Ahora bien, la Esfera no puede ser osculatriz de otra superficie cualquiera * en razón de que la curvatura de la esfera es uniforme alrededor del elemento que se considere, mientras que la de una superficie cualquiera deja de tener tamaña uniformidad en el propio elemento destinado para la osculación.

Si, pues, se quisiera para el mejor efecto del dibujo, acusar la tangencia ó acuerdo de las dos líneas divisorias, dado que las dos superficies tuviesen que formar un solo cuerpo como en la fig. 22, sería menester hacer una elección particular de la superficie inferior *adb*, de modo, que sus dos secciones principales en *c*, y las que corresponden al mismo punto en el cono, tengan los dos radios de curvatura; esto es el máximum y el mínimum iguales. Sin embargo, cuando hay alguna práctica de estos trazados, puede prescindirse de semejante operación, contentándose el artista con trazar el perfil *adb*, y la curva *cef* simple á mano, y según el criterio que tenga de su sentimiento.

Mas en lugar de una superficie cónica, puede echarse mano de otra superficie, como por ejemplo, un cilindro cuya determinación de planos tangentes es también muy fácil. La figura 17 se encarga de evidenciarlo; escogida la dirección que se quiera dar al cilindro, circunscríbase éste en M*manq*, á la superficie Σ, condúzcasele luego un plano tangente paralelo al rayo R; aquí son posibles dos, cuales dan las generatrices de contacto A*a*, Q*q*, ambas cortan á la curva de base *manq*, común á ambas, en los puntos *a* y *q*, cuales con evidencia pertenecerán á la línea de sombra *abqc*, determinándose los otros del mismo modo, escogiendo nuevos cilindros circunscritos en la dirección que se crea más conveniente. Ahora la sombra arrojada *a'b'q'c'*, quedará definida por medio de las intersecciones con P, de los rayos luminosos que parten de los puntos de la línea de sombra propia, pues

* Salvo siempre casos muy raros de puntos notables, como son los umbilicales ó cíclicos.

que cada rayo luminoso se encuentra contenido en su respectivo plano tangente.

En la fig. 21, el cilindro circunscrito es vertical, y como lo es á una esfera, el círculo de contacto será uno de los máximos, y allí podríamos repetir las mismas aclaraciones hechas para con respecto de la superficie cónica de la fig. 16; esto es, que la línea sombra de la Esfera E, no se acordará con la línea de sombra del cilindro C, á pesar del acuerdo que existe entre estas dos superficies, y esto por las mismas razones allí expuestas.

23. Tercero. **Por las propiedades de la misma superficie.**—En el caso anterior, pedíamos auxilio á otra superficie más sencilla, para que con ella pudiéramos resolver el problema, con la que se nos daba, que era naturalmente de propiedades ó generación más complicada; así podemos decir; resolvemos, sí, el problema, pero de una manera indirecta; mas en este tercer sistema la resolución es directa, atendiendo tan sólo á la superficie del dato, la cual por sus solas condiciones de generación y propiedades que de ella se desprendan, se ha de bastar á sí misma para dar cumplida satisfacción de lo que á ella se pida.

Con ello ya podrá desde luego deducirse, que en este caso no es posible apoyarnos en reglas fijas que nos sirvan de partida para la resolución, toda vez que siendo en tan gran número las superficies que se conocen, cada agrupación de ellas que obedezca, como si dijéramos, á una misma familia, llevará en sí tales condiciones ó propiedades innatas, á la generación y á su especial modo de ser, que permitiría ponerlas en juego, utilizándolas para encontrar el plano tangente, y claro está que la resolución adoptada para uno de los grupos, ha de ser del todo distinta para lo que se refiere á otra agrupación, ya que también los datos de partida en que se habrá apoyado serán completamente distintos de los de la anterior.

Así por ejemplo, en una superficie de revolución puede invocarse la propiedad de que el plano tangente es perpendicular al plano meridiano que contiene el punto de contacto. En una superficie desarrollable puede acudirse á la propiedad ingénita de que el plano tangente lo es á lo largo de la generatriz de contacto, así como aprovechamos de las ventajas de la línea de retroceso; en una superficie de 2.° grado,

la particularidad de ser planas las curvas de contacto de los conos y cilindros circunscritos á ellas, etc., y así por este estilo en las demás agrupaciones, á las cuales, antes de dar comienzo á la solución del problema precisa hagamos un estudio detenido para ir recordando y desentrañando por decirlo así, todas aquellas propiedades, por las que traduzcamos ser más rápida y fácil la construcción que se anhela para llegar felizmente al resultado.

Si bien no puede darse, según hemos indicado, regla fija, sin la práctica de las cuestiones distintas que en adelante hemos de pasar en revista, nos aleccionará ella para que llegue un momento que por simple intuición natural, demos en cada caso con la clave de la solución.

24. Cuarto. **Sistema de proyecciones oblícuas ó de contraproyección.** —Demos por supuesto (fig. 19), que en la superficie Σ se disponen una serie de líneas cualesquiera *abcd*, *hefg*, *jklm*, etc.; haciéndolas luego servir de directrices de superficies cilíndricas, paralelas á la dirección del rayo luminoso R; si cortamos á todos estos cilindros por el plano P, nos darán las líneas de sección $b'a'd'c'$, $h'e'f'g'$, $j'k'l'm'$, etcétera; cuales, en número bastante, serán suficientes para poder trazar una línea general que las envuelva á todas, y, por lo tanto, tangente á todas ellas; ésta será $b'n'd'g'm'p'k'e'$, cuya no es más que el contorno de la sombra arrojada de Σ, sobre el plano elegido P, por la sencilla razón de que obedece á puntos límites de tangencia, producidos por la intersección del plano P, con rayos luminosos que también son límites ó de tangencia.

En semejante estado de operaciones, claro es que si tenemos en cuenta ahora uno de estos puntos, por ejemplo el b', así como el rayo de luz que á él corresponde, este rayo llegará á pasar por un punto, tal como *b* de la curva *abcd*, originaria de la $a'b'c'd$, y, por lo tanto, en *b* se verificará la tangencia de la superficie Σ con el rayo luminoso, siendo él un punto que pertenecerá á la línea divisoria, que ataña á la sombra propia. Si, pues, igual operación efectuamos para los demás puntos d', g', m', etc., llegaremos á obtener toda la curva de separación *bndgmpke*.

Vemos, pues, aquí, que las operaciones se llevan inversamente que en los demás casos, cuales se encontraba primero la sombra propia, y de ella deducíamos la arrojada, mientras

que en el actual sistema, de esta última se infiere la primera, y de ahí el nombre de contraproyección. Semejante sistema suele adoptarse, por resultar cómodo y exacto á la vez, cuando hay combinación de sombras de varios cuerpos á un mismo tiempo.

25. Quinto. **Procedimientos combinados.** — Aparece muchas veces de tal índole, un problema de sombras que ó ya por lo complicado de la superficie, ó ya por componerse de varios cuerpos, el objeto de que se trate, (como por ejemplo un capitel), ó ya por estar formada la línea divisoria de luz y sombra de varias ramas, ó ya finalmente por otro motivo cualquiera, conviene para precisar más las operaciones, echar mano de los sistemas anteriormente mentados, combinándolos á la vez, empleando en cada sitio de la superficie que se crea más conveniente, ya uno ú otro de aquellos procedimientos que se avenga mejor con la exactitud y rapidez que se desea, pues si un determinado sistema no cuadrara, en cierto paraje de la superficie, en cambio, escogiendo otro de los demás, da más expeditas y rápidas las operaciones. Semejante modo de obrar, salta á la vista, que sola la práctica de muchas operaciones de tal índole, mueven el ingenio del artista para la mejor elección y acierto de los sistemas.

26. **Teoremas fundamentales.** — Con su auxilio venimos en conocimiento de algunas notables propiedades que tienen lugar con las líneas de sombra de las superficies, cuales se repiten sin cesar en el terreno de la práctica, y así conseguir explicarnos semejante fenómeno, sabiendo de antemano á qué atenernos para el mejor resultado de las operaciones.

Primero. Teorema de los contornos aparentes.—*El contorno aparente de una superficie, su línea de sombra propia y la línea de sombra arrojada sobre una superficie cualquiera, tienen en proyección un rayo luminoso que les es tangente á la vez.* La evidencia, la (fig. 5.ª) es donde el rayo luminosa F b, es tangente al contorno aparente de Σ', en β, en el mismo punto es también tangente á la divisoria de luz y sombra $\nu\,\alpha\,\beta$; es también tangente en β', á la sombra arrojada $\alpha'\,\delta\,\beta'$ que arroja Σ' sobre Σ y finalmente del propio modo es tangente en b, á la línea *adbn*, arrojada de Σ'

sobre P. * Lo cual tiene fácil explicación, toda vez que en el contorno aparente, el rayo luminoso tangente se encuentra en un plano tangente especial, cual es el de ser perpendicular al plano de proyección vertical, y por lo tanto, tener la propiedad de proyectarse en su misma traza, todo lo que en él está contenido; luego las tangentes que en el espacio lo son, á las curvas mencionadas en los puntos β, β', b. se confundirán todas sobre la traza vertical del plano, que es aquí el propio rayo luminoso F b. Se infiere de aquí que el rayo luminoso deja de ser tangente en el espacio, en β, á la curva $\nu\,\alpha\,\beta$, en β', deja de serlo á la curva $\alpha'\,\delta\,\beta'$, y en b, á la curva *anb;* así pues, si el rayo efectúa la tangencia por lo que se refiere á la proyección; no así sucede en el espacio.

27. Teorema de los puntos de pérdida.—*En todo punto de pérdida de una línea de sombra arrojada, sobre una línea de sombra propia de una segunda superficie, el rayo luminoso es tangente á dicha línea de sombra arrojada, y la tangencia, no solamente se verifica en la proyección, sino que también en el espacio.* Lo vemos en la fig. 6; cuando el rayo luminoso Fb es tangente en la proyección y en el espacio, en el punto q á la línea *ndq* de sombra arrojada de Σ sobre Σ'. En efecto, el rayo luminoso Fb, por ser tangente en p á la superficie Σ, está situado en el plano tangente del cono luminoso que pertenece á dicho punto; además, por pasar por el punto de pérdida q que está situado en Σ', sobre la línea de contacto $\alpha q \mu$, pertenecerá también al plano tangente de Σ' en q, luego dicho rayo luminoso, estando situado sobre dichos dos planos tangentes, será la intersección de los mismos, y por lo tanto, será la tangente en q á la curva de intersección *ndq* del cono de luz con la superficie Σ' **. Lo mismo se demuestra para el punto n.

28. Teorema relativo á las superficies que se cortan.—*Cuando dos superficies* C y E (fig. 21), *se cortan según la curva* mbn, *la sombra arrojada* bc *de la primera* C, *sobre la segunda* E, *empezará en el punto* b, *en donde la línea divisoria* ab *de la primera encuentra á la mencionada lí-*

* En el concepto que el cuerpo Σ no existiera.

** Unicamente habrá un caso excepcional en que dicha propiedad deje de cumplirse, y será cuando los dos puntos de pérdida p q, vayan aproximándose hasta llegar á reunirse, formando curva cerrada.

nea de intersección bc, *y en dicho punto, precisamente serán tangentes la línea de sombra arrojada* bc *con la de intersección* mbn.

Es evidente dicha propiedad, observando que la tangente en *b* á la curva *mbn*, está producida por la intersección del plano tangente á la esfera, con el que lo es al cilindro, á lo largo de la generatriz *ab;* mas la tangente en *b* á la curva *bc*, se produce por la combinación de los planos tangentes uno á la esfera, y otro al cilindro oblicuo de los rayos luminosos, mas este último se confunde ó es el mismo que el considerado como vertical y tangente al cilindro recto á lo largo de la generatriz *ab;* luego inferimos, que los primeros planos tangentes que producen la tangente en *b* á la curva *mbn*, son los mismos que la que proporcionan la tangente en el mismo punto *b* á la línea de sombra *bc*, y por lo tanto, esta recta tangente lo será á la vez á las *mbn*, y á la *bc*, luego estas líneas serán tangentes entre sí; lo mismo se demostrará para el punto *d*.

Estos tres teoremas, aunque fáciles, son de gran importancia y trascendencia, pues su aplicación permite en gran número de circunstancias, valernos tan sólo de un número reducido de puntos de la línea de sombra, ya que de momento se tienen á mano los puntos de partida y de llegada, de modo que con uno ó dos intermedios, según la extensión de la curva, es permitido el trazar la curva, con toda la precisión que desear sea, á la vez que acentuar su verdadero sentido, en sus movimientos.



CAPITULO II

Sombra del punto, de la recta y del plano

29. Sombra del punto.—El punto, la recta y el plano han de ser, precisamente, los primeros elementos de que nos hemos de ocupar, toda vez que constituyen la base fundamental de la terminación de los cuerpos.

Ya en el párrafo 19-2.° con motivo de apreciar las ventajas del rayo luminoso, cuyas proyecciones forman ángulo de 45° con la línea de tierra, iniciamos el sencillísimo problema de la sombra del punto que caía arrojada sobre uno cualquiera de los dos planos de proyección, y allí vimos cómo este punto de sombra era precisamente la traza del rayo de sombra (19-2.°) sobre el plano vertical ú horizontal, ya se tratase de uno ú otro de estos dos planos.

Aquí, y en todos los ejemplos que van á seguir, no nos concretaremos á que la luz venga dada por rayos luminosos de inclinación especial, como son los de 45° á que nos hemos referido; sino que, y todo con el objeto de generalizar, admitiremos direcciones cualesquiera, así como también los rayos luminosos que provengan de luz artificial.

Sea el punto a^v a^h (fig. 25, lám. 2.ª) del cual quiérese encontrar su sombra arrojada sobre uno de los dos planos de proyección; el que sea á propósito para ello.

El rayo luminoso está dado por sus proyecciones R^v R^h. Este rayo luminoso, conforme dijimos en el párrafo 19 al encontrar el punto *a*, le iluminará, deteniendo ya desde este momento su camino en el espacio; de ello resultará que hacia

la parte posterior del punto quedará una línea recta privada de luz siguiendo la prolongación del rayo luminoso, siendo esta recta lo que conocimos anteriormente con el nombre de rayo de sombra; si, pues, este rayo de sombra queda detenido en el espacio por oponerse á su marcha uno de los dos planos de proyección, como por ejemplo el vertical, claro está que al chocar sobre éste dejará impresa una huella ó punto privado de luz; éste será, pues, la sombra que se busca. Se infiere de esta ligera explicación que para encontrar la sombra del punto dado sobre el plano vertical, bastará imaginar un rayo de sombra que pase por el punto dado y buscar su traza vertical: así a^s será la sombra del punto a sobre dicho plano vertical.

Ya desde luego se deduce que si hubiésemos querido la sombra sobre el plano horizontal tal como $a^{s'}$ hubiera sido necesario recurrir á la traza horizontal de la recta; mas como quiera que aquí, en este caso, esta traza cae en el plano horizontal, pero hacia la parte posterior del plano vertical, se desprende que si el problema ha de tener solución, precisa que prescindamos del plano vertical, como si lo sacáramos de su sitio, ó cuando nó, suponerlo diáfano, de cristal; que entonces los dos puntos de sombra a^s, $a^{s'}$, situados en el mismo rayo de sombra, darían satisfacción al problema.

30. Sombra de un punto sobre un plano cualquiera.— Fig. 26. El punto del dato es el a, y P el plano que ha de recibir la sombra arrojada del primero, aquí, como en el caso anterior, la sombra que se busca vendrá producida por la intersección del rayo de sombra que pasa por el punto con el plano P. Es simplemente un problema de Geometría descriptiva. Hágase pasar, pues, por el punto un rayo luminoso R, búsquese la intersección de él con el plano P y á este efecto hágase pasar por R el plano vertical $a^h cc'$ que lo proyecta horizontalmente; la intersección de este plano con el P resulta ser la recta $d'c'$, luego sabido es que el punto de intersección $s' - s$ de esta intersección con la recta dada que aquí es el rayo de sombra, será en definitiva la intersección del rayo de sombra con el plano P, y, por lo tanto, el punto de sombra que resuelve el problema.

31. Sombra del punto sobre un prisma.—El punto es el a (fig. 26), el prisma es el P; imaginemos ahora que por di-

cho punto pasa un rayo luminoso, el cual, prolongado hacia la parte posterior del punto da el rayo de sombra; la intersección de éste con el prisma será con evidencia la sombra que buscamos. Es, pues, esta cuestión igual á aquella de Geometría descriptiva, cuando se trata de encontrar la intersección de una recta con un prisma. En su virtud, hagamos pasar por la recta R un plano cualquiera, que para mayor facilidad escogeremos aquel que la proyecta verticalmente, y cuya traza vertical se confunde con la R^v. Búsquese luego la intersección de este plano proyectante auxiliar con el prisma P; esta intersección la tenemos proyectada verticalmente en la recta $b'f'$ y horizontalmente en el polígono $bcefd$. En este estado, sabemos que el rayo luminoso y este polígono, encontrándose ambos en un mismo plano secante, se cortarán en un punto $s - s'$, éste será precisamente la sombra que se busca.

32. Sombra del punto sobre la Esfera.—El punto es el $a^v a^h$ (fig. 28), mientras que la esfera es la que está proyectada en los dos círculos máximos $E^v - E^h$; considerando ahora el rayo luminoso que pasa por dicho punto, aquél originará su respectivo rayo de sombra $R^v R^h$, y la intersección de ésta con la esfera nos dará finalmente el punto de sombra que buscamos, cuya se encuentra en $s' - s$; es pues sencillamente la resolución del problema, que tiene por objeto averiguar la intersección de una recta R con una esfera E. A este efecto hágase pasar por R el plano vertical que la proyecta horizontalmente, este plano cortará á la esfera según un círculo menor, proyectado horizontalmente según la recta cd; es sabido ahora que dicho círculo y la recta, estando situados en un mismo plano, se cortarán, dándonos con ello en el punto de intersección el resultado que queremos. Mas al objeto de llevar á cabo dicha operación, rebátase sobre el plano horizontal el plano vertical proyectante $a^h m^h$; en esta operación el punto a del espacio se rebatirá en a', en una altura $a^h a'$, igual á la que exista desde el punto a^v, á la línea de tierra LT, del mismo modo el centro o^h vendrá á colocarse en ω á una distancia ωn de la charnela, igual á la altura de o^v para con respecto á LT; si ahora con el radio $nd = \frac{1}{2} dc$, trazamos la circunferencia fes_1, ésta será rebatida la circunferencia que limitará al círculo menor á que antes nos hemos refe-

rido; y, finalmente, teniendo en cuenta que $m^v - m^h$ repr senta la traza horizontal del rayo de sombra, y que aqué queda fija cuando se efectúa el rebatimiento, puesto que es situada en la charnela, tendremos que uniendo a' con m^h recta que así resulte será el rebatimiento del rayo de so bra, cuyo cortando en s_1 al círculo ef nos dará con el pur de encuentro el resultado que apetecemos. Ahora colóque este punto s_1 á su debida posición, y así vendrá proyecta horizontalmente en s y en el plano vertical en s' sobre el me cionado rayo de sombra. Infiérese, pues, que el punto s — es la sombra del punto a sobre la esfera E. Obsérvese q bajo el punto de vista geométrico obtendríamos un segun punto de intersección de la recta con la esfera, cual sería punto z del rebatimiento, mas si consideramos que este s gundo punto, si bien está situado en la esfera, viene coloca hacia la parte posterior opuesta á la luz, de aquí es que en concepto del problema de sombra este punto no tiene ap cación.

33. Sombra del punto sobre un hiperboloide de rev lución.—Con análogo procedimiento que el del caso anteri podríamos resolver esta cuestión, esto es, echando mano de plano, proyectante del rayo de sombra, buscando luego intersección de este plano con el hiperboloide de una hoj cual sería una cónica, y finalmente, la intersección de esta c nica con el rayo de sombra daría el punto que satisfaría á cuestión. Mas preferimos otro procedimiento al objeto de e tar el trazado de la curva de sección. Sea, al efecto, en fig. 29, a^v-a^h el punto considerado, $a^v t'$-$a^h t$ el rayo de so bra, la vertical proyectada horizontalmente en o el eje d hiperboloide, oc el radio del círculo de garganta, y vd, v' una generatriz del hiperboloide colocada en disposición par lela al plano vertical. Imaginemos ahora el punto m-m' que el rayo de sombra encuentra al plano del collarino, im ginemos luego que la vertical m-$m'q$ es el eje de un co recto engendrado por la revolución del rayo de sombra n el cual pasa constantemente por el vértice m-m' de dic cono. En este movimiento el punto t de traza describirá circunferencia base de este cono, del cual consideraremos nueva posición mt''-$m't'''$ que adquiere la generatriz dispues paralelamente al plano vertical. En este estado recordem y hagamos uso del siguiente teorema: *La intersección*

*dos cuádricas de revolución cuyos ejes son paralelos y cuyos dos centros determinan una recta perpendicular á los ejes de la rotación, se proyecta en un círculo sobre todo plano perpendicular á dichos ejes.**

Partiendo pues de este teorema bastará tan sólo encontrar un número muy reducido de puntos de la intersección, tres por ejemplo, y por ellos hacer pasar una circunferencia en proyección horizontal, y entonces la intersección de ésta con la proyección horizontal del rayo de sombra dará el punto que deseamos. Encontremos, pues, esta línea de intersección que se proyecta según un círculo; á este efecto echemos mano de un plano secante horizontal P, este cortará al cono según un círculo 1-1-1, y al hiperboloide según otro círculo 2-2-2, los círculos 1, 2 se cortarán dándonos los puntos x, u, por ellos pasará el nuevo círculo que buscamos; para obtener más puntos recúrrase á otro plano secante Q, éste también nos cortará al cono según el círculo 4-4-4 y al hiperboloide según el otro círculo 3-3-3, y ahora á su vez los círculos 3 y 4 se cortarán en los puntos y z; y con esto hágase pasar un círculo por los puntos u, x, y, z, y éste será con evidencia la proyección horizontal de la curva que produce al cortarse el cono con el hiperboloide. Finalmente la intersección s^h-s^v de este círculo con el rayo de sombra será definitivamente la sombra arrojada del punto a con el hiperboloide.

Obsérvese que al encontrar el centro del círculo de la proyección horizontal de la curva de intersección, este centro V ha de encontrarse forzosamente sobre la recta mo y que, por lo tanto, bastará encontrar tan sólo dos puntos tales como u, y que obedezcan á dos planos distintos como P, Q.

---

* Tómese por plano coordenado xoy, el que pase por los centros y perpendicular á los ejes de las superficies de revolución; entonces las ecuaciones de estas últimas, y dando á z^2 el mismo coeficiente serán:

$$a^2(x^2+y^2)+z^2+bx+cy+d=o$$
$$a'^2(x^2+y^2)+z^2+b'x+c'y+d'=o$$

Aquí los términos x^2, y^2 tienen necesariamente el mismo signo; y z viene afectada tan sólo en la segunda potencia, toda vez que el plano que pasa por el centro es de simetría para con respecto á las dos superficies.

Queriendo ahora la proyección de la línea de intersección, sobre el plano indicado xy que en este nuestro caso es un plano horizontal, y que cumple, por lo tanto, el enunciado del teorema; claro está que si queremos expresar la ecuación de dicha línea sobre el referido plano tendremos necesidad de eliminar la z^2 entre las dos ecuaciones anteriores, y así efectuada ya esta operación resulta la ecuación siguiente,

$$(a^2-a'^2)(x^2+y^2)+(b-b')x+(c-c')y+d-d'=o$$

ecuación del círculo.

34. Sombra de la recta.—La recta es la expresada e sus proyecciones por A^v-A^h. (fig. 30). Sabiendo determinar l sombra del punto, será fácil encontrar la de una recta po quedar ésta completamente determinada tomando en conside ración sus dos puntos extremos, que aquí son los *a* y *b*. Co este motivo tracemos por cada uno de estos puntos un ray de sombra, y como nos proponemos encontrar la sombra d esta recta sobre los planos de proyección, de aquí es que pa semos á deducir desde luego las trazas de aquellos rayos d sombra, y así estas trazas horizontales resultan ser las a^s para el primer punto y *t* para el segundo, siendo pues dicho a^s, *t* las sombras respectivas de los dos puntos extremos únanse desde luego, y la recta que así resulte será la sombr arrojada sobre el plano horizontal. Sin embargo, esta sombr vemos que corta en el punto *m*, á la línea de tierra, y eso y de por sí nos indica que el trecho *mt* cae hacia la part opuesta del plano vertical el cual se supone opaco y, por l tanto, aquel segmento *mt* será inservible como á resultado pero, en cambio, el trecho de recta $m'b^v$ que lo originaría s no se opusiera á la marcha de los rayos luminosos, el plan vertical de proyección, dará ahora sombra arrojada sobr este último, de cuya sombra *m* es el primer punto; y e cuanto al último será fácil deducirlo en b^s por estar originad por la traza vertical del rayo de sombra que parte del punto b^v-b^h.

35. Sombra de una recta perpendicular al plano vertical.—Sea (fig. 31) la recta proyectada verticalmente e el punto A^v, y en el plano horizontal por la recta A^h perpendicular á la línea de tierra, el rayo luminoso es R^v-R^h. Tien una disposición muy especial esta recta en el espacio, par con respecto á la sombra que se desea encontrar, disposició que hemos de tener muy en cuenta, atención hecha á lo frecuente que tiene lugar en las aplicaciones. Tamaña disposición consiste en confundirse la sombra de esta recta relativa al plano vertical, con el mismo rayo de sombra que parte de punto en que se proyecta la recta verticalmente, siendo, po lo tanto, en la fig. 31 A^v-a^s la sombra de esta recta limitada en a^s traza vertical del rayo luminoso extremo *ab*. La razón de semejante modo de resultar las cosas es clara y obvia siendo la recta A perpendicular al plano de proyección vertical, todos los rayos luminosos que rasen por ella, formarán

un plano perpendicular al plano vertical, de donde se infiere que, como en planos que afecten semejante disposición, todo lo que esté en ellos contenido, vendrá en la proyección confundido en la misma traza vertical del plano, se inferirá que todos aquellos rayos obedecerán á la misma ley, proyectándose verticalmente confundidos en uno solo cual es la traza vertical del plano considerado.

36. Sombra de una recta sobre un plano cualquiera. — Tenemos la recta *ab* (fig. 32) y el plano P, siendo R la dirección de los rayos luminosos, deseándose ahora buscar la sombra arrojada de aquella recta sobre el plano referido. Ante todo, observemos que todos los rayos de sombra que pasen por los puntos distintos de la recta, formarán un plano, el cual, encontrando al dado P, proporcionará una recta de intersección, la cual contendrá las distintas sombras arrojadas de los puntos que constituyen la recta dada. Resuélvese, pues, este problema, de igual modo que el que tiene lugar en Geometría Descriptiva, al hallar la intersección de dos planos. Determínese, pues, el plano de sombra de la recta, y, para ello, por un punto de la misma tal como el *b* hagamos pasar un rayo de sombra, trácese luego el plano Q que determina este rayo R y la recta *ab*; encuéntrese la intersección de los planos P y Q la cual vendrá expresada en *mn*, *m'n'*; y ya una vez esta obtenida, se limitará en los puntos que venga á estar encontrada por los rayos luminosos que pasen por los puntos extremos *a* y *b* de la recta en cuestión, de este modo habremos concluído el problema siendo el resultado la sombra $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$.

37. Sombra de rectas sobre una porción de peldaños. Sombra interrumpida ó quebrada.—En la fig. 33 se representa una serie de peldaños, los cuales están destinados para recibir la sombra arrojada de dos rectas que parten de un mismo punto a^v a^h, siendo la primera la vertical Aa^h, y la segunda la expresada por $B^v B^h$; dándonos el rayo luminoso en la dirección $R^v R^h$.

Para con respecto á la primera recta A se observará que todos los rayos luminosos, al rasar por ella, formarán un plano vertical, por lo que, todo lo que en él esté contenido se proyectará horizontalmente, confundiéndose con la misma traza horizontal del plano, y de aquí es que se comprenda

perfectamente que al querer hallar las trazas horizontales de todos los rayos luminosos, estas trazas ó puntos de sombra, de los escogidos en la recta vertical, vengan precisamente dirigidos en una sola recta $a^h q$ confundida con el mismo rayo luminoso R^h. Mas, con respecto á la sombra sobre el plano vertical, ésta se compondrá de varias partes producidas por la intersección de los planos verticales, uno el proyectante $a^h q$ y los otros los verticales 1 - 1, 2 - 2, 3 - 3 que constituyen las distintas alturas de los peldaños, así la intersección con el primer peldaño, nos dará la vertical m - M, con el segundo la vertical n - N... y así los demás hasta cortar al plano vertical de proyección según la vertical a^s A''.

En cuanto á la otra recta B, se determinará, por partes, del modo siguiente. Como quiera que el punto b es traza horizontal, se infiere que de este punto partirá la sombra arrojada sobre el plano horizontal de proyección; mas, para encontrar otro punto, trácese un rayo de sombra que pase por un punto cualquiera de la recta tal como el c, viniendo á encontrar su traza horizontal en el punto t^h; ahora la recta $b^h t^h$ será la sombra arrojada pedida, pero que no más aprovecharemos hasta el punto d^h en que encuentra á la traza horizontal del plano vertical del primer peldaño. Mas, á partir de este punto $d^h d^v$, la sombra de la recta cae arrojada en $e^v d^v$ sobre el plano vertical del peldaño 1 - 1; para encontrarla téngase en cuenta que el punto m - m' es el de intersección del rayo de sombra que pasa por $a^v a^h$ con el plano vertical 1 - 1; luego, uniendo m' con d^v, se obtendrá la recta $m'd^v$, de la cual aprovecharemos no más el trecho que media en $e^v d^v$, con efecto, ésta será la recta que proviene de la intersección del plano de sombra con el plano vertical 1 - 1 de peldaño. A partir del punto $e^h e^v$, la sombra de la recta cae arrojada sobre el plano horizontal de huella del primer peldaño, dándonos con ello la sombra en $e^h g^h$ paralela á la anterior que habíamos encontrado en $b^h d^h$, puesto que se trata de dos planos paralelos cortados por un tercero. Al llegar en el punto g^h la sombra cae arrojada sobre el plano vertical 2 - 2 del segundo peldaño, dándonos con ello la recta $g^v i^v$ paralela á la anterior encontrada $e^v d^v$ y esto por las mismas razones anteriores; mas al llegar al punto $i^h i^v$, la sombra cae arrojada sobre el plano horizontal de huella del segundo peldaño, dándonos, como anteriormente, una recta $l^h i^h$ paralela á la $b^h d^h$, y así sucesivamente iríamos razonando hasta encontrar finalmente al último trecho $a^s x^v$ que cae arrojado sobre el plano de proyección vertical, concluyendo con este trecho la sombra arrojada, la cual, y en virtud de componerse de varias partes por recibirla varios planos á la vez, es porque se la denomina *quebrada* ó *interrumpida* conforme lo era también la de la fig. 30.

38. Sombra de una recta sobre una superficie cónica. —Aquí suponemos que la luz está dada por un foco luminoso á distancias finitas, esto es, luz artificial; con esto los rayos luminosos, todos convergerán hacia el punto $F^v F^h$ (fig. 34). La recta de que se trata es mn - $m'n'$, mientras que el cono es de vértice V - V' y su base una línea cualquiera *abef*; la línea de sombra que se trata de encontrar sobre la superficie cónica, habiendo de ser producida por la intersección de ésta con todos los rayos luminosos que resbalan por la recta dada, se inferirá que estando todos aquellos en un mismo plano determinado por la recta mn y el foco F; que las operaciones para encontrar aquella línea de sombra, quedarán reducidas al problema de G D. que tiene por objeto encontrar la intersección de un plano con un cono. Así propongámonos que se trata de determinar la intersección del plano dado por la recta y el foco, con una generatriz de la superficie, por ejemplo la V'e' - Ve y para ello hagamos pasar por esta generatriz el plano V'$e'e$ que la proyecta verticalmente; encuéntrese ahora la intersección de este plano con el que pasa por la recta dada y el foco F; y como quiera que la situación de este último plano es tal que sus trazas aparecerían incómodas en nuestro dibujo no cortándose dichas trazas en los límites del papel; echaremos mano de dos rectas contenidas en este plano, por ejemplo, la dada y la que representa el rayo luminoso que pasa por m'; así dispuestas las cosas, vemos que la primera recta corta al plano proyectante de la generatriz en el punto $\gamma'\gamma$ y la segunda en el punto $l'l$, resultando con ello que la recta que resulta $l\gamma$ será la intersección de los dos planos, la cual encuentra, á su vez, á la generatriz Ve en el punto u proyectado verticalmente en u'; el cual es visiblemente ya la sombra sobre el cono del punto n' obtenido este n' haciendo pasar el rayo luminoso $F^v u'$ por el punto encontrado u'. Igual operación repetida para otra generatriz nos daría nuevos puntos. Mas habrá ciertas disposiciones en los rayos luminosos que se prestarán quizá, con ventaja, á

encontrar con más facilidad dichos puntos, empleando un medio más directo. Escojamos por ejemplo el rayo luminoso $F^v m'$ - $F^h m$ proponiéndonos ahora encontrar la intersección de este rayo luminoso con el cono; esto es, cuestión inversa á la anterior en la cual éramos árbitros de escoger la generatriz que quisiéramos y venir á encontrar el rayo luminoso que le correspondía, mientras que ahora partimos del rayo luminoso, y nos proponemos encontrar la generatriz á la cual hiere en el mismo punto de sombra. Para esto si trazamos por el vértice VV' una recta $V'\alpha'$ - $V\alpha$ paralela al rayo luminoso que pasa por m - m', estas dos rectas paralelas determinan un plano que pasa por el vértice del cono; de modo, que si aquel corta á éste lo hará forzosamente según una generatriz, de modo que estando ésta y el rayo luminoso en un mismo plano, habrán de cortarse, y este punto de intersección, con evidencia será el de sombra que buscamos. Hágase, pues, pasar un plano por estas dos rectas paralelas, y encontraremos que su traza horizontal será $\alpha\delta$ cual prolongada corta en el punto b - b' á la curva base del cono, infiriendo de aquí que la generatriz bV - $b'V'$ es aquella por la cual el cono viene á ser cortado por el plano; y, finalmente, el rayo luminoso del cual hemos partido y que pasa por el punto, m - m' viene á cortar á la mentada generatriz en el punto x-x', el cual es el punto de sombra. Estos dos métodos, convenientemente combinados, según sea la disposición de la generatriz que se escoge si partimos de una de éstas, ó del rayo luminoso que se elija si preferimos partir de ellos, irán dando sucesivamente todos los puntos de la curva xu, cual constituye la sombra arrojada de la recta sobre la superficie cónica.

39. Sombra de una recta sobre un elipsoide de revolución.—Razonando, como en el caso anterior, pero viniendo dada aquí la luz por rayos paralelos vendremos á la conclusión de que la sombra que se busca será el resultado de la intersección del elipsoide con el plano de sombra; sea, en efecto, la fig. 35, en donde E^v E^h expresa el elipsoide; A^v A^h la recta y R el rayo luminoso, si escogemos un punto a^v a^h sobre la recta dada y hacemos pasar por él un rayo luminoso, éste y la recta A determinarán el plano secante aludido cuyas trazas respectivas son V^P H^P. Sabido es que si echamos mano ahora de un plano secante tal como Q, éste nos

cortará al plano P según una horizontal, al elipsoide según un paralelo, y como quiera que dicha horizontal y el círculo del paralelo se cortarán en los puntos tales como b, c, éstos serán ya puntos de la curva de intersección; así es que repitiendo esta operación tantas cuantas veces se quiera, se obtendrán todos los puntos de la curva. Este modo de proceder es general y se aviene á cualquiera de las superficies de revolución que se escojan; más, aquí, en nuestro caso particular de ser un elipsoide la superficie del dato, resulta ser más racional tratar el problema según la índole de esta superficie; así ya, desde luego sabemos cual será la curva que nos va á producir el corte del plano con el elipsoide: será una elipse, y esta, visiblemente, podrá construirse inmediatamente con sólo disponer de sus ejes ó dos de sus diámetros conjugados. Con tal motivo, observemos que á cada operación efectuada con el procedimiento anterior de los planos secantes tales como Q se han obtenido los dos puntos tales como bc que unidos dos á dos nos iban dando una serie de cuerdas paralelas y horizontales del mencionado elipsoide, cuales contenidas también en el plano secante, resultaban todas ser perpendiculares á la línea de máxima pendiente m' O—cm de dicho plano. Con ello resulta, que dicha línea de máxima pendiente será un eje de la elipse en el espacio, y continuará siéndolo en proyección horizontal, toda vez que allí las cuerdas mencionadas persisten siendo perpendiculares á la línea de máxima pendienie m'J; nada más fácil, pues, que el encontrar los vértices de la curva, situados en este eje, con sólo proceder á la intersección de la línea de máxima pendiente m'J, mJ', con el elipsoide. A este efecto, giremos todo el plano vertical proyectante m'J, en torno del eje vertical proyectado en O, hasta que se coloque paralelo al plano de proyección vertical. Después del giro, el punto m, se traslada en m''—m''', y como el O—c, es fijo, la recta $m'''c$, será la línea de máxima pendiente, paralela ahora al plano vertical; más, de otra parte, el plano meridiano m'J, cortando al elipsoide según una elipse meridiana, ésta vendrá en el giro á confundirse, con la elipse meridiana principal. Ahora esta meridiana y la $m'''c$, se cortan en los puntos, φ y ξ, cuyos puntos trasladados, á la posición que les corresponde, al deshacer el giro, se colocarán definitivamente en f'—f, g'—g, siendo la proyección fg, el eje en el plano horizontal y la $f'g'$, un diámetro en el plano vertical. Buscando ahora el punto

medio ω'—ω, de esta recta, claro está, que, la perpendicular *hi*, á *g*, será la dirección del otro eje; de modo que para obtener su límite, bastará valernos, del plano secante horizontal Mω', el cual, insiguiendo con él, lo indicado con el Q, nos dará los puntos *h*, *i*, por lo tanto, la recta, *hi*, será el otro eje de la elipse en la proyección horizontal; valiéndonos, pues, de los ejes *fg*, *hi*, trácese directamente esta curva. En virtud de que en el plano vertical, no subsiste la perpendicularidad entre las rectas *f'g'*, *h'i'* resulta que en dicha proyección, estas rectas ya no serán ejes, y sí sólo diámetros conjugados, con las cuales también podremos trazar la elipse, valiéndonos de los distintos sistemas que se conocen, y en particular el de Mr. Julienne. *

Sin embargo, como se comprende, no será aprovechable toda la curva, bajo el punto de vista del problema de sombra de que se trata, pues sólo quedará concretada al trecho exclusivo $\alpha g' q \beta$ en proyección vertical y en el $\alpha' g \delta \beta'$, en proyección horizontal, cuyo trecho quedará demarcado trazando á la curva encontrada tangentes, que sean paralelas al rayo luminoso; estas tangentes son aquí las αb^v - $\alpha' b^h$, βa^v - $\beta' a^h$, y como quiera que estas rectas cortan á la dada A en los puntos $a^v a^h$, $b^v b^h$, resulta de ello que el único segmento de la recta A que cae arrojado sobre el elipsoide es el trecho $a^v b^v$, $a^h b^h$, cuyo es el que produce la sombra curvilínea antedicha.

Resuelta ya la cuestión podríamos proponermos para el mejor trazado de la curva, buscar puntos notables de ella; así ya hemos visto que los *f'* y *g'* tenían la propiedad de que al pasar por ellos la curva, la tangente había de ser horizontal, y, por lo tanto, eran los puntos más alto y más bajo.

Si echamos mano del plano vertical secante O*k'* paralelo al de proyección vertical, dicho plano cortará al elipsoide según el meridiano principal, y al plano P según la generatriz *kq*, la cual al cortar en *e* y *q* á dicho meridiano, nos da con ellos los puntos en que la curva pasa de vista á oculta en el plano vertical.

Empleando como á plano secante horizontal, el que contiene el mismo ecuador, este nos producirá al cortar al plano P una horizontal, que vendrá á cortar á la línea ecuatorial

* Véase este ingenioso procedimiento en nuestro *Tratado de Gnomónica*, página 193.

en los puntos γ, δ, cuyos serán los puntos en que la curva pase de vista á oculta en el plano horizontal.

Finalmente la tangente en un punto cualquiera de la curva se obtendrá combinando su plano con el tangente al punto considerado, así escogiendo el punto β, el plano tangente en este punto es el que tiene por traza horizontal H^s (determinado por la propiedad de que en toda superficie de revolución el plano tangente en un punto es perpendicular al plano meridiano que pasa por dicho punto), así es que siendo $\triangle$ $\triangle'$ la intersección de las trazas horizontales de estos planos resultará que la $\triangle$ β', $\triangle'$ β será la tangente que buscamos.

40. Sombra de un polígono.—Este polígono es plano y representando en la fig. 36, Lám. 3.ª, por el contorno *abcde*, *a'b'c'd'e'*, y su plano prolongado corta á los planos de proyección y nos da las trazas V^p H^p. El rayo luminoso es R^v R^h. Todo queda aquí reducido á ir encontrando la sombra de cada uno de los lados del polígono conforme se expuso en el párrafo 34 al tratar de la sombra de una recta. Así partiendo del punto *c* el rayo luminoso que por él pasa, encuentra al plano horizontal en el punto 3; es la sombra del punto *c*-*c'*. El rayo luminoso que parte del punto *d*-*d'* corta al plano horizontal en el punto 4, así es que la recta 4 3 es la sombra de la recta *dc*-*d'c'*. El rayo luminoso que parte del punto *e*-*e'* tiene por traza horizontal el punto 5, y por traza vertical el punto *q* (cuya traza vertical ahora emplearemos); con ello uniendo 5 con 4 la recta que así resulte será la sombra arrojada del lado *ed*. Mas si nos fijamos ahora en el punto *a* y consideramos en él, el rayo luminoso, éste encuentra antes al plano vertical que al horizontal, indicando, con ello, que la sombra de dicho punto viene arrojada en el plano de proyección vertical, en el punto 1, traza vertical del rayo luminoso; más como poco antes hemos indicado, el punto *q* sería la sombra del punto *e* en el plano vertical, dado caso que el de proyección horizontal no existiera, siendo, por lo tanto, la recta 1 *q* la sombra arrojada sobre el plano de proyección vertical del lado *ae*; sin embargo, este trecho de línea de sombra se aprovechará no más en el trozo que media de 1 á *n* en donde corta la línea á la de tierra, puesto que á partir del punto *n* la sombra caerá arrojada en el plano horizontal en la recta que une el punto *n* con el punto 5, apareciendo con ello línea interrumpida puesto que la *n* 5 tiene por originaria

á la *en'*, y la *n* 1 proviene de *n'a*. Análogamente veremos que la sombra de la recta *ab-a'b'* cae toda arrojada en 1-2 sobre el plano vertical y, finalmente la *bc-b'c'* cae en parte arrojada en 2*m* sobre el plano vertical y en *m*3 en el plano horizontal, cerrando en el punto 3 el contorno de la sombra del polígono. La línea 2*m* se ha encontrado recurriendo á las trazas verticales 2, *k*, de los rayos luminosos que parten de los puntos *b-b'*, *c-c'*.

Existe en estas construcciones, una particularidad muy notoria, por la cual, puede comprobarse el resultado, y proceder desde luego, á su rectificación, caso de haber incurrido en algún error. La propiedad á que nos referimos consiste en cada línea de sombra tal como, por ejemplo, la 4-3 del plano horizontal va á cortarse con la proyección horizontal *dc*, de la que la origina en el espacio, precisamente en un punto *f* de la traza H^p del plano que contiene al polígono, esta singular concurrencia ha motivado que se llamen *afines*, los polígonos de sombra arrojada con el de la proyección homónima, al del plano donde se considera esta sombra. siendo esta proyección correspondiente al polígono originario del espacio.

Compréndese perfectamente que así tenga lugar semejante propiedad; no hay más que tener en cuenta, que al rasar todos los rayos luminosos, por los lados del polígono, se forma en el espacio un prisma oblicuo paralelo á la dirección de los rayos luminosos; y, por lo tanto, para cada lado del polígono, existirá una cara del prisma; ahora bien: Una cara de este prisma, por ejemplo, la *d-c*-3-4, el plano P, que contiene el polígono dado y el plano de proyección horizontal, forman en el espacio un ángulo triedro, cortándose precisamente en un punto que es el vértice de dicho triedro; y como quiera que el plano horizontal es aquella de las tres caras que recibe las trazas H^p y 4-3 de los otros dos planos, resulta que la tercera arista que es *dc*, ha de pasar forzosamente por *f*, vértice del triedro, dado por la intersección de H^p y 4-3.

De otro modo, si se quiere podemos argüir, para demostrar que tal sucede, y para ello no hay más que recordar que la tangente en un punto á la línea de intersección de una superficie con un plano, vendrá determinada por la recta de intersección que producen al cortarse el plano secante y el tangente en el punto considerado; ahora bien, en nuestro caso de la fig. 36;

el cuerpo que se considera es el prisma oblicuo de los rayos luminosos, y de él, el punto *d*, ó *c*, ó, si se quiere, también el *dc*, considerado como elemento, puesto que pertenece á la cara de un prisma, y por lo tanto plana; el plano tangente se confunde aquí con la misma cara del prisma, siendo por lo tanto *d-c*-3-4, cuya traza horizontal, es la línea de sombra 3-4, y por último el plano secante, es el mismo que contiene el polígono dado y cuya traza hemos convenido en llamar H^p, luego infiérese de aquí, que el punto *f*, intersección de dichas dos trazas, pertenecerá, á la intersección de los dos planos, y como *c* ó *d* ya es uno de los puntos del dato, por donde aquella intersección ha de pasar, resultará que por la inversa la *dc*, prolongará, pasará por el punto *f*. La recta ó traza H^p, en donde se verifican dichos encuentros en *f*, *g*... etc., se la conoce por *eje de afinidad* de los polígonos de sombra arrojada y de proyección, ambos considerados en el plano de proyección horizontal.

Del propio modo la traza vertical V^p, es el eje de afinidad de los polígonos de sombra arrojada y de la proyección, considerándola ahora sobre el plano vertical; y, por lo tanto, allí tienen lugar los encuentros en los puntos *h*, *i*, etc.

Del propio modo veríamos que la *línea de tierra*, es el *eje de afinidad*, para con respecto á los polígonos de sombra arrojada, que corresponden al plano de proyección vertical, y al plano de proyección horizontal, allí se verifican los encuentros en puntos tales como *m*, *n*, etc., dándonos, con ellos, los puntos en donde se interrumpe, la sombra de una recta, cuando parte de ella cae arrojada en un plano y parte de ella en el otro.

41. Sombra de un círculo horizontal.—El círculo está contenido en el plano A'B' (fig. 37), su centro es el punto O-O' y su radio AO, proyectándose, según esto, la circunferencia, que encierra dicho círculo, en verdadera magnitud en ADBC. La dirección de los rayos luminosos es R^vR^h. Los rayos luminosos que bordean el contorno de la circunferencia, forman evidentemente en el espacio un cilindro oblicuo, paralelo á la dirección R^vR^h, y como al proponernos encontrar la sombra arrojada de dicha curva sobre los planos de proyección, habremos de ir encontrando sucesivamente las trazas de los rayos luminosos, ya sea en el plano vertical, ya sea en el horizontal, según sea aquel en donde encuentren

primero dichos rayos de luz; de aquí que este asunto, sea igual al que se propone la G D, cuando se ocupa de la sección de un cilindro con un plano. Veamos, pues, ante todo, si hay sombra arrojada sobre el plano horizontal; aquí que el plano secante al cilindro de los rayos luminosos, es paralelo al plano de la base A'B' resultará que la sección que el plano de proyección horizontal produzca, será otro círculo exactamente igual al originario ADBC, resultando con ello, que bastará conocer tan sólo su centro; éste, como es natural, obedecerá á la sombra que arrojaría el punto O-O', sobre el plano horizontal, dado que este punto lo considerásemos aislado; á este fin, encuéntrase la traza horizontal del rayo luminoso que pasa por O-O', y ella la encontraremos en ω', hágase, pues, centro en él, y con un radio igual al AO, descríbase una circunferencia, aprovechando tan sólo de ella el segmento *mnδ*, que cae anteriormente del plano vertical, pues lo restante encontrándose detrás de dicho plano, y éste supuesto opaco, no permitirá el paso de los rayos luminosos, y será él mismo que recibirá la sombra complementaria.

Mas ahora el plano secante siendo el vertical que aparece oblicuo al con respecto al cilindro de los rayos luminosos, cortará á éste según una elipse, y ésta podrá construirse por puntos, averiguando la sombra sobre el plano vertical de cada uno de estos, tal como, por ejemplo, el A, cual produce su sombra en *a*, por medio de la traza vertical del rayo luminoso que por él pasa. Sin embargo, es más lógico y breve, ya que de antemano se conoce la índole de la curva, construirla valiéndonos de sus propiedades. Así observemos que el diámetro CD-O', siendo perpendicular al plano vertical su sombra (35), *cd*, vendrá confundida en el plano vertical con la proyección vertical del rayo luminoso que pasa por el punto D ó C, proyectado en O' lo propio inferiríamos de las rectas *1'-3'*, *2'-4'*, tangentes á la circunferencia y perpendiculares al plano vertical, las cuales su sombra viene en dicho plano á arrojarse en *1-3*, *2-4*. Más, por otra, parte el diámetro AB y las tangentes *1'-2'*, *3'-4'*, siendo paralelas al plano vertical, quedarán allí arrojadas en su sombra según las *1-2*, *ab*, *3-4*, esto es, en rectas horizontales, iguales y paralelas á sus originales, así, pues, el paralelógramo *1-2-4-3*, vendrá á constituir la sombra arrojada del cuadrado *1'-2'-3'-4'*, y así como éste tenía inscrito el círculo, aquél circunscribirá á la elipse, siendo las transversales *ab*, *cd*, del paralelogramo los diá-

metros conjugados de la elipse de sombra, y con el auxilio de ellos podremos ya construir dicha curva en *adbc*, la cual, como es sabido, será tangente en *a*, *d*, *b*, *c*, puntos medios de los lados de dicho paralelógramo; siendo los lados *1-2*, *3-4*, horizontales, resultará que los puntos *c*. y *d*, serán los más alto y bajo de la curva elíptica; en los puntos *f*, *g*; las tangentes serán verticales; pues pueden considerarse, la intersección del plano de proyección vertical, con planos tangentes al cilindro luminoso, y al mismo tiempo verticales, correspondientes á las generatrices que parten de los puntos F y G.

De la elipse que así resulte, claro está, que será aprovechable todo el trecho comprendido *mafchbn*, situado encima la línea de tierra, obedeciendo los puntos de deslinde *m*, *n* á los del espacio proyectados en M y N.

42. Círculo situado en un plano de perfil.—El plano de perfil es V^p H^p (fig. 38), el rayo luminoso se supone inclinado á los 45° para con respecto á sus proyecciones con la línea de tierra, mientras que el círculo viene proyectado verticalmente según el trecho AB de la traza vertical del plano y en CC' horizontalmente sobre la traza horizontal de dicho plano; y se parte del supuesto que toda la parte correspondiente á este círculo está hueca, como si fuese una abertura circular que perfora el plano P, permitiendo con ello pasar libremente los rayos luminosos. La circunferencia que limita este círculo arroja su sombra combinada, ya en el plano horizontal ya en el vertical, produciéndose de este modo dos elipses distintas, producidas por las intersecciones de cada uno de los planos de proyección mentados, con el cilindro de los rayos luminosos que rasan por la abertura circular. Siendo pues elipses las curvas de sombra, podremos trazarlas fácilmente con el auxilio de sus diámetros conjugados, que aquí es el caso más expedito; así, para la parte arrojada sobre el plano horizontal, empiécese por determinar el punto O' que obedece al centro de la elipse correspondiente, cuyo punto es traza del rayo luminoso que pasa por el centro O-A' del círculo dado: conforme á lo expresado en el párrafo (N.° 20-2.°) este punto se ha determinado, tomando la altura OM, del punto original, colocándola desde A' á *r*, y volviendo á colocar esta magnitud en *ro'*, en sentido perpendicular á la primera. Si ahora se observa que existe en la circunferencia un diámetro

horizontal CC'-O, éste por ser paralelo al plano de proyección horizontal se proyectará en su sombra, en la misma disposición é igual que el primero; mediante esta observación no habrá más que hacer pasar por O' la recta γγ' paralela á CC' tomando superior é inferiormente desde O' las distancias O'γ, O'γ' iguales al radio A'C, la recta γγ' será con evidencia un diámetro de la elipse, en cuanto á lo que se refiere al segundo diámetro tiene por originario el diámetro vertical A'-AB, del círculo dado y con ello será evidente que su sombra sobre el plano horizontal, quedará confundida con la traza horizontal A'*o'* del plano vertical que por él pasa, y que es paralelo á los rayos luminosos, así pues bastará definirlo ya que su dirección se tiene desde luego y sea encontrar el punto inferior B-A'; tómese pues al efecto la altura BM, colóquese desde A' en *n* para volverla luego á colocar en ángulo recto en *n*δ', el punto δ' será la sombra del B-A' y por lo tanto habrá de coincidir con un punto de la recta A'*o'*, colóquese *o'*δ' en la misma dirección pero en sentido opuesto en *o'*δ', y entonces la recta δδ' que así resulte será el segundo diámetro conjugado. Ahora con el auxilio de estos dos diámetros constrúyase el paralelógramo 5-6-7-8 el cual como es sabido encerrará la elipse que buscamos, cuya tendrá cuatro tangentes con los lados de dicho paralelógramo hallándose los puntos de tangencia en los medios de dichos lados, ó sean si se quiere extremos de los diámetros referidos.

Mas ahora es evidente que esta elipse no será toda aprovechable pues parte de ella, la *x*γδ*y*, cae hacia la parte posterior del plano vertical; por lo tanto á partir de los puntos *x*,*y*, el resto de la sombra arrojada la recibirá el plano vertical, y allí por lo tanto hemos de volver á efectuar operaciones análogas á las primeras para encontrar la elipse que á dicho plano concierna; así para encontrar la sombra que correspondería á su centro, tómese la separación A'M que existe del centro al plano vertical colocándolo en altura en O*r* (párrafo 20-2.°), trazando luego la perpendicular ro_1, igual á la expresada *r*O, o_1 será el centro de modo que trazando por él la vertical *ab* igual á la AB aquélla representará la sombra de la última y por lo tanto será un diámetro de la nueva elipse; en cuanto al otro diámetro *cc'* tendrá por originario el diámetro horizontal del círculo que se proyecta en O, y por lo tanto siendo perpendicular al plano vertical su sombra se confundirá con la misma dirección de los rayos luminosos, basta pues encontrar un punto extremo de este diámetro, y para ello tómese la separación MC', del punto C' al plano de proyección vertical colocándolo en altura en O*n*, y luego sobre la perpendicular *nc*, entonces la *c*O_1 será el segundo diámetro, tomando como se supone en la dirección del mismo la distancia O_1c' igual á O_1c. Ahora con el auxilio de los diámetros *ab*, *cc'*, y considerados como transversales de un paralelógramo, puédese construir éste en 1-2-3-4, cuyo servirá para el trazado de la elipse de la cual dispondremos de dos diámetros y cuatro tangentes, aprovechándose de la misma la parte superior *xc'ay*, para con respecto á la línea de tierra, ya que el resto se encuentra debajo el plano horizontal, hacia donde no alcanzan los rayos luminosos.

43. Sombra de círculos, valiéndonos de la sola proyección vertical.—Tratamos aquí de aplicar el principio, que se expuso en el párrafo 20-2.°, al tratar de las ventajas que resultaban del empleo del rayo luminoso especial, cuyas proyecciones forman ángulos de 45° con la línea de tierra, deduciéndose además un sinnúmero de propiedades, que facilitan la resolución del problema, á la par que concurren á su rectificación si necesario fuere. Se trata aquí (fig. 39) de encontrar la sombra de tres circunferencias situadas en las tres disposiciones siguientes, la una en un plano de frente ó sea paralelo al plano vertical es la expresada é inscrita dentro el cuadrado 1-2-4-3, la segunda la contenida en el plano horizontal 1-2, é inscrita en el cuadrado es esta misma recta 1-2, y la tercera la que está situada en el plano de perfil, 1-3 é inscrita dentro el cuadrado construído sobre esta última recta; para facilitar la construcción, construiremos ante todo la sombra de los cuadrados circunscritos á estas tres circunferencias, así para el de frente, dando por supuesto que se conoce la separación del punto 1, al plano vertical, colóquese ésta, sobre la horizontal 1 K, construyendo enseguida el triángulo rectángulo isósceles 1 K1'. El punto 1', así obtenido, será la sombra del punto 1, y como el cuadrado original es paralelo al plano de proyección vertical, sobre éste vendrá arrojado en la misma disposición y magnitud, y así no habrá mas que trazarlo en 1'-2'-4'-3', con sus lados respectivamente paralelos al primero; inscríbase en él la circunferencia y ésta será la sombra de la que se ha dado de centro O.

Para el cuadrado horizontal, 1-2, el lado anterior ya tiene

expresada su sombra en 1'-2' y para el posterior, constrúyas el triángulo rectángulo isósceles 2K2'', en que 2-K, sea l separación de este lado posterior al plano vertical, entonce: la horizontal 2''-1'', será la sombra de dicho lado, únans finalmente 2'' con 2' y 1'' con 1' y se tendrá el paralelogram 1''-1'-2'-2'', sombra del cuadrado superior.

Trácense en él, las diagonales 1''-2', 2''-1', así como la transversales medias A''A', FE, estas últimas darán los punto de tangencia A'', A', E, F.

Nótese bien ahora, que las diagonales de este paralelo gramo; la una la 1'-2'', resulta ser vertical, y la otra 1''-2 inclinada á 45°, y que en esta disposición es muy fácil encon trar los puntos *r*, *q*, *s*, *t*, de la curva elíptica, al cortar dichas diagonales; en efecto, el punto *r*, es tal que cort á la semi-diagonal ω2'', de modo á establecer la relació $\frac{\omega r}{\omega 2''}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ * igual aproximadamente á 0'7, por lo qu dividiendo ω2'', en diez partes y tomando de ellas siete parte á contar desde ω, nos dará el punto *r*; á partir del cual, s podrá ya trazar una horizontal, que cortará en *q*, á la otr diagonal. También por *r* y *q*, trácense dos rectas á 45° cortando ellas á su vez á las diagonales hacia la parte infe rior, en los puntos *s* y *t*.

De otro modo podríamos encontrar la horizontal *qr*, co sólo, trasladar, por medio de un arco de círculo la semi-dia gonal ω2'', en ω*m* sobre la transversal media ωA'', conduciend por *m* dicha horizontal *qmr*. Se funda esta sencilla cons trucción, en que el triángulo *mr*ω rectángulo é isósceles, *m* representa la unidad, y por lo tanto, la hipotenusa *m*ω ser igual á $\sqrt{2}$, pero $\sqrt{2}$ hemos dicho que era igual á ω2 luego con hacer el traslado de esta distancia en ω*m*, se tendr el punto *m*.

En los puntos *q*, *t*, las tangentes son verticales, pues tiene que ser respectivamente paralelas al diámetro vertical 1'-2 que es conjugado, con 1''-2'. Por oposición las tangentes e

---

* No hay más que observar las relaciones de líneas análogas en la circunf rencia que tenemos de frente, en verdadera magnitud, en la que tomando al rad por unidad dará $\frac{O'\alpha}{O'2'}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

los puntos *r*, *s*, estarán melmadas á 45°, pues tienen que ser paralelas al diámetro *qt*, conjugado con el vertical *sr*.

Reasumiendo concluímos que para la sombra de esta elipse, contamos con ocho puntos y otras tangentes.

Para la elipse, situada en el plano vertical-lateral, 1-3, su sombra estará inscrita en el paralelogramo 1''-1'-3'-3'', construído inmediatamente con los lados 1''-1', 1'-3', de las operaciones anteriores. Una de las diagonales la 3''-1', resulta aquí ser horizontal, y la otra 1''-3', inclinada con la relación $\frac{2}{1}$.

Los ocho puntos y las ocho tangentes, se hallarán del propio modo que antes, pues son análogas las propiedades, distinción hecha no más de las variaciones que trae consigo, la posición diferente del círculo en el espacio, cuales son, que las tangentes de los puntos de cruce con una de las diagonales, en δ y γ, son horizontales, y las correspondiente á la otra diagonal, están inclinadas en la relación de $\frac{2}{1}$; de todos modos, la elipse de sombra que resulta, y que tiene el centro en ω' es exactamente igual á la de centro ω, y puede deducirse la primera de la segunda, con sólo imaginar que el plano horizontal 2''-1''-1'-2', gira al rededor de la charnela 1''-1', hasta colocarse confundiéndose en el plano vertical que representa el paralelogramo 1''-1'-3', 3''.

44. Caso particular de aparecer otro círculo, la sombra de un círculo.—Tal puede hallarse relacionado el plano que haya de recibir la sombra del círculo; para con respecto al plano de éste, al rayo luminoso, y á los planos de proyección, que efectivamente aparezca su sombra proyectada de una elipse de ejes iguales. Sea por ejemplo, fig. 37'. Lám. 3.ª, un círculo horizontal, *a'b'-acbd*, así como un plano vertical $V^P H^P$, pasando por el centro O-O', é inclinado de 45° con el plano de proyección vertical. Empleemos ahora, el rayo luminoso que formen sus proyecciones ángulos de 45° con la L-T; entonces la sombra de esta circunferencia, sobre el plano P será un círculo.

En efecto, fijémonos tan sólo, en los diámetros de la curva, el uno el *gh*, intersección del plano del círculo con el dado P; y el otro el *ef*, que le es perpendicular; si tratamos ahora, de proyectarlos, sobre el plano P, encontrando su

sombra, aquellos diámetros, se convertirán, en conjugados con la elipse de sombra; pero el gh es sombra de sí mismo, por estar situado, en el mismo plano P, y el otro será tal, que por emplear el rayo á 45°, y al determinar la sombra del punto e-e', formaremos el triángulo rectángulo isósceles $e'mo'$, luego la sombra del otro eje, que aparecerá en $o'm$, estará en ángulo recto con $e'o'$, y á más serán iguales, luego aquellos diámetros conjugados, aquí serán proyectados, verdaderos ejes de la curva, y ésta aparecerá en la proyección como un círculo.

Semejante caso, en extremo particular, será de gran ventaja aplicarlo, en algunas cuestiones que más adelante sobrevendrán, dando con ello pie, para facilitar al mismo tiempo la aplicación del método referente á las proyecciones oblícuas.

45. Sombra de un círculo, cuyo plano está inclinado de una manera cualquiera en el espacio.—Fig. 40. El círculo se nos dá, en proyecciones en la elipse de centro O-O', y en plano está referido á los de proyección, mediante las trazas V^P, H^P. Nos valemos aquí de luz artificial, suponiendo que F-F', es un foco luminoso. Observemos ante todo, que al rasar los rayos luminosos por la circunferencia que limita el círculo, ellos en junto, formarán una superficie cónica, y por lo tanto, la sombra arrojada del círculo sobre el plano horizontal, por ejemplo, será la intersección de dicho plano con el cono referido. Esta sección pues ha de ser una de las tres curvas de 2.º grado. Una simple inspección de la figura, relacionando el plano, con el cono, basta para conocer, cual de estas tres curvas: es la que resulte, aquí una elipse, pues de momento, vemos que no existe ninguna generatriz del cono que sea paralela al plano P; las cortará pues á todas, y obtendremos curva cerrada, y por lo tanto, una elipse. conociendo ya, la índole de la curva, sabemos que ésta permite construirse, en virtud de su índole especial, por medio de dos de sus diámetros conjugados, y por lo tanto, podemos aprovechar ya desde luego semejante ventaja.

A este efecto, observemos, que los puntos más alto y más bajo, de la elipse O-O', tales como d-d', c-c', (y que obedecen, al diámetro dc, que es á la vez línea de máxima pendiente con respecto al plano horizontal, del plano V^P), la tangente es horizontal, ó sea paralelas ambas á la traza H^P, y por lo tanto la sombra de ambas sobre el plano de proyección horizontal, será también paralela á dicha traza H^P; y con esto, una vez determinados c-c', d-d', busquemos sus respectivas sombras en C y D sobre el plano horizontal, valiéndonos de los rayos de luz $F'c'$, $F'd'$, y encontrando sus trazas horizontales; los puntos así obtenidos, se unirán ahora; y la recta CD, que así resulte, será la sombra de $c'd'$, cd; es pues CD un diámetro de la elipse de sombra que buscamos, su mitad Dω, nos dará el centro, y trazando por él, una recta paralela á H^P, es evidente que obtendremos así, la dirección del otro diámetro, que ha de ser conjugado con CD; encontremos pues ahora, sus puntos extremos.

Al efecto, condúzcase, por ω, el rayo luminoso ωF, ω_1F', encontrando su intersección con el plano P, este punto será el ω'-ω", el cual ha de encontrarse sobre la recta cd-$c'd'$, (porque parte de un punto de sombra de la misma recta original), ahora por este punto ω', es fácil conducir la cuerda $g'h'$, paralela á la dirección GH, lo cual nos proporcionará los puntos g', h', por los que trazando rayos luminosos, éstos irán á cortar en G y en H, al segundo diámetro determinándolo por completo. Estas construcciones se evidencian, observando, que la recta GH, por ser paralela á las tangentes en C y en D, ó si se quiere á la traza H^P, ha de ser sombra de una recta horizontal en el espacio. y por lo mismo esta recta original había de pasar por ω'-ω", y ha de tener la dirección $g'h'$ paralela, á su sombra, ó lo que es lo mismo paralela á la traza H^P, luego obtenidos por ella, los puntos originales, g', h', nada más fácil que encontrar enseguida su sombra, en G y en H.

Con el auxilio de estos dos diámetros, puédese construir el paralelogramo 1-2-3-4, dentro del cual podremos inscribir fácilmente la elipse, y dispondremos de cuatro puntos y cuatro tangentes.

Puede ahora si se quiere hacer algunas comprobaciones, para el mejor trazado de la curva; así en los puntos M y N, las tangentes han de ser perpendiculares á la línea de tierra, los cuales corresponden á las sombras de los puntos originales, límite del contorno aparente, en el plano vertical, cuales son los m y n, en los cuales, los rayos luminosos son tangentes á la circunferencia dada, pero en proyección vertical, á causa, de que el plano tangente al cono luminoso, en este punto, sitúa perpendicular al plano de proyección vertical, y

por lo tanto su traza horizontal μM, será perpendicular á la L de T, y á la vez tangente en M á la base del cono, ó sea la línea de sombra. Una vez en posesión de ésta, puédese para mayor exactitud construir sus ejes, pues sabido es, que si trazamos, valiéndonos del centro ω, un arco del círculo, $zz''z'$, que corte á la elipse, los dos puntos de sección z, z', unidos nos darán una cuerda, á la cual trazando una perpendicular desde ω, $\omega z''$, ésta será el eje mayor, y en cuanto al menor, lo tendremos en YY, perpendicular á $\omega z''$.

46. Sombra de la hélice cilíndrica, haciendo uso tan sólo **de la planta.**—Nos proponemos aquí aplicar el principio del núm. 20-3.°, para cuando se emplea el rayo luminoso, inclinando á 45° para con respecto al plano horizontal. Sea al efecto la fig. 41. La circunferencia del centro O, representa la base del cilindro, en donde se halla enroscada la hélice, dividámosla, en un número de partes iguales, por ejemplo, en doce, como las 0 1, 1-2, 2 3... etc., empezando desde el punto, o, que es el de partida, y hacia la izquierda, puesta que la hélice de que se trata, es *Sinistrorsum*. Suponemos aquí que el paso de la hélice es igual, á una altura equivalente á la rectificación de la circunferencia entera de base; así si á partir del punto de origen, imaginamos, la generatriz vertical del cilindro, y sobre ella vamos colocando sucesivamente las doce partes curvilínea rectificadas 0-1, 1-2, 2-3... etc., tendremos así el paso de la hélice en el espacio; además, el punto de origen o, lo suponemos á una cierta altura del plano horizontal, como por ejemplo, la indicada por la recta, $m=oo'$, y finalmente, para poder apreciar mejor los resultados partimos del supuesto, que si bien el rayo de luz, está inclinado de 45° para con el plano horizontal, se escoge por otra parte paralelo al plano vertical, y así vendrá determinado según expresa la flecha R^h.

Esto supuesto, si principiamos, la sombra del punto de origen o, ésta la obtendremos, sobre el plano horizontal, conduciendo un rayo luminoso por o, y tomando sobre él la distancia $o—o'=m$ (20—3°); el punto o', será la sombra en cuestión.

Para el punto 1, éste téngase en cuenta que está á un doceavo de altura del paso, más alto que el anterior o, así es que, si imaginamos un plano horizontal á la altura que se encuentra el punto 1, siempre podremos concebir sobre este plano la proyección del o, que llamaremos o_1; uniendo pues,

estos dos puntos, tendremos una cuerda horizontal, que se proyectará en verdadera magnitud en $o—1$, y por lo tanto, su sombra será igual y paralela á dicha cuerda; con este precedente, trazaremos el rayo luminoso que pasa por el punto 1, además, encuéntrase la sombra del punto o_1, el cual, como anteriormente, veremos que es el punto 1', con solo formar la distancia $o—1'=m+\frac{1}{12}$ del paso, ahora será evidente que, trazando por 1', una paralela á la cuerda $o—1$, tendremos así su sombra, la cual cortándose con la proyección del rayo luminoso que pasa por el otro punto 1, nos dará en definitiva el punto a, como sombra del punto 1.

Para el punto 2, imagínese también el plano horizontal que pasa por él, esto es, $\frac{2}{12}$ de altura del paso, más alto que el origen o, sobre este plano; concíbase proyectado el punto o, el cual conoceremos por o_2, y éste unido con 2, nos dará una cuerda o_2-2, proyectada horizontalmente en magnitud, en o-2; ahora la sombra del punto o_2, vendrá en el punto 2', tomando la distancia $o\text{-}2'=m+\frac{2}{12}$ del paso, conduciendo en seguida por 2', la recta 2'-b, igual y paralela á la cuerda o-2, cuyo punto extremo b, será la sombra del punto 2, producido si se quiere por el corte de 2'-b, con el rayo luminoso que parte del punto 2.

Repitiendo análogas operaciones para los puntos siguientes: 3, 4, 5,... etc., obtendremos sus sombras en c, d, e,... etc., cuales, unidos, darán la línea a, b, c, d, e,... etc., como la sombra de la hélice del espacio. Ahora bien, si se observan detenidamente las operaciones efectuadas, no será difícil descubrir que dicha línea de sombra es una *Cicloide*.

En efecto, hemos dicho que el paso era igual por construcción á la rectificación de toda la conferencia; es así que, al hallar las sombras de o_3, o_2, o_4,... etc., en 1', 2', 3',... etc., cada una de las partes o'-1', 1'-2', 2'-3'... etc., son iguales á $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$; del paso, luego la total recta o'-12'=al paso entero=á la rectificación de la circunferencia. Además, si para cada altura de los puntos 1, 2, 3,... etc , concebimos el círculo horizontal que por él pasa, cada uno de ellos tendrá su sombra, en otro igual, cuyos centros respectivos serán los puntos o'', 1''. 2'' 3'',... etc., ahora bien, si nos fijamos en el

círculo de sombra, cuyo centro corresponde al punto o'', y suponemos que se imprime un movimiento de rotación al par que traslación, permaneciendo en sus distintas posiciones, tangente á la recta o'-12', y luego consideramos su nueva posición, cuando el centro se haya colocado en el punto 2'', entonces será evidente que el punto de tangencia primitivo o', se habrá elevado para colocarse en el punto b, toda vez que la circunferencia, al moverse con los dos movimientos combinados antedichos, habrá tenido que recorrer, lamiendo en su periferie, todo el trayecto rectilíneo o'-2', que es igual á dos partes curvilíneas rectificadas de dicha curva, luego se infiere que el punto que se encontraba á la altura de la horizontal 2-b, en el momento de partida, se habrá colocado, bajando, en el punto 2', en la posición que nos hemos fijado, mientras que el origen o' ha subido de la misma altura para colocarse en b Así, pues, esta curva es una *Cicloide*, engendrada por el movimiento del punto o' toda vez que la traslación y giro, son exactamente iguales á los que corresponden para aquella curva *.

* Es la Cicloide, la curva, engendrada por el movimiento de un punto situado sobre una circunferencia, la cual rueda sin resbalar sobre una recta, y encontrándose siempre en un mismo plano en todas las posiciones consideradas. Llámase con dicho nombre, del griego κύκλος, esto es, *círculo*, porque efectivamente, depende de un círculo.

Llámase también *Trocoide*, de γροχος, que vale tanto como rueda, quizá, porque cada punto de una rueda, puesta en movimiento, describe precisamente esta curva. El descubrimiento de la Cicloide se debe al cardenal *Di Cusa*, y otros quieren que sea *Carlos de Bovello*, pero éste, habla solamente de su generación, sin entrar en pormenores sobre varias propiedades, que trascienden á aplicaciones prácticas.

Pero el primero que la hizo notar como á curva especialísima notando sus particularidades, fué el famoso Galileo, allá por el año de 1615, y algunos años después Roberval, determinó su área, así como también hizo el cálculo de los volúmenes, engendrados por la revolución de dicha línea, ya en torno de su eje, ya en torno de su base. Descartes y Fermat, dieron á conocer el trazado fácil é ingenioso, para el trazado de una tangente. Pascal, encubriéndose bajo el pseudónimo de Detouville, propuso á los matemáticos en el año de 1658, varios problemas relativos á la Cicloide, publicando poco después las soluciones cuyas, llamaron poderosamente la atención de la gente docta.

A. Huiggens se debe la demostración de la propiedad de la Cicloide, en tener por evoluta, otra Cicloide igual á la primera, pero colocada en sentido contrario, correspondiende el culminante de la segunda, al punto de retroceso de la primera y viceversa.

Finalmente, Leibnitz y Bernoulli, descubrieron en ella ciertos espacios cuadrábiles, y especialmente el último, hizo ver como el arco de la Cicloide, constituye la curva de más rápida pendiente. Así es, que, si sobre ella y en su concavidad se aban-

La construcción de la tangente, en un punto cualquiera de la curva, es en extremo sencilla, pues no hay más que observar que, cuando el círculo móvil se coloca tangente á la base, por ejemplo, en el punto 2', el punto generador b, se mueve en un tiempo infinitamente pequeño, cual si girara alrededor del punto 2', como á centro, de donde resulta que, trazando la recta $b\beta$. perpendicular á la b-2'. aquélla será tangente á la Cicloide.

Precisa ahora observar, que pueden existir tres casos muy distintos, para los efectos del resultado de la línea de sombra, lo que constituye tres notables variaciones, y son: 1.° que el rayo luminoso forme un ángulo con el plano horizontal, igual al que forma con el mismo plano la tangente á la hélice, entonces sucede que en los puntos del espacio correspondientes á la hélice, y que vienen proyectados en o, 6, el rayo luminoso y la tangente, se confunden en una sola rec-

dona, bajo la acción de la gravedad, un peso cualquiera, para que; resbalando, vaya impelido hacia el punto más bajo de la curva, sucederá la singular propiedad que, sea cualquiera que fuera el punto de partida, siempre llegará al punto más bajo en el mismo tiempo, es el *Tautocrhonismo*, y la curva que la parece es *Tantocrhona*, ó curva de caídas de igual duración.

En la figura 41, llamando δ el diámetro del círculo generador, se tiene que la base

$$o'\text{-}12' = \pi\delta = 3'1416 \times \delta = \delta\,\frac{22}{7}$$

$$\text{El eje } 6'\text{-}f = \delta = \frac{o'\text{-}12'}{3'141\,6} = \frac{7}{22} \times o'\text{-}12'$$

$$\text{La relación } \frac{o'\text{-}12}{6'\text{-}f} = \frac{22}{7}$$

El radio de curvatura en un punto cualquiera b, de la cicloide, es el doble de la porción b-2' de la normal, comprendida entre la curva y la base, de donde se infiere que puede trazarse su evoluta por puntos.

La longitud de la Cicloide, es igual á cuatro veces su eje, ó sea diámetro del círculo generador, así llamando L, esta longitud se tiene $L = 4 \times \delta$.

La superficie comprendida entre la Cicloide y su base, es el triplo del círculo generador, así se tiene, llamando S esta superficie

$$S = \frac{3}{4}\pi\delta^2$$

Por último, escogiendo el punto o', por origen de coordenadas, llamando por x, y, las coordenadas de un punto cualquiera, por r, el radio del círculo generador, la ecuación diferencial de la Cicloide será

$$-d.\,x = \frac{yd.\,y}{\sqrt{2\,r\,y - y^2}}$$

ta; en este caso, la sombra del eje vertical de la hélice, que viene representada dicha sombra por o''-12'', es igual á la circunferencia generadora rectificada, en los puntos o'-12', esto es, después de haber recorrido el punto generador todo el paso, para volver á emprender en el siguiente; la curva Cicloide experimenta un retroceso, y la Cicloide se llama *ordinaria comun ó cumplida*, es el caso que hemos estudiado en la figura 41.

2.° Cuando el ángulo, que forma el rayo luminoso con el plano horizontal, es mayor que el correspondiente, que forma la tangente con el propio plano, entonces la sombra (fig. 43), *r-s*, del eje vertical de la hélice, es menor que la rectificación de la circunferencia generadora, y la curva cicloidal, aparece después de haber recorrido un paso, como formando dos lazos en los extremos, siendo tangente en los puntos de base *a, m*, y dando puntos múltiples de primera especie α β, al cortarse dos ramas de la misma, la Cicloide toma en esta situación el nombre de *Prolongada* ó *Peraltada*.

Aquí, en este caso, puede suponerse que la sombra del paso *r, s*, corresponde á otra hélice concéntrica con la primera, la cual tendría por proyección horizontal, un círculo concéntrico con el de la (fig. 43), del cual deduciríamos como en la (fig. 41), una Cicloide cumplida, y en este caso, considerando un punto exterior de este círculo, pero situado en la prolongación del radio inicial O*o*, tendríamos que, mientras el punto *o*, describe la Cicloide cumplida, el punto exterior describiría á su vez la Cicloide *alargada* de la fig. 43.

3.° Cuando el ángulo del rayo luminoso con el plano horizontal, es menor que el de su tangente con el propio plano, entonces aparece la Cicloide llamada *Rebajada* ó también *Reducida*, en semejante estado (fig. 42), la sombra o'' VI-XII del eje vertical de la hélice, es mayor que la rectificación de la circunferencia generadora, y ofrécense dos marcados puntos de tangencia en los extremos correspondientes á un paso. Aquí, también, como en el caso anterior, podemos dar por supuesto que la recta o''-XII, representa la sombra del eje vertical de una hélice concéntrica, á la de la fig. 42, proyectada horizontalmente por un círculo concéntrico de la propia figura, pero de radio mayor, y entonces, concibiendo la Cicloide cumplida, que conviene á la sombra de aquella hélice, tendríamos que al moverse el círculo generador para engendrarla, se llevaría consigo el punto inicial *o*, situado en el

interior del círculo de mayor radio, describiendo al efecto la Cicloide rebajada.

De todos modos resulta, que sea cual fuere el caso de los tres mencionados, de que se trate, hemos de colocar la altura del paso en la disposición O''-XII de la fig. 42, dividiéndolo en el mismo número de partes iguales, que se ha dividido la circunferencia generadora de centro O: y así el punto I, representará la sombra del extremo de la primera división, el punto II, la sombra del punto extremo de la segunda división, etc., y así sucesivamente; ahora si se quiere, por medio de otras fáciles consideraciones es dable encontrar rápidamente, la sombra de puntos de la curva, y en efecto, si trazamos por I, una recta I *b* igual y paralela al radio O-1, aquella representará la sombra sobre el plano horizontal, de la horizontal O-1 situada sobre la primera altura del eje; por lo mismo II-*c*, será la sombra de la horizontal O-*2*, situada en el espacio, á la segunda altura del eje, y así sucesivamente para las demás horizontales, deduciendo de aquí que los puntos extremos *a, b, c, d*, etc., son respectivamente las sombras de los puntos de la hélice proyectados horizontalmente en 0, 1, 2, 3, etc.

Bajo el mismo principio de construcción se ha formado la hélice peraltada de la fig. 43.

También puede inferirse, que la sombra de la hélice, sobre el plano horizontal, ha de ser una cicloide, dando á la hélice una cierta definición, diciendo ser una curva, formada por el movimiento de un punto situado sobre un círculo horizontal (ó sea sección recta del cilindro en donde está enroscada la hélice), que se mueve de modo girando alrededor del eje del cilindro, al mismo tiempo que asciende ó descendiendo por traslación, siendo uniformes ambos movimientos de giro y traslación. En este concepto, claro está que cada posición del círculo generador horizontal le corresponderá en el plano de proyección horizontal otro círculo igual, tal como es el de la fig. 41, cuyo centro *2''* ha de estar precisamente situado sobre la sombra arrojada 0''-12'' del eje vertical de la hélice, y como resulta que esta sombra de la curva circular, lleva también consigo la sombra *b*, del punto 2 considerado en el movimiento, de aquí se inferirá, que al paso que el punto del espacio describirá la hélice circular su sombra ó sea el punto *b*, describirá la cicloide en el plano horizontal, pues será equivalente, al movimiento rotatorio y de traslación que ad-

quiera en el plano horizontal, el círculo de centro 2″, al recorrer girando, y siendo tangente á la vez á la recta, horizontal 0′-12′ que es igual á la 0″ 12″ equivalente á la altura ó paso de la hélice.

La cuestión que acaba de ocuparnos, es precisamente una extensión, así como aplicación de dos teoremas notables, hechos conocer por Guillery en el año de 1847, uno de ellos, cuando dice *que la proyección cilíndrica oblícua de una hélice sobre un plano perpendicular á su eje es una cicloide cuando las proyectantes tienen la misma inclinación sobre este plano que las tangentes de la hélice;* el otro, *que la proyección oblícua de una hélice sobre un plano perpendicular á su eje es una cicloide reducida ó alargada, según que las proyectantes, están más ó menos inclinadas sobre este plano que las tangentes de la hélice.*

Luego termina diciendo, que puede concluirse de dichos dos teoremas, que *toda cicloide, es la sombra de una hélice, para una dirección determinada de rayos paralelos.*

47. Sombra de un punto de una curva sobre otra.— Las curvas son las dadas en el espacio por A y B. (Fig. 44), si imaginamos estas curvas como directrices de dos cilindros cuyas genetrices, sean paralelas al rayo luminoso R, claro es, que podrán cortarse dichos dos cilindros, por medio de un plano cualquiera P, por ejemplo, uno de proyección, el que más convenga, pues bien, si las curvas de sección A′ y B′ sobre este plano son tales, que ambas á su vez se corten; en un punto tal como X, esto indicará, que los dos cilindros se cortan, según una generatriz XX′, cuya traza es X, y por lo tanto, dicha generatriz se apoya en la curva A, según el punto X′ y en la curva B, según el punto x, luego este último, es la sombra arrojada sobre B del punto X′, situado sobre la curva A. Para el mejor éxito de la operación es conveniente, que la elección que se haga del plano P, sea tal, que corte á las generatrices en ángulos lo más abiertos posibles.



CAPÍTULO III

Sombra de los cuerpos terminados por superficies planas

48. Vistos ya los elementos principales, esto es el punto, la recta y el plano, considerado en su sombra, podremos ya pasar al estudio de la sombra del cuerpo que los integra, cual es el poliedro.

Viniendo los poliedros, terminados por caras planas, ya desde luego se infiere, que la línea divisoria entre la parte iluminada y la obscura, será una línea quebrada, compuesta de un cierto número de aristas del poliedro, formando dichas aristas en su conjunto un polígono alabeado; (Núm. 14), infiriéndose de aquí que la sombra arrojada del poliedro no será otra cosa más, que la que arroje dicho polígono.

Según esto una arista que provenga de la intersección de dos caras iluminadas, ó bien de dos caras obscuras, no puede servir para formar parte del polígono mencionado de separación, el cual se concreta en absoluto, á todas las aristas del cuerpo, producidas por la intersección cada una; de dos caras, una iluminada y otra obscura.

Es fácil por otra parte, averiguar si una arista divide á dos caras adyacentes iluminadas, ó bien obscuras, ó una iluminada y la otra obscura, para eso basta considerar, un punto de la arista que se quiera ensayar, conducir por él, un rayo luminoso, y por éste, un plano secante (que para mayor facilidad se hace, sea perpendicular á uno de los dos planos de proyección), este plano corta al ángulo diedro de las dos ca-

rás, según el ángulo plano correspondiente, y entonces si el rayo luminoso prolongado cae dentro de dicho ángulo, será señal de que la luz da de lleno en las dos caras, ó por el contrario que ambas están sumidas en la obscuridad, por tener que atravesar el rayo luminoso la masa opaca del cuerpo para llegar al punto escogido, y por último, cuando el rayo luminoso, conducido por el vértice del ángulo aparece exterior al mismo. tendremos seguridad que la arista es línea divisoria de una cara iluminada, (cual visiblemente aparece que da de lleno la luz en ella), y de otra obscura (que en la sección producida demuestra ya por si sola, que está opuesta á la dirección de los rayos luminosos). La fig. 45, lámina 4.ª, muestra la sección de ensayo, para cuando las dos caras están iluminadas, la fig. 45, B, para cuando ambas están en sombra y la fig. 45, C, cuando una cara está en luz y otra en sombra.

49. Más la mayor parte de veces, la simple inspección de las proyecciones del poliedro, considerado bajo la influencia del rayo luminoso, y el modo como viene relacionado, así como su especial forma, son bastantes para que puedan descubrirse en seguida y de una manera franca, las líneas rectas que dan la separación de la sombra y de la parte iluminada, cuya viene dada así *apriori*, y sin hacer ninguna operación.

Otras veces, pueden hacerse razonamientos fáciles, relacionados con el modo como aparecen las caras y aristas del poliedro, una vez estemos convencidos de la obscuridad ó iluminación de alguna de sus caras, para con ello deducir el modo de ser de las restantes; así por ejemplo, cuando en un poliedro convexo, existen dos caras paralelas, de las cuales tenemos la completa seguridad que una de ellas está iluminada; será bastante dicho dato para deducir inmediatamente que la otra pertenece á la sombra propia. Algunos ejemplos prácticos que vamos á exponer, aclararán dándose á comprender el criterio, que debe seguirse, al investigar esa línea divisoria en los poliedros.

50. Prisma recto.—(Fig. 47, lám 4.ª). Su base descansa sobre el plano horizontal, es el polígono irregular *abcde*, y su altura es la $a'a''$, el rayo de luz es el que lleva la dirección $R^v R^h$. Ya desde luego descubrimos, que según la exposición de este cuerpo á los rayos luminosos, éstos hieren di-

rectamente al prisma en las caras *ba*, *ae*, *cd*, conforme hemos indicado en el número 49, al paso que rasando, por el punto *b* y por el *d*, indica (núm. 48), que las aristas verticales $b'b''$, $d'd''$, son de división de luz y sombra. Por otra parte, es visible á la simple inspección de la figura, que la base superior $a''c''$, está iluminada, y como quiera que acabamos de ver que las caras verticales *dc*, *bc*, están privadas de luz, se infiere, que las dos rectas orizontales *dc*, *bc*, forman parte de la línea de separación de luz y sombra, la cual en su totalidad, se compondrá del polígono quebrado, que pasa por la arista vertical del punto *d*, por las horizontales *dc*, *cb*, y finalmente por la arista vertical del punto *b*.

Ahora para la sombra arrojada, hagamos pasar un rayo luminoso, por todos los puntos de esta línea quebrada, hallando respectivamente sus trazas, de este modo formaremos un prisma de sombra oblícuo, cuya intersección con los planos de proyección encerrará el contorno de dicha sombra.

Así, siendo un plano vertical el conjunto de rayos luminosos, que resbalan por la arista $d'd''$, la sombra arrojada de dicha arista sobre el plano horizontal será la $d\delta$, que aquí en este caso particular se confunde con la misma traza horizontal del plano rasante, así como también con la proyección homónima del rayo luminoso, y se limitará en δ traza horizontal del rayo, que parte del punto extremo d'', á partir de d'', el rayo se apoya sobre la horizontal *dc*, y por lo mismo, el plano de sombra que engendrará cortará al plano horizontal, según la recta δm paralela á aquélla, más como no puede caer toda ella arrojada sobre dicho plano por oponérsele el plano vertical, de aquí, que á partir del punto *m*, caiga el resto, arrojado en $m\gamma$, cuyo último punto γ, es la traza vertical del rayo que parte del punto c-c''; haciéndonos en seguida cargo del rayo que parte del punto b-b'', éste tiene por traza vertical el punto β, infiriéndose con ello que la recta $\beta\gamma$, es la sombra arrojada de la recta *bc*, producida por la intersección del plano vertical, con el plano de sombra que parte de dicha recta *bc*, y finalmente sigue luego la vertical ó arista $b'b''$, que tiene por sombra arrojada la vertical βn, cuya es la traza vertical del plano de sombra rasante por la mencionada arista, cuya traza horizontal *bn*, de dicho plano, concluye de facilitar la sombra arrojada de que se trata, toda vez que en el punto *n*, esta última línea de sombra arrojada aparece interrumpida.

51. Prisma oblícuo.—Este prisma está dado en la figura 48, por sus proyecciones Δ, Δ', descansa por su base inferior en el plano horizontal en ABCDE, y lleva la inclinación de la arista A*a*, A'*a*'; el rayo es R^v, R^h.

Préstase este caso, para aplicar el principio del número 21; así es que si concebimos un plano secante perpendicular al plano vertical, y paralelo á la vez al rayo luminoso, este plano cuya traza vertical es V^P, produce en el prisma un corte, expresado por el polígono 1-2-3-4-5. en este polígono trácense ahora los rayos luminosos *fg*, *hi*, rasantes y límites, y ellos nos indicarán por si solos (en virtud de lo indicado anteriormente en la fig. 45 C), que todas las tres caras que corresponden á 1-2, 2-3, 3 4, estarán iluminadas, mientras que las 4 5, 5-1, serán obscuras pues visiblemente se oponen á la luz; luego con ello tenemos ya que la línea de separación será la C*cba*A, cuya sombra propia aparece oculta según la disposición del prisma.

Ahora es fácil pasar á deducir la arrojada en efecto el punto C, es el de partida en el plano horizontal, de la que arroja la arista C*c*, si queremos pues otro punto, escójase en dicha arista, otro punto cualquiera, el 4, por ejemplo, por él pasa un rayo luminoso, cuya traza horizontal está en *m* únase pues *m* con C, aprovechándose de esta recta el trecho C*q*, esto es, hasta donde corta á la línea de tierra; y es que á partir de este punto, la sombra la recibe el plano vertical, búsquese á este fin la traza vertical γ del rayo luminoso correspondiente al extremo *c-c'*, de la arista, entonces el resto de la sombra; será γq; luego el rayo de luz rasa por la horizontal *cb*, la traza del rayo luminoso que pasa por *bb'*, es el punto β, por lo que $\beta\gamma$, es la sombra de *bc*. Sigue luego el rayo bordeando la línea horizontal *ba*, y como quiera que el punto α, es la traza vertical del rayo luminoso que pasa por *a-a'*, infiérese que $\alpha\beta$, es la sombra que arroja la *ab*. Trácese ahora por α, la recta αr, paralela á la anteriormente encontrada en γq, y ella evidentemente responderá á la parte de sombra que arroja sobre el plano vertical la arista A*a*, toda vez que siendo las aristas del prisma paralelas, paralelas serán también sus sombras, referentes á un mismo plano.

Por idéntica razón, uniendo *r* con A, la recta *r*A, representará el resto de la sombra de la propia arista, pero ahora arrojada sobre el plano horizontal, y en este concepto, ha de ser paralela á la C*q*.

52. Poliedros regulares.—1.° **El Cubo**. Se da este poliedro en (fig. 49), suponiendo que una de sus diagonales *a'f'*, es vertical, cual si el exaedro estuviera colgando de un hilo prendido en *a-a'*. Conocida la diagonal, es fácil deducir el lado del cubo pues sabido es que llamando *d* esta diagonal y *l* el lado del cubo, se tiene $\delta = l\sqrt{3}$, y por tanto puédese obtener *l* geométricamente, describiendo sobre δ una semicircunferencia, dividiendo luego el diámetro en tres partes iguales, y la cuerda *a'*-1, del semicírculo; que tendrá por proyección, una de las partes extremas del diámetro, será el lado pedido. *

Observemos ahora, que las tres aristas que parten del punto *a-a'*, están igualmente inclinadas con respecto á la vertical diagonal, lo cual indica que se proyectarán horizontalmente según magnitudes iguales, y á más cada dos de ellas forman en esta proyección ángulos de 120°; por lo tanto, trácense por *a*, tres rectas *ab*, *ad*, *ah*, que formen dos á dos el mencionado ángulo; faltará tan sólo limitarlas según una magnitud $ab = ad = ah$, que corresponda á la proyección de la magnitud, encontrada anteriormente para el lado del espacio. Para ello, imaginando por un momento contruido el cubo, podrá observarse, que para pasar por las aristas del punto culminante *a'*, al más bajo *f'*, hay que seguir forzosamente, tres de ellas, por ejemplo las *a'd'*, *d'g'*, *g'f'*, más como ellas tienen igual inclinación para con respecto á la vertical *a'f'*,

* En un cubo (fig. 49') la diagonal AB, es la de un rectángulo ACBD, en el cual, dos de los lados, son iguales al lado *l*, del cubo. Por ello tendremos $CB = l\sqrt{2}$, y $AB = l\sqrt{3}$, además se infiere que $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y por lo tanto $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{1}{2}$.

Ahora bien proponernos encontrar el lado del cubo conocida que sea la diagonal $\delta = a'f'$ (fig. 49), es lo mismo, que nos propusiéramos construir un triángulo rectángulo, conociendo su hipotenusa *a'f'*, y la relación $\left(\frac{1}{2}\right)$, que existe entre los cuadrados de los catetos. Por otra parte sabemos, que los segmentos $a'1_1$, $1_1f'$ de la hipotenusa, son proporcionales á los cuadrados de los catetos *a'*-1, 1-*f'*, así pues podremos escribir la igualdad $\frac{a'\text{-}1_1}{1_1\text{-}f'} = \frac{1}{2}$. He aquí porque se divide la $a'f' = \delta$, en tres partes iguales, trazando por la 1.ª división 1_1, una perpendicular á dicha *a'f'*, hasta cortar en 1, á la semicircunferencia, siendo la cuerda *a'* 1, el lado *l* del cubo.

puesto que $g'd'$, tiene igual inclinación que su paralela $a'h'$, y la $g'f'$, igual inclinación que su paralela $a'b'$, luego si proyectamos los tres lados, ante dichos sobre la $a'f'$, quedará ésta dividida en tres partes iguales.

Partiendo pues de este supuesto procedamos á dividir la vertical en las tres partes $a'1_1$, $1_1 2_1$, $2_1 f'$, trazando las horizontales 1 1', 2·2', y entonces claro está que sobre las mismas estarán los vértices restantes del cubo. A este objeto siendo la a'-1, *az*, el lado del cubo, cual lado, está ya en disposición paralela al plano vertical, hágase girar en torno de la vertical proyectada horizontalmente en *a*, hasta que corte en *h*, *b*, *d*, las aristas que antes se habían trazado, pero dejándolas indefinidas, y estos puntos las limitarán; falta tan sólo proyectarlos verticalmente en h', b', d', sobre la horizontal 1·1' uniéndolos en seguida con el vertice culminante a'.

Finalmente; constrúyanse con estas rectas los paralelogramos $a'h'g'd'$, $a'b'c'd'$, $a'h'e'd'$, así como sus proyecciones horizontales; y con su auxilio, podrán construirse, los otros tres paralelogramos que faltan para determinar el cubo, y así éste, quedará completamente formado. Siendo R^v-R^h, el rayo luminoso, determinemos la sombra de dicho cuerpo, no sin que antes observemos que la proyección horizontal del mismo y atención hecha á la especial posición en que está situado en el espacio, forma verdaderamente su contorno aparente un exágono regular, y sus radios vienen á ser las proyecciones de los restantes lados.

Los rayos rasantes, límites del contorno aparente, en el plano vertical son los trazados por g' y b', mientras que los que corresponden de igual clase pero en el plano horizontal, resultan ser los *h*H y *c*C, de modo que si nos fijamos bien en estos cuatro puntos, de ellos podremos ya deducir en seguida la línea quebrada que forma la divisoria de luz y sombra sobre el cuerpo; en efecto, teniendo que pasar por los puntos extremos encontrados en h', g', que, se encuentran ser los extremos de una arista, claro está, que esta misma arista $h'g'$, *hg*, formará ya parte de la línea divisoria, igual precedente tendremos para opinar así de la arista *bc*, $b'c'$, con ello tenemos ya, que por medio del resultado encontrado en la arista $g'h'$, inferimos que la cara $g'h'a'd'$, está iluminada, y por lo tanto por oposición, la cara opuesta paralela á ella (núm. 49) estará obscura; lo propio que la cara $g'h'e'f'$, estará obscura, y por lo tanto su opuesta $a'd'c'b'$, estará iluminada. Ahora

atendamos bien, que si queremos ir desde el punto vértice g', hasta al c', pasando por las aristas anteriores del primero, podríamos adoptar dos caminos, cuales son el $g'd'c'$ ó el $g'f'c'$, ahora bien, el primero no puede servir para línea divisoria de luz y sombra, porque á simple vista se descubre, que si por el vértice d-d' se traza un rayo luminoso, este prolongado penetra en el interior del triedro formado en d-d' lo que indica que los rayos luminosos iluminan las tres caras, por consiguiente, la cara $g'd'c'f'$, está también iluminada y por lo tanto su opuesta $h'e'b'a'$, estará privada de luz; de lo cual sabiendo ya cuales son las tres caras iluminadas, y cuales las tres obscuras podemos fácilmente deducir de sus aristas de intersección, formadas en la combinación de una iluminada y de otra obscura, la línea quebrada $a'h'g'f'c'b'a'$, *ahgfcba*, divisoria de luz y sombra; imaginando pues ahora una serie de rectas paralelas al rayo luminoso que rasen por todos estos puntos vértices del polígono alabeado, formaremos el primero que hemos llamado de sombra, el que encontrando su intersección con el plano horizontal, valiéndonos de las trazas horizontales de sus aristas que no son otras, que los rayos de sombra vendremos finalmente á obtener la sombra arrojada del cubo en ABCFGH, advirtiendo que para facilitar la operación, una vez obtenidas, tres de sus lados contiguos, tales como HA, AB, BC, los otros tres pueden trazarse, paralelos respectivamente á ellos, lo que también puede servir dicha propiedad para comprobación.

53. 2.º El tetraedro.—Se nos da en la fig. 50, de modo que su base $a'b'c'$, se halla inclinada al horizonte, de modo que su plano referido á los dos de proyección, tiene por trazas V^P, H^P; así es que si nos proponemos construir en proyecciones, este poliedro, una vez dado una de sus aristas, quedará reducida la operación, á rebatir el plano P, sobre el plano horizontal, tomando como á charnela la traza H^P, así la traza vertical viene á colocarse en V'^P y allí construir geométricamente la base $\alpha\gamma\beta$; vuélvase á colocar luego el plano en la primitiva posición, y el triángulo vendrá dispuesto en proyecciones en *abc*, $a'b'c'$; determínase luego el centro del mismo en *o*, o', trazando por él, la perpendicular OV-O'V', al propio plano, tomando sobre ella y á partir de O, O' la magnitud de la altura de la pirámide, operación que como es sabido, queda concretada, á suponer que la recta O'V' inde-

finida, se gira para colocarla paralela al plano vertical, alrededor de la vertical del punto O O′, tomando sobre esta disposición la magnitud de dicha altura, y luego retornando, los datos en su primitiva posición, así tendremos el vértice V, V′; operaciones todas que no mas hacemos que indicar, pues son puramente de Geometría Descriptiva.

En este estado y siendo R^v R^h la dirección del rayo luminoso determinemos la sombra propia y la arrojada. En cuanto á la primera, trazando los rayos rasantes límites en el plano horizontal, estos evidentemente pasan por *a* y *b*, además, si por el vértice V-V′ imaginamos un rayo luminoso, éste corta al plano horizontal, según la traza S, eso por si solo indica desde luego que *a* y V; *b* y V son puntos que pertenecen al deslinde de luz y sombra, por lo tanto, á dicha división del claro obscuro pertenecerán también las aristas V*a*, V*b*, y como quiera que la cara de base *a′b′c′*, visiblemente está opuesta á luz, resulta que la arista *ab*, pertenece del mismo modo á la línea de demarcación de luz y sombra; toda vez que la cara *ab*V, está iluminada, por encontrarse frente al rayo luminoso, con ello resulta que la línea quebrada *ab*V (aquí plana por componerse de tres rectas que limitan una cara del poliedro) será la línea divisoria de luz y sombra; búsquense pues las trazas horizontales de los rayos luminosos que pasan por los vértices *a*, *b*, V, y se tendrán los puntos A, B, S, que unidos nos darán el triángulo ABS, que encierra la sombra arrojada.

54. 3.° El octaedro.—Partimos de la hipótesis, que dándosenos el octaedro por una de sus aristas se trata de considerar este poliedro como descansando en el plano horizontal, por una de sus caras. Sea pues con este motivo la fig. 51, y empecemos dibujando sobre el plano horizontal un triángulo equilátero 1-2-3, con el auxilio de la arista del dato, y colocándolo en una disposición cualquiera, pero siempre obrando en el plano horizontal según se ha dicho. Sabido es que el centro de este poliedro así como de los otros cuatro regulares está equidistante de todos los vértices, proyectándose precisamente en una cualquiera de las caras, en el centro de figura de las mismas, sea cualquiera la que se escoja; infiérese pues de aquí que partiendo de una de las caras que por el dato es horizontal, la opuesta á esta también lo será, confundiéndose por lo mismo en una sola proyección horizontal, los centros de figura de estas dos mencionadas caras; en su virtud

con el radio O1, trácese una circunferencia, y en ella inscríbase el triángulo equilátero *cab* igual y simétrico al 1-2-3; este pues será la base superior * Unanse también los vértices contiguos de estos dos triángulos y así se obtendrán los lados 1-*a*, *a* 2, 2-*b*..... etc., y así la figura completada nos dará en su contorno un exágono figurando en él y en su interior el uno visto y el otro oculto, los triángulos de las caras horizontales, cuyo conjunto será la completa proyección horizontal del poliedro.

Pasemos á la proyección vertical: para la base inferior, los vértices 1, 2, 3, es evidente ya de por sí que irán á proyectarse, en la misma línea de tierra, en 1′, 2′, 3′; en cuanto á la base superior siendo también horizontal, claro está que se proyectará según una sola recta *a′b′* paralela á la de tierra, falta sólo averiguar la distancia que separa una de otra, y ésta es fácil averiguarla, relacionándola con una de las apotemas cualesquiera, de los triángulos que se proyectan análogamente al 1-*a* 2; y así es pues que siempre la altura que se busca, y que se proyecta horizontalmente en el punto *a*, puede considerarse como el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea la verdadera magnitud de la referida apotema, y cuyo otro cateto sea precisamente la proyección horizontal *ah* de la referida apotema. Esta altura se ha construído en *gf*, tomando por cateto menor el *go*, echando mano luego de la apotema *ag*, y con su auxilio cruzar por medio de un arco de círculo de centro O, al cateto *gf*, en el punto *f*. Tómese, pues, la altura *gf*, colóquese en *a″a′*, conduciendo por esta última, una recta horizontal, sobre la que se irán á proyectar verticalmente los vértices *c*, *b* en c′, *b′*. Finalmente únanse los vértices superiores con sus contiguos inferiores tal como irá guiando la misma proyección horizontal, y como muestran las operaciones en el plano vertical; y así podremos observar también que el contorno apa-

* Recuérdese para el mejor trazado de la figura, que cada plano diagonal reproduce el mismo cuadrado, cuyo lado es el lado del poliedro.

Que cada diagonal es igual á $l\sqrt{2}$, llamando l el lado del poliedro, y que por lo tanto cada semidiagonal, como por ejemplo O*a*, es igual á $l\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Que la apotema es igual á $l\frac{\sqrt{3}}{2}$.

rente del poliedro, sobre semejante plano de proyección es un paralelogramo, a'-1'-3'-b'.

En posesión ya del dato, encontremos la sombra de este sólido en el concepto de ser F, F' un foco luminoso. Con muy pocas operaciones, puédese obtener el resultado, observando primero que la cara superior está iluminada, esto se patentiza á la simple vista, además como que la cara $b'c'$3' está opuesta á la luz (los rayos F'b', F'c' lo indican), de aquí resulta que la línea horizontal bc, es línea divisoria de luz y sombra, por otra parte, la cara inferior 1-2-3, estando sustentada en el plano horizontal, estará en sombra, más como quiera que la cara a'-1'-2' está iluminada, por hallarse precisamente opuesta y paralela á la b', c', 3', que hemos dicho que estaba obscura, de aquí resulta que la línea 1'-2', 1-2 que es intersección de una cara iluminada con otra obscura, formará parte de la separación de luz y sombra. Por último, estando el vértice 3 3' sumergido en la sombra, y atención hecha al rayo límite Fb, F'b' para con respecto á la cara 2b'3', se infiere que ésta estará obscura, y por lo tanto, por oposición la a'-1'-c' paralela á ella, estará en luz, deduciéndose de aquí que las rectas 2'b', 1'c', también forman parte de la separación de luz y sombra; en suma que el conjunto de toda la misma, viene indicada por el contorno del paralelogramo 1'-2'-b'-c', 1 2-b c, que es precisamente la base común de las dos pirámides invertidas, y que puestas en contacto constituyen el poliedro.

Demarcada esta línea de sombra propia, se infiere de momento la arrojada, y así es que el rayo luminoso que pasa por b', corta al plano horizontal en B, y como el punto 2 es punto en sí mismo de sombra, se infiere con ello que la recta 2 B, es la sombra arrojada de la arista 2-b'. Sigue luego el rayo luminoso, rasando por bc, más como ésta es horizontal, su sombra sobre el plano de este nombre será la paralela Bm, á dicha arista; más no cae toda entera en este plano, sino que parte de ella la recibe el plano vertical y está expresada en Cm, cuyo punto de sombra C es, traza vertical del rayo luminoso que pasa por el vértice c-c'. Finalmente apoyándose el rayo luminoso muy luego sobre la arista c'1', esta análogamente que la anterior, cae parte de ella, arrojada sobre el plano vertical, en cn, y parte en el plano horizontal en n1. Esta última queda determinada con auxilio de la traza horizontal q del mismo rayo luminoso que pasa por c, c', cuyo punto q unido con 1 nos dará la recta que aprovecharemos

sólo en el trecho 1n, quedando solamente para cerrar la sombra, la unión de n con c; según ello el conjunto de la sombra arrojada está expresado por el contorno 1-n-C-m-B-2.

55. Cuarto. **El dodecaedro.**— * (Fig. 52). Aunque al parecer, algo complicada, la forma de este poliedro por el número de caras que en el existen, para que en el podamos

* Sabido es que este poliedro se compone de doce caras, todas pentágonas regulares, é iguales, cuyos planos se cortan, cada uno con los cinco adyacentes, dotando con ello al cuerpo de treinta aristas, y dispuestos de modo á determinar veinte ángulos poliedros, lo cual proporciona veinte vértices.

Representación en planta. Habiendo de descansar el dodecaedro sobre el plano horizontal, constrúyase sobre éste un pentágono $ghijf$, cuyo lado l sea igual al del dato; éste pentágono se dibujará de punto, pues será oculto.

Imagínese luego que cada lado es base de otro pentágono exactamente al descrito poco há, y que cada uno de ellos ha girado alrededor de su base, hasta que ha venido á rebatirse sobre el plano horizontal, confundiéndose todos ellos con el primeramente dibujado; así tendremos seis pentágonos superpuestos.

En semejante estado, volvamos á deshacer el giro, hasta tanto que dichos cinco pentágonos, se coloquen en el espacio, en el sitio que les concierna, que será cuando dos á dos coincidan en una arista, cual podrá considerarse como intersección de sus planos. Veamos pues, que sucede en este movimiento; y para eso consideramos el pentágono, que viene á colocarse en f-8-9 10-g, cuyo está dado del siguiente modo. El punto f, fijo, pues está en la charnela, el punto j, viene en el 8, por la intersección de j-8, (camino recorrido, por el j, al moverse perpendicular á la charnela fg,) con f-8, prolongación de fo (radio de la circunferencia que circunscribe al pentágono de base; toda vez que á causa de la simetría del cuerpo, dichos vértices han de encontrarse en las bisectrices de los ángulos f, j, i, h, g,) tenemos, pues, colocados en el espacio los lados f-8, g-10. El punto i se coloca en dicho movimiento en 9, y resulta este por la intersección de o9 radio prolongado del pentágono de base, ó si se quiere también, camino recorrido en el movimiento, por el punto i y al girar en un plano perpendicular á la charnela), con la prolongación de X-10 (X-10, es una recta situada en el plano del pentágono, cuya recta, en el rebatimiento sobre el plano horizontal era i-X, esto es el lado hi, del pentágono prolongado hasta el punto X, situado en la charnela).

Obtenidos, ya los vértices salientes 9, 1, 3, etc., únanse dos á dos los más contiguos, y los 5 pentágonos inferiores estarán ya en su sitio.

Más si nos fijamos ahora que los vértices salientes 9-1-3, etc., de los 5 pentágonos inferiores, son precisamente los vértices ó puntos entrantes de los otros 5 pentágonos superiores, cuyos parten sus bases de otro pentágono superior y horizontal $abcde$, inscrito en la misma circunferencia que el de la base inferior; vendremos á deducir que los puntos 7, 8, 9, 10, 1, etc., estarán situados sobre una misma circunferencia, formando, si se les une, un decágono regular, inscrito á la propia circunferencia.

En cuanto al pentágono de base superior $abcde$, puede obtenerse, imaginando que el inferior fgh, etc., gira en su plano alrededor del centro O; de la cantidad de un décimo de circunferencia, así es que el punto f, pasará en d, el j, pasará en c, y así

resolver el problema de las sombras, sin embargo, atención hecha á sus especiales condiciones de simetría, aparece sen-

---

sucesivamente; uniendo luego sus vértices *e*, *d*, *c*, etc., con los más próximos 9, 8, 7, etcétera del decágono se tendrá ultimada la proyección horizontal.

Representación en alzado. Suponiendo que el poliedro tiene su base inferior en el plano horizontal *f'i'*, proyéctanse en esta recta todos los vértices *f*, *g*, *hij*, en *f'*, *g'*, *h'*, *i'*, *j'*, los vértices de primera altura, 2, 4, 6, 8, 10, están todos á un mismo nivel, su altura con respecto á la base inferior, es el cateto de un triángulo rectángulo, cuyo otro cateto, es la proyección *f*-8 en el plano horizontal, de una de las diez aristas inclinadas; y la hipotenusa el lado *l*, del poliedro en verdadera magnitud; constrúyase, pues, este triángulo y deducido el cateto á que se alude, colóquesele en altura sobre el plano horizontal *f'i'*, conduciendo á dicha altura otro plano horizontal, sobre el que se irán á proyectar los vértices 2', 4', 6', 8', 10'.

En cuanto á los vértices de segunda altura 1, 3, 5, 7, 9, se encuentran también en un plano horizontal 9'-3', cuya separación del plano de base inferior, es la altura de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es la verdadera magnitud de la apotema de uno de los pentágonos, siendo el cateto de base la proyección horizontal 9-β, de dicha apotema; constrúyese con eso dicho triángulo, y su altura colóquese de modo á trazar un plano paralelo 9'-3', al de base *f'i'*; sobre este plano condúzcanse proyectados verticalmente dichos vértices salientes 1', 3', 5', 7', 9'.

El plano de base superior *e'b'*, está elevado del plano horizontal que pasa por los vértices 1', 3', 5', 7', 9', de la misma altura que lo están los puntos 2', 4', 6', 8', 10' del plano de base inferior *f'i'*, en él pues irán á proyectarse los vértices entrantes 2, 4, 6, 8, 10, en 2', 4', 6', 8', 10'.

Fijándonos bien en la figura de proyección horizontal, descubriremos fácilmente que las rectas 7-*d* y *fd*, están igualmente inclinadas, para con respecto al diámetro 8-3, la inclinación es de 36° esto es el décimo de los cuatro rectos, por lo tanto, se infiere que el triángulo 7*df*, es isósceles y por lo mismo $7\text{-}d = fd$: luego podemos sentar que: *el radio* R *de la circunferencia en donde está inscrito el decágono 1-2-3-4, etcétera, es igual al radio* r *de la circunferencia circunscrita al pentágono de base, más la cuerda ó lado del decágono inscrito en esta misma circunferencia* (A).

Otras propiedades notables se desprenden de la figura, las cuales aplicándolas facilitan su dibujo.

Primero. *La altura de las vértices del primer orden 2', 4', 6', 8', 10', para con respecto al plano inferior de base es igual al radio* r *de la circunferencia circunscrita á un pentágono de cara.*

Esta propiedad se desprende del teorema de geometría elemental que dice: «El cuadrado del radio de una circunferencia es igual á la diferencia de los cuadrados, del lado del pentágono y del lado del dodecágono, ambos inscritos á la misma.»

En efecto, no hay más que recordar, como se ha obtenido esta altura, ésta se ha construído con un triángulo rectángulo en que un cateto era el lado del decágono inscrito en el círculo de radio *r* (acabamos de ver que $fd = d\text{-}7$), y que la hipotenusa era la arista *l*, esto es el lado del pentágono, luego en este triángulo se verificará que el cuadrado de un cateto, (cateto que es la altura de que tratamos) es igual al cuadrado de la hipotenusa (el cuadrado del lado del pentágono) menos el cuadrado del otro cateto (esto es el cuadrado del decágono.)

Segundo. *El lado del decágono, inscrito á la circunferencia mayor de radio* R, *es igual al radio* r, *de la circunferencia menor, ó sea la que circunscribe al pentágono.*

cillísima la determinación de la línea divisoria de luz y sombra, cual se deduce mediante simples observaciones, sin que sea necesario recurrir á operación alguna.

En primer lugar la simple inspección del rayo luminoso, comparada su disposición para con respecto al poliedro, nos

---

Para demostrarlo, demos por supuesto que *y* representa el lado del decágono de la circunferencia de radio R, y *x*, el lado del decágono inscrito en la circunferencia menor de radio *r*.

Por simple Geometría elemental es bien sabido que el lado del decágono se obtiene dividiendo el radio de la circunferencia en donde está inscrito; en media y extrema razón, y así estableciendo la proporción que indique esta propiedad tendremos.

$$r : x :: x : r - x$$

$$x^2 + r\,x - r^2 = o$$

$x = \dfrac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4\,r^2}}{2} = \dfrac{r}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$, el valor que corresponde al signo superior es $x = \dfrac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, y es el único que responde á la cuestión, pues el otro á pesar de ser negativo, sería numéricamente mayor que *r*.

Del mismo modo hallaríamos para el valor de *y*

$$y = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right). \quad \text{(B)}$$

Ahora bien hemos visto en (A), que $R = r + x$ y por lo tanto sustituyendo por *x* su valor será $R = r + \dfrac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \dfrac{r}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$, sustituyendo este valor en (B) será $y = \dfrac{r}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right) = r$. lo cual, demuestra la proposición.

Tercero. *La altura de los vértices del segundo orden, para con respecto al plano inferior de base es igual al radio* R, *de la circunferencia circunscrita al decágono, que en proyección horizontal, forman los lados del poliedro no paralelos á los planos de base.*

La demostración de tan interesante propiedad resulta sencillísima, si nos fijamos con mucha atención en el triángulo rectángulo que se forma en el espacio 10'-δ-1', proyectado horizontalmente en el lado 10-1, cuyo indica que está situado en el plano vertical que proyecta este lado en el plano horizontal.

En este triángulo pues se tiene que la hipotenusa 10'-1', es en el espacio el lado *l*, del pentágono, mientras que el cateto horizontal δ-1', es en el espacio el lado del decágono de radio R, cuyo lado ya tenemos demostrado que es igual al radio *r* de la circunferencia que circunscribe al pentágono de base, tenemos, pues, que este triángulo es igual al que considerábamos cuando de encontrar se trataba, en alzado, la altura de los vértices de primer orden 2', 4', 6', 8', 10', así es que el tercer lado ó sea el cateto menor 10'-δ, será igual al cateto correspondiente *f*-8, de aquel triángulo, pero este cateto es igual por lo anteriormente demostrado á R-*r*, luego tendremos $\overline{10\text{-}\delta'} = R - r$, ó bien añadiendo á los dos miembros la cantidad $\overline{10\text{-}\delta'} = r$, será $\delta\delta' = R - r + r = R$.

indica desde luego, que la base superior está iluminada y obscura la inferior por la cual se apoya el cuerpo sobre un plano horizontal.

Inmediatamente si conducimos los rayos rasantes límites en los contornos aparentes del plano horizontal y vertical, tales como los que pasan por los vértices 1 y 6, en el primero; y los *b′* y *f′*, en el segundo, no será difícil descubrir, que las aristas *a*1, *ba*, *bc*, son ya de división, de luz y sombra. En efecto de pasar rasante, el rayo por el vértice 1, eso indica que el punto 1, es límite, y por lo tanto, por él pasan, dos aristas inclinadas; divisorias de luz y sombra, luego estas aristas han de ser precisamente 1-*a* hacia la base superior, y la 1-10 hacia la base inferior, y serán éstas y no otras, pues así lo indica la dirección de los rayos luminosos.

Encontrándose pues el plano ó cara de las dos aristas 1 *a*, 1-10, iluminado; por oposición, su cara opuesta, 6*ji*45, estará obscura, más como por el punto 6, pasa un rayo rasante límite, de aquí se infiere, que la arista 6-*j*, forma también parte de la línea divisoria que buscamos, así como la que también por el parte; la 6-5.

Por rasar siendo límite el rayo por el punto *b′*, indica *bc*, *ba* son divisoria de luz y sombra, y como hemos visto que el vértice 5, lo era, de aquí se infiere que la 5-*c*, lo es también; luego siéndolo 5*c*, y 6 5, resulte que la cara *dc*5 6 7 está iluminada, y por oposición su igual y paralela es ella tal como la *g*-10-1-2-*h*, obscura.

Habiendo también encontrado que la *ab*, *a* 1 son líneas de división; el plano 1-*a b*, que determinan estará en sombra, toda vez que sabemos ya que los adyacentes *abc*, *ea*1, están en luz; de aquí la consecuencia de que la cara opuesta y paralela á ella, estará iluminada; esto es, la *fj*-6.

Por último, habiendo deducido, que las caras *cb*-3, *ab* 3, están en sombra, vendremos á declarar en luz, las opuestas y paralelas 8*fg*, 8*fj*, por lo que resumiendo y teniendo en consideración las distintas caras analizadas inspeccionando cuales eran en luz, y cuales en sombra, y atención hecha también, á sus aristas de intersección, examinadas detenidamente cuales eran las que separaban una cara en luz de otra en sombra, vendremos ahora á tener en consideración las aristas que de esta clase se puedan unir en pos de otras, encontrando como á resultado la línea quebrada *g* 10-1*a*-*b*-*c*-5-6-*j*-*f*, para la proyección horizontal de la separación de luz y sombra, y en cuanto á la proyección en el plano vertical, es la que está afectada con las mismas letras, pero acentuadas como á primas.

La sombra arrojada es facilísima en este caso, pues la dirección del rayo de luz, es tal, que toda ella viene encima del plano horizontal; condúzcanse pues rayos luminosos, por todos los vértices de la línea separatoria, que acabamos de señalar, encontrando en seguida las trazas horizontales de los mismos, cuales unidas por el mismo orden, con que están situados los puntos originarios, vendremos á obtenerla en G-10″-A-B C 5″6″-F. Para el mejor trazado y rectificación de ese contorno poligonal, téngase en cuenta, que algunos de sus lados han de resultar iguales y paralelos á los originarios, estos son los situados en los planos de las bases horizontales, *e′b′ f′i′*.

56. 5.° **El Icosaedro.**—Dado en la (fig. 53)*, aparecen en él aun más breves las consideraciones y fácil la operación para determinar la línea de división de luz y sombra. Para

* Poliedro de veinte caras de forma de triángulos equiláteros, de treinta aristas y de doce vértices de ángulos pentaedros. Dividido con relación á cualquiera de las diagonales mayores que se considere, en tres zonas, formando las dos extremas cada una de ellas una pirámide base pentagonal, las dos de vértices opuestos cuyo eje común de ambas pirámides, es la diagonal considerada; y la zona intermedia que enlaza dichas dos bases, contiene las restantes diez caras.

Proyección horizontal: Dado que sea el lado *l* del poliedro, constrúyase un pentágono junto con la circunferencia que le circunscribe, este pentágono es el *abcde* y sirve de base á la pirámide directa de vértice V′, cuyas aristas son las V*a*, V*b*, etc., todas dibujadas de trazo lleno, pues son vistas por formar parte de la pirámide superior.

Inscríbase en la misma circunferencia otro pentágono simétrico al anterior, de modo que los vértices del uno coincidan con el punto medio del arco que subtende el lado del otro; este segundo pentágono es 1-2-3, etc., trazado de puntos como oculto; éste servirá de base para la pirámide inferior invertida, cuyo vértice se confunde con el primero en V′. Falta ahora unir dos á dos todos los vértices contiguos de estos dos pentágonos, formando así un decágono inscrito en la circunferencia referida; este decágono será el contorno aparente de la zona intermedia que contiene las otras diez caras triangulares en *e*5*a*, *a*1*b*, ... etc., los superiores aquí inversos, y 4*e*5, 5*a*1, etc., los superiores aquí directos.

Proyección vertical: A partir de la L de T trácese la diagonal eje vertical del poliedro en V′V″ indefinida, y márquense sobre dicha vertical á partir del punto más bajo V″ las tres alturas V″-4′, 4′-*b′*, *b′*-V′ dentro las cuales han de ir comprendidas las tres zonas; estas alturas se encontrarán mediante las siguientes consideraciones. Dentro la primera altura V′4′ existe la pirámide pentagonal invertida de vértice V″; una de sus aristas, proyectada horizontalmente es la 1-V y en el espacio forma la

esto, concretémonos primero á la parte de esta línea, concerniente á las pirámides superior é inferior.

Para la primera, busquemos la sombra del vértice V' sobre el plano horizontal $a'c'$ base de la pirámide; este punto resulta ser el β, β', traza sobre dicho plano del rayo luminoso que pasa por V, V'; es evidente ahora, que existiendo en la pirámide dos aristas divisorias, su sombra arrojada sobre el plano de base será tal que, la de ambas habrá de concurrir en el punto β, y á la vez cada una de ellas ha de rasar por la base, pues que será el primer punto de dicha sombra; luego, trácese por β dos rectas βc, βe que rasen á dicha base, y así ellas nos indicarán que las aristas $V'c'$, Ve' en el plano vertical y las Vc, Ve en el horizontal, serán las líneas de la pirámide que formarán parte de la línea divisoria total del claro y del obscuro. Es lógico ahora, que igual operación repetida en la pirámide inferior que aparece reversa, nos suministrara las otras dos aristas tales como V''-5', V''-2', V-5, V-2. De aquí deducimos, que concluyendo la sombra propia en los puntos c' y e' en la pirámide superior así como en 5' y 2' en la inferior, claro está que esto por sí solo indica, que la

hipotenusa de un triángulo rectángulo, en que uno de los catetos es dicha proyección 1-V, y el otro cateto la altura que buscamos. Mas, aquí, esta hipotenusa es igual al lado del pentágono inscrito á la circunferencia $e5a1$, etc., mientras que el cateto conocido ó sea la proyección horizontal 1-V del lado considerado es el radio de la propia circunferencia, luego se infiere en virtud del teorema (A) invocado en la nota anterior y concerniente á la Geometría elemental, que el otro cateto ó altura ha de ser igual al lado a-5 del decágono inscrito en la propia circunferencia. Luego puede concluirse de aquí, que la altura $V''4'$ de la pirámide que constituye la primera zona, es igual al lado a-5 del decágono inscrito en la circunferencia de radio V-5=R; por lo que dispóngase á esta distancia a-5, la altura del plano horizontal 5'-3' y sobre él, proyéctense los cinco vértices 1', 2', 3', 4', 5' de base de la pirámide inferior.

La altura $4'$-b' de la zona intermedia, es igual al radio R de la circunferencia $a5e4$, etc. En efecto, si imaginamos el triángulo 1'-4'-b' que está situado en el espacio en el plano vertical proyectante de la arista 1'-b, 1-b' en el plano horizontal, veremos que la altura de la zona intermedia viene formando el cateto de este triángulo, en donde el otro cateto es el lado del decágono y la hipotenusa el lado del pentágono, ambos inscritos en la circunferencia de radio R luego en virtud del teorema (A) de la nota anterior, dicho primer cateto ó altura será el radio R de dicha circunferencia.

Tómese pues dicho radio Va y colóquese en altura en el plano vertical en $4'$-b' conduciendo á esta altura el plano horizontal $a'c'$, sobre el cual se proyectarán los vértices a', b', c', d', e' que pertenecen á la base de la pirámide superior. Finalmente, $b'V'$ de la tercera zona es exactamente igual á la V''-4', que corresponde á la zona inferior.

unión de 2' con c' y de 5' con e' nos darán otras dos aristas de división de la sombra propia, concerniente á la zona intermedia; así esta línea divisoria es la quebrada que pasa por los vértices $V'c'2'$, $V''5'e'$.

Para su sombra arrojada ahora, encuéntrese en primer lugar la sombra del vértice superior; ésta viene á caer sobre el plano vertical en S, mas como las trazas verticales de los rayos luminosos que pasan por c' y e' vienen en C y E, de aquí que SC, SE son la sombra arrojada de las aristas $V'c'$, $V'e'$.

En cuanto á la pirámide inferior, su sombra arrojada partirá del mismo punto V, siendo así las dos rectas V-5'', V-2'' contenidas aquí en el mismo plano horizontal, viniendo substituído aquí por α el punto β auxiliar que antes teníamos para la pirámide superior. Por último, la recta 2-c, 2'-c' cae arrojada por sombra quebrantada, cayendo parte en Cm sobre el plano vertical y parte en $m2''$ en el plano horizontal. La traza horizontal q del rayo que pasa por c, nos dará el punto auxiliar que unido con 2'' dará la parte $2''m$, y de ella deducir la mC. El trecho $5''n$ paralelo á $2''m$, y el nE paralelo al mC.

57. Combinación de sombras entre varios cuerpos.— Primero. Sombra de un paralelepípedo horizontal sobre planos verticales en resalto unos de otros.—Lám. 5.ª, figura 54. Este ejemplo puede considerarse como un ejercicio análogo, al que se origina cuando se trata de encontrar la sombra arrojada de la repisa de un balcón sobre la fachada en donde sobresale. También por otra parte es algo semejante, al que tiene por objeto encontrar las sombras que arroja la fachada de un edificio sobre otros cuerpos más atrasados. Los cuerpos salientes son los expresados en planta por B, C, D, E, cuales están coronados por el paralelepípedo A, el que se proyecta horizontalmente según el rectángulo $qmnx$; y el rayo luminoso se supone á 45° con la línea de tierra. En primer lugar, hagámonos cargo de la primera parte, ó sea la sombra arrojada de A sobre los cuerpos inferiores, y para esto, á simple vista ya se observa que la línea divisoria de luz y sombra del paralelepípedo mencionado está constituído por las rectas qm que se proyecta verticalmente en m''; luego, la paralela á la línea de tierra mn, $m''n'$ sigue la vertical del punto n, cual es $n'n''$ y finaliza con la arista nx, que como

es perpendicular al plano vertical, tiene por referencia en éste el punto n''. Empezando pues la marcha de los rayos luminosos por la arista que se proyecta en m'', estos rayos al rasar por ella, engendrarán un plano perpendicular al plano vertical, cuya traza homónima será la m''K paralela á la dirección de los rayos luminosos, así es, que esta m''K será ya parte de la sombra de la arista la cual cae arrojada así en el plano de proyección vertical, mientras que la restante sombra de dicha recta cae en el plano de perfil *ah*, y se proyecta toda entera en el punto K por ser perpendicular al plano de proyección vertical, toda vez que viene producida por la intersección de dos planos (el de perfil y el de sombra), ambos á dos perpendiculares á dicho plano de proyección. Mas al llegar el rayo luminoso en la posición *ma*, abandona el rase de *mq* para apoyarse en cambio en la *mn*, así es, que forma en el movimiento un plano de sombra que será paralelo á la línea de tierra, ésta es la razón porque al prolongarse vendrá á cortar á los paramentos verticales B, C, D, etc., según rectas K*l*, *qp*, *rs*, *tu*, todas paralelas á la original $m''n'$, así es, que bastará encontrar un punto para cada una de ellas, para que así queden completamente determinadas. A este efecto, observemos que el punto *a*-K ya pertenece á la sombra arrojada del punto extremo m″, condúzcase pues Kl horizontal en la extensión del ancho del paramento *ab*, mas al llegar al punto *l b*, el rayo luminoso va á herir en *q*-*q'* al paramento más atrasado C-C', arrojándose entonces la arista en *qp*; por la misma razón al llegar el rayo luminoso en *p*-*d* rasando la arista vertical correspondiente, entonces tiene más libre paso y se prolonga hasta quebrarse en *r*-*r'* en el paramento D-D', cortando á éste el plano de sombra según la línea *rs*. En *s* el rayo luminoso ya rasa por la arista *f* prosiguiendo aún más camino el rayo luminoso hasta cortar al paramento más atrasado en el punto *t*, desde el cual, todo el resto de la línea original cae sobre el paramento más retrasado en la línea horizontal *tu*, obedeciendo por lo tanto el punto *u* á la sombra arrojada del *n*-*n'*.

El rayo luminoso, rasa luego sobre la vertical $n'n''$, describe un plano vertical cuya traza aprovechable será *nv*, como sombra arrojada de la mentada arista $n'n''$; siguiendo en seguida la dirección de la recta *nx*, n'', describe un plano perpendicular al plano vertical, el rayo luminoso R^v se confunde con la traza vertical del plano de sombra, cuya, sirve

también de sombra arrojada del borde superior *nx*, sobre dicho plano vertical.

En segundo lugar ahora la arista saliente que se proyecta en el punto *b*, sirve de directriz al rayo luminoso, que engendra en su movimiento un plano vertical cuya traza horizontal es *bq'*, y al mismo tiempo, sombra arrojada sobre el plano horizontal, de frente de aquella arista; mas al llegar al punto *q'*, el plano de sombra corta al paramento C según la vertical $q''q$, cuya, con evidencia es la sombra arrojada sobre C, del resto de la arista vertical M*l*; del propio modo irían determinándose las sucesivas en *r'r*, *t't*, etc.

Mas si bien consideramos dichas sombras podían encontrarse más brevemente si cabe, aplicando el principio del núm. 20-2°, para cuando se trata, como en el caso actual del rayo luminoso inclinado en sus proyecciones, de 45° con la L de T; todo, pues, quedaría reducido á tomar los vuelos α, β, γ, δ, y colocarlos en contra altura de la horizontal $m''n'$, en α', β', γ', δ', trazando en seguida las horizontales *kl*, *qp*, *rs*, *tu*, y en cuanto á las sombras verticales, tomando las salidas *bc*, *de*, *fg*, y colocarlas en Mq'', Nr'', Pt'', y conduciendo por q'', r'', t'', las verticales de sombra.

Obsérvese finalmente, que la misma traza de los muros en resalto *abcdefgh* viene reproducida, en este caso particular, en la línea de sombra *kl*-*qp*-*rs*-*tu*, lo cual permite trazarla rápidamente.

58. Segundo. **Sombra de un muro y pedestal sobre una escalera.** (Fig. 55).—Los peldaños de la escalera, designados por T, T', T'',... etc., están comprendidos entre dos muretes, cuyas testas, están terminadas con unos como pedestales Δ, coronados por un objeto cualquiera tal como representa el dado Σ, terminado por una pirámide cuadrangular S'VK.

El conjunto de semejantes datos, puede tener por objeto, como por ejemplo, la escalera para un jardín, salvando los desniveles de dos terraplenes. El rayo luminoso, es de dirección cualquiera como R^v-R^h. La simple inspección de la figura, demuestra desde luego, que la arista *a*-*a'* a'', del zócalo, es línea de separación de luz y sombra, por lo tanto, el rayo luminoso al resbalar por ellos, engendra un plano de sombra vertical, el cual corta en *a* α'', al plano horizontal, y luego con la vertical α'', a_1 α', al plano vertical del peldaño T, sien-

do el punto α', la sombra arrojada del punto α; más muy luego el mismo plano de sombra que media desde α á a', corta á la huella del propio peldaño T, en la recta $\alpha''\alpha'''$, $\alpha'\alpha''$ resultando con esto que la sombra arrojada, de toda la arista $a\ a'$-a'', se compone de tres partes que son, $a\alpha''$, $a_1\alpha'$ y la $\alpha''\alpha'''$.

En seguida el rayo luminoso, rasa por el pequeño bisel ab, $a'b'$, mas como este aquí está contenido junto con los rayos luminosos que por él rasan en un plano de sombra perpendicular al plano vertical, esa es la razón, porque la sombra de dicho bisel, en su canto, vendrá á arrojarse en $\alpha'''\beta'$-α^{IV}, según una recta perpendicular á dicho plano y contenida sobre la huella de T.

Sigue, como á directriz del rayo, la vertical $b'e$, la cual parte cae arrojada su sombra, hasta en $\beta'c'$, sobre el plano horizontal de huella del peldaño T, parte en la vertical $c''d'$, sobre la altura delantera del peldaño T′, parte en $c'e$, sobre la huella de este mismo T′, y finalmente parte en la vertical $e'e''$, sobre la altura delantera del peldaño T″, siendo e'' la sombra del punto e, cual rayo al rasar por e, se apoya al mismo tiempo en el punto E, perteneciente á la línea inferior 3-f, del ábaco del pedestal; y es así, porque como el ábaco vuela sobre la moldura inferior, arroja la sombra sobre ésta en $3'$-e, cuya, es una horizontal, conducida por $3'$, producido por la intersección del rayo $3''$-$3'''$, sobre el plinto de Δ. Lo propio sucederá con la sombra 2_1n, que arroja el filete 1-2 G-H, sobre el ábaco inferior, encontrándola con el auxilio del rayo $2'$-$3''$, 2-2_1 al encontrar en el punto 2_1, $3''$, al plano vertical de dicho ábaco. Mas volviendo á la sombra arrojada de la arista $b'e$, téngase en cuenta, que en proyección horizontal, vendrá expresada por una sola recta $\beta'e$, en atención á estar contenida toda ella en un plano vertical de sombra, y por lo tanto proyectarse confundiéndose con la misma traza horizontal de dicho plano.

Mas de la posición Ee, el rayo resbala por la arista horizontal Ef y ésta por ser paralela á la cara vertical del peldaño T″, su sombra $e''f'$, será igual y paralela á ella; sigue luego el rase por la pequeña arista fn, la cual como la anterior; su sombra estará en $f'n'$, igual y paralela á ella; pero el mismo rayo se apoya también en N, y eso por sí solo demuestra que al continuar su camino el rayo, lo hace siguiendo la horizontal NG, que continua su sombra, siendo también igual y paralela á ella en $n'g'$.

Al llegar en G, sube el rayo, lamiendo la arista GH, del filete, engendra un plano vertical de sombra, viniendo á caer arrojada en $g'h'$, sobre la huella del peldaño T″; su último punto h, se halla por medio de la traza del rayo que parte del punto H; sobre el plano horizontal de la mencionada huella.

Por último, el rayo luminoso, resbala por la arista horizontal y perpendicular al plano vertical; cual es H-G′G_1, engendrando un plano de sombra perpendicular al propio plano vertical, quedando la sombra arrojada, confundida en el plano de proyección homónimo con el mismo rayo luminoso, ó sea según la traza vertical Hh' del referido plano de sombra, de modo que ahora las intersecciones de dicho plano, con las horizontales de huella, nos darán en el plano horizontal los trechos en resalto hh'', zz', pp', qq', cuales serán la parte correspondiente de la mencionada arista que cae arrojada sobre dichas huellas.

Sin embargo, esta dicha última sombra, queda en parte modificada en virtud de combinarse con ella, la que proviene del cuerpo Σ, colocado sobre el pedestal; procede, pues, encontrar la sombra de dicho cuerpo.

Como superiormente está terminado por una pirámide, empecemos determinando ante todo la sombra de ésta, asi como la del dado que la sustenta; sobre el plano horizontal 1-H; las aristas S, b, verticales, del dado ó paralelepípedo, serán las divisorias de luz y sombra, arrojándose paralelamente al rayo luminoso en SS‴, aR, mientras que si hacemos pasar por el vértice V-V′ un rayo de luz, éste tendrá por traza, sobre el plano horizontal 1-H, el punto φ'-x', de aquí se infiere, que la unión de S‴ con x, dará la recta S‴s, como á sombra arrojada de la arista V′S de la pirámide sobre dicho plano horizontal, así también se reconoce que la sombra propia de dicha pirámide está comprendida en Snb.

Mas en virtud de que la sombra arrojada anterior sumerge al trecho Rs de la arista superior del muro lateral, se infiere, que el rayo luminoso que pasa por s, y se apoya en L_1, prosigue su camino en el espacio, hasta que corta en l-l' al plano vertical delantero del peldaño T^{IV}, lo cual también significa que el trecho L_1V', de la arista de la pirámide, cae arrojada en $l'v'$, sobre dicha altura de peldaño; su determinación es sumamente expedita una vez obtenido el punto l', puesto que $v\,v'$ es la traza del rayo luminoso que pasa por V-V′ con el plano vertical del peldaño T^{IV}.

En cuanto á la otra arista $V'b$, de separación de luz y sombra de la pirámide, produce una sombra arrojada compuesta de varias partes la $v'i$, sobre la altura del peldaño T^{IV}; la $i'm'$ sobre la huella del peldaño T''', y la mk sobre la altura del mismo peldaño T'''. Su determinación será también fácil, partimos del punto h''-h', en que más antes hemos dejado la sombra. En efecto, el rayo Hh', prolongado superiormente, se apoya en H_1 para resbalar en seguida por la vertical H_1k, así esta pequeña vertical, se proyecta en sombra igual á si misma en la vertical h_1k, mas á partir de k, viene la sombra arrojada de la arista Vk, para deducirla encontremos en θ, θ' la sombra auxiliar del vértice V-V' contra el plano vertical del peldaño T''', y obtenida que sea, unámosla con k, aprovechando de estas líneas tan solo el trecho mk, que corresponde al límite del peldaño; más ya en posesión de esta línea, bastará ahora trazar por el punto v' una paralela á ella tal como la $v'i$, así como unir i' con m' en $i'm'$, y así obtener en la primera la parte de sombra arrojada de parte de la arista Vk sobre el plano vertical del peldaño T^{IV}, y en la segunda la otra parte de la misma arista, que resulta arrojada sobre la huella del peldaño T'''.

59. Tercero. **Otro ejemplo de escalera.**—Sin planta y el rayo luminoso inclinado de 45° sus proyecciones con la L de T (fig. 56). Sólo si, se da el alzado y la sección, al objeto de conocer las salidas ó vuelos de los distintos objetos.

El muro lateral que encajona la escalera, no está ya terminado como en el caso anterior, por un plano horizontal, y en su lugar termina con un plano inclinado con la misma pendiente que lleva la andanada de peldaños.

Los muretes en rampa, son, pues, los E, E', vistos de frente ó alzado, mientras que en la sección dada por la línea eje longitudinal de la escalera, todo este murete puede verse en E'', junto con el macizo G que constituye el muro de asiento posterior, y en ambos dibujos, está el rayo luminoso con las condiciones fijadas en el dato. Con estas condiciones, la sombra arrojada de las líneas inclinadas paralelas á la AB, proyectada de perfil, es fácil de determinar.

En efecto, supongamos escogido un punto a de dicha línea, cuyo, referido en la sección corresponde al a', y propongamos buscar su sombra arrojada, y para ello conduzcamos por él un rayo luminoso R (punto a) y R' (proyección a'), y como el R', corta en c al paramento vertical AD, de aquí se infiere ser c el punto de sombra que arroja el a', cuyo punto referido en el alzado sobre la proyección correspondiente del rayo luminoso, vendrá en b. Ahora bien, este punto así como todos sus análogos, guardan una cierta relación con respecto á la línea de inclinación de la rampa; y para convencernos de ello y buscar dicha relación, conduzcamos por a', la horizontal $a'd$, formando el triángulo $A'da'$, rectángulo y semejante al A'DB'; llamemos m la altura $A'd$ y n la base da', será evidente que la relación $\frac{m}{n}$, expresará la pendiente ó inclinación que lleva la recta A'B', con respecto al plano horizontal.

Mas por otra parte, por ser el triángulo cda' rectángulo é isósceles, dá, $da'=dc=n$, luego la altura $A'c=Ac'=Aa+ac'=m+n$.

El triángulo $ac'b$ también es rectángulo é isósceles y dará $ac'=c'b=n$; así, pues, reasumiendo: siendo b la sombra de a, resulta que Ab será la sombra de la arista inclinada de la parte externa y superior del murete E' arista que como sabemos, está en un plano de perfil é inclinada de la pendiente $\frac{m}{n}$, su sombra, pues, sobre el paramento vertical de donde parte, forma en proyección vertical el triángulo rectángulo $Ac'b$, cuyo cateto vertical es $m+n$, y cuyo cateto horizontal es igual á n, luego se infiere, que la recta de sombra tendrá una pendiente expresada por $\frac{m+n}{n}$. Esta propiedad conviene tenerla presente, pues permite abreviar las operaciones, toda vez que conocida que sea su inclinación, un punto conocido de ella, como por ejemplo, el de partida A, nos bastará para trazarla desde luego, sin que tengamos que pasar por ninguna construcción; con arreglo á este principio se han encontrado, las pequeñas sombras triangulares, 1, 2, 3, 4, 5,... etc., que sobre los peldaños arroja, la arista interna superior del otro murete; ellas son todas iguales, por lo que conocida una, pueden las otras reproducirse.

Para fijar mejor las ideas y generalizar esta propiedad, que se verifica siempre que el rayo luminoso venga con la inclinación de que se trata, apliquémosla en algunos ejemplos prácticos; así se supone que la recta es perpendicular al plano de proyección vertical, su pendiente será igual á cero,

esto es, nula, mientras que su sombra será igual á $\frac{1}{1}$, ó lo que es lo mismo, será la hipotenusa de un triángulo, rectángulo é isósceles, y por la tanto estará inclinada á 45°, lo que ya hemos tenido ocasión de observar repetidas veces.

Si es una recta la que se da en un plano de perfil, inclinada á 45° con el horizonte, ella tendrá una pendiente de $\frac{1}{1}$, al paso que la pendiente de su sombra será igual á $\frac{1+1}{1}=\frac{2}{1}$, lo que significa que será la hipotenusa de un triángulo rectángulo, en que el cateto vertical será igual á 2, y el horizontal igual á 1.

La pendiente de una rampa de escalera está inclinada en general en la relación de $\frac{1}{2}$, así es que si se considera una recta en un plano de perfil, y que lleve aquella inclinación, resultará que su sombra sobre el plano vertical llevará una pendiente de $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$, esto es, la hipotenusa de un triángulo rectángulo, en donde el cateto vertical será igual á 3 y el horizontal igual á dos, y así sucesivamente podríamos ir deduciendo las inclinaciones respectivas de las sombras arrojadas, de rectas con pendientes conocidas, pero estando contenidas en planos de perfil, y tratándose de rayos luminosos, cuyas dos proyecciones formasen ángulos de 45° con la L. de T.

60. Sombra de un cañón de chimenea sobre un tejado.—En la fig. 57 se representa la cubierta de un edificio, considerada en uno de sus extremos en donde se origina un ángulo triedro en A, formado por la intersección de dos planos de faldón LBAC, CAT'D, y el plano del peto ó faldón de testa BA"T', los dos primeros trapeciales y proyectados verticalmente en C'A'BL planos paralelos á la L de T, y el tercero proyectado verticalmente según la sola recta A'B, pues es perpendicular al plano de proyección vertical.

En el faldón anterior sobresale un tubo de chimenea de forma prismática rectangular *s2dy*, proyectada su base verticalmente, también en un rectángulo *s'Gd'y'*, y luego con una altura limitada en el plano horizontal $a'a_1$, con más, coro-

nado por un remate, que aquí es el paralelepípedo $maa'''h$, $m'a'a_2h'$, con semejantes datos, y siendo R^v R^h, el rayo de luz, se quiere ahora determinar la sombra de esta chimenea sobre las tres caras inclinadas del Trifaldón.

Atención hecha á la disposición de la luz, para con respecto al cuerpo de la chimenea, descubrimos en seguida que la arista horizontal que se proyecta verticalmente en el punto a' así como la horizontal $a'a^2$-aa''', son de división de luz y sombra, la primera engendra el plano de sombra $a'b'$, el cual corta según la horizontal b', á la cara de perfil z'G, esta horizontal se ve más claramente en $\beta b''$; plano nuevo de proyección vertical, escogido para completar mejor las operaciones. Mas como quiera que el punto a, es el último de la horizontal ma, y su sombra cae arrojada en b,b'', esto es, en el interno de la cara ó plano vertical $2s$, de aquí es que caiga sobre esta misma cara parte de la sombra que arroje la línea que viene en pos de la primera en el rase, cual es la aa''', $a'a_2$, y siendo ella perpendicular á dicho plano vertical $2s$, se infiere que el trecho de su sombra á considerar, se confundirá con la misma proyección vertical $b''b'''$ (fig. 57') del rayo luminoso que pasa por a^{IV}, ó lo que es lo mismo decir en este caso, se confundirá con la misma traza vertical del plano de sombra. Al llegar al punto b''', la sombra del resto de la arista $a'a_2$ cae arrojada sobre el plano vertical de frente $z'Gd'$, haciéndolo según la horizontal $b'_1\gamma$, siendo γ-d su último punto que obedece al originario a_1'-a''; más la arista vertical $\gamma d'$, divide también una cara iluminada, de otra obscura, luego el rayo $a_1\gamma$, descendiendo por $\gamma d'$, corta al plano de pendiente según la recta $d'\alpha'$, proyectada horizontalmente según la misma dirección $d\alpha$ del rayo luminoso, y en cuanto al punto α-α', extremo de esta sombra, se encontrará con el auxilio de la recta dD, d'D', sección del plano proyectante del rayo luminoso; con el plano de la pendiente del tejado, en cuya recta es evidente que se hallará el punto en cuestión, cuando aquélla esté cortada por el rayo de luz, que parte de γ, rasando al mismo tiempo por a_1.

Mas á partir del punto a_1, el rayo luminoso rasa por la horizontal a_1a_2, más como ésta es paralela al plano de cubierta, claro está que sobre ella quedará proyectada su sombra según la recta αe, $\alpha' e'$ igual y paralela á su originaria. Emprende luego el camino el rayo luminoso resbalando por la vertical a'''-a_2h' así engendra un plano vertical, y la som-

bra de toda dicha arista viene arrojada en *eg*, confundiéndose con la misma traza horizontal del plano de sombra, aunque puede observarse que en el espacio esta sombra se compone de dos partes distintas, la una *ef-e'f'* que corresponde al faldón longitudinal anterior, y la otra *fg-f'g'* situada en el peto, ó faldón de testa. Esta última, si bien se confunde con la traza vertical del plano A'B de dicho peto, aparece sin embargo más independiente en *f''g''*, en el plano vertical auxiliar cuya línea de tierra es L'T'.

Continúa el rayo luminoso resbalando por la arista superior *h'-a'''h*, más como quiera que esta recta es paralela al plano del peto, se proyectará su sombra sobre éste en *gg'''*, esto es, según una recta igual y paralela á aquélla, cuya recta, si bien se proyecta en un punto *g'* en el plano vertical LT, en cambio en el L'T' viene dispuesta en mejores condiciones para el conjunto como expresa la $g''g^{IV}$.

Desde el vértice *h* cambia otra vez la directriz del rayo luminoso, y éste se apoya en la arista superior *h'm'*, y de tal suerte que el plano de sombra que produzca cortará en *lg'''* al plano del peto, y en *lv* al plano de faldón posterior, siendo ésta *lv* paralela á la original *mh*, por ser *mh* paralela al plano de dicho faldón; así, pues, la sombra total de *mh* estará quebrantada y será la expresada en *vlg'''*, de la cual el punto *l*, situado en la intersección de los dos planos de cubierta será muy fácil encontrarlo, en virtud de que el plano de sombra resulta ser perpendicular al vertical de proyección L'T', así es que proyectándose todo lo en él contenido en su misma traza vertical *h''l''* paralela al mismo rayo luminoso R', dicho plano viene cortando al plano de pendiente A''B, según la horizontal que se proyecta en *l''* y ésta trasladada en proyección horizontal suministra en definitiva el punto *l*, cual ahora puede referirse en *l'* en el primitivo plano de proyección vertical LT.

El rayo luminoso resbala después por la arista vertical *m*, produce la sombra arrojada en *nv* confundida con la traza horizontal del plano de sombra, obteniéndose su último punto *n*, encontrando en el plano vertical L'T' el punto de intersección *n''* del rayo luminoso que pasa por el punto *m''*, con el plano inclinado A''B. Mas al llegar al punto *m-a'* cambia la directriz, siendo entonces ésta la arista inferior *a'-mt*, cuya sombra arrojada sobre la cubierta del tejado, se compone de dos partes, cuales son *nq* y *qr*, la primera sobre el faldón posterior,

y la segunda en el faldón anterior. El punto del quebranto *q*, se obtendrá, ya que sabemos á priori que se ha de proyectar verticalmente en el punto A''; trazando por este A'' un rayo luminoso, el cual nos indicará que apoyándose en el punto *p'*, éste será el originario del *q*, por consiguiente, proyéctase ahora *p'* en el plano horizontal en *p*, y el rayo luminoso que por el pase dará en definitiva el punto *q'*, que unido con *n*, dará el trecho de sombra *qn*, cuya, tiene por originaria el trecho *mp*. En cuanto á la otra parte de la sombra *qr*, se hallará, teniendo en cuenta que el último originario *t-t'*, lo fija el rayo luminoso *ts*, que rasa por la vertical de *s*, por lo tanto ya en posesión de *t'* trácese por él, un rayo paralelo á R' éste corta en *r''-r* al faldón anterior, dando con ello el trecho de sombra arrojada *qr* con más *rs*, sombra arrojada de la vertical del punto *s* y en donde termina la sombra.

Este problema ha sido á propósito para que se tenga cabal idea del partido que se puede sacar en circunstancias especiales, introduciendo un nuevo plano de proyección vertical, pues éste, aparte de precisar mejor las operaciones, las abrevía suprimiendo al efecto construcciones que de otra suerte sería forzoso efectuar; viniendo en general indicados estos nuevos planos de proyección cuando la mayor parte de superficies que reciben las sombras arrojadas ó propias sean susceptibles por ser ortogonales con respecto á estos nuevos planos de proyectarse en ellos en simples líneas, ya sean rectas si se trata de planos, ya sean curvas, si por ejemplo se trata de cilindros; pues como todo lo contenido ya sea en el plano ó en el cilindro, vendrá proyectado en sus mencionadas trazas, de aquí sea que con simples referencias podamos pasar de estos puntos auxiliares á los reales y efectivos de resultado.

61. Quinto. **Sombras combinadas de una pirámide con dos prismas uno recto y otro oblícuo** (fig. 58).—Los dos prismas son: el recto en A-A', el oblícuo en B-B', inclinado descansando sobre una arista del primero; la pirámide en C-C' delante de los primeros; así dispuestos, se irán produciendo sombras los unos sobre los otros con arreglo al rayo luminoso $R^v R^h$.

Sombra de la pirámide.—Es evidente que si empezamos encontrando la sombra *v* del vértice de la pirámide, por ella pasarán las sombras arrojadas de las aristas que sean divi-

sorias de luz y sombra. Hágase, pues, pasar por V^v-V^h un rayo luminoso, encuéntrese luego la traza de este rayo sobre el plano de proyección á cual corte primero; aquí el plano horizontal, trazando por este punto dos líneas v-5, v-3, rasantes á la base de la pirámide, éstas indicarán las sombras arrojadas sobre el plano horizontal de la pirámide en cuestión, siendo las aristas V-5V-3 las que dividen la sombra propia de la región iluminada de la misma pirámide.

Mas esta sombra se encuentra interrumpida en virtud de la presencia del cuerpo B-B'; y en efecto, la recta v-3, al encontrar en c, á la traza horizontal del prisma, indica que á partir de dicho punto la sombra cae arrojada sobre el plano vertical ag; encontremos al efecto otro punto, pues el c ya es uno de ellos; imaginemos á este fin el rayo de luz que pasa por la cúspide V, este rayo corta á dicho plano vertical en el punto r_1-r_1'; luego la recta cr_1, $c'r_1'$ es la sombra que buscamos, la cual, como es evidente, aprovecharemos de ella la sección conveniente á cq, $c'q'$, única que está comprendida en el justo límite de la cara vertical del prisma comprendida entre las dos aristas $a'e'$; $c'g'$.

Más á partir del punto q-q', la sombra de la arista 3-V', cae arrojada sobre la cara siguiente del prisma, según la recta qt, $q't'$, intersección del plano de sombra correspondiente, con el plano bae, su último punto t-t', se encontrará, haciendo pasar por el rayo luminoso, que pasa por V, el plano vertical que la proyecta horizontalmente; este plano cortará al de la cara bae, según la recta r_1-z, $x'z'$. Y finalmente, esta contenida en un mismo plano con el rayo luminoso se encontrarán en s,s', por lo que, uniendo s con t, la recta que resulte será con evidencia la sombra de la arista, de la pirámide, sobre la cara del prisma en cuestión; pero dicha línea se aprovechará no mas hasta el punto, t,t', que es por donde pasa la otra arista que limita la cara del prisma.

En cuanto á la otra arista V^h-5, ya hemos dicho que venía arrojada en 5-v, pero aquí, lo propio que en la arista 3-V^h nos encontraremos que el prisma B, la empieza á interrumpir en el punto o, arrojándose en seguida sobre el plano bae, según la recta op, $o'p'$, cuya determinación es fácil, con sólo tener en cuenta, que ya anteriormente hemos encontrado el punto s,s' como punto auxiliar de la sombra que arrojaría el vértice de la pirámide sobre la cara bae, prolongada; luego este mismo punto, puede ahora servirnos, con sólo

unirlo con o, y aprovechar de la recta que así resulta, tan sólo el hecho que alcance el punto p, de arista pf.

"Sombra del prisma B." Esta se encontrará con suma facilidad á pesar de encontrarse el prisma inclinado al horizonte, toda vez que se apoya en el plano horizontal según el rectángulo de base, $abcd$, y termina en la parte superior según un rectángulo $eghf$, situado también en un plano horizontal. Ahora, infiriéndose de momento que la cara vertical bh, está en sombra, siendo la línea bf, divisoria de luz y sombra, hágase pasar por f-f' un rayo luminoso, éste corta al plano horizontal en el punto φ, y así resulta ser la recta $b\varphi$ la sombra arrojada de la arista bf; pero fh es línea de separación de luz y sombra, y ya hemos dicho que era horizontal, su sombra arrojada pues será la $\varphi\psi$, igual y paralela á aquélla; por igual razón trazando por ψ la recta $\varphi\zeta$, igual y paralela á gh, nos dará la sombra arrojada por ésta última, y por último, como el rayo luminoso pasa ahora por la arista gc, su sombra arrojada será la $c\xi$, la cual ha de resultar paralela como es notorio á la antes trazada por $b\varphi$.

En este estado obsérvase que el prisma B se apoya sobre el A en el trecho de la arista horizontal m_1n_1, y como m_1 pertenece á la arista cg, divisoria de luz y sombra, eso mismo indica que parte del trecho m_1g, caerá arrojado sobre el prisma A', á este efecto trácese por m_1 la recta m_1r'' paralela á la dirección $b\varphi$, pues siendo la base superior del prisma A, horizontal; se verificará el principio de que, dos planos paralelos cortados por un tercero las intersecciones son paralelas.

"Sombra del prisma A." Este siendo un prisma recto, su sombra arrojada se determinará desde luego en $l\mu\nu xm$ siguiendo el procedimiento visto ya en otros casos.

Como á verificaciones tendremos, que las sombras arrojadas, se combinarán dándonos puntos de intersección por los cuales podranse comprobar, otros ya obtenidos de antemano, y en dichos puntos también se verificará que uno de los contornos arrojados entrará inmergido en el otro. Así por ejemplo, el punto p'' por situar en la intersección de las líneas arrojadas $b\varphi$, pv, si de él hacemos partir un rayo luminoso, éste rasará en p sobre la arista bf del prisma B, y también sobre el punto π de la arista V^h5, demostrando ello que el trecho de la arista pt cae inmergido en $p''\theta$ dentro de la sombra arrojada de la pirámide; pues por el punto de in-

tersección θ puede hacerse igual consideración que el p''; así el rayo luminoso que parte de θ, rasará en t y en θ'. Hágase igual consideración para el punto r y así el rayo luminoso que parte de él, rasará por r' y r''. Lo propio observaremos con p_1 cual rayo luminoso, se apoya á la vez que en e y en m, teniendo con ello lugar la inmersión de la sombra arrojada del prisma A en la del prisma B.

Vemos pues que semejantes puntos p'', θ, r, p_1, en que se van cortando los contornos interceptando en parte, las sombras arrojadas, son de suma importancia pues con ellos por medio de contraproyecciones oblícuas pueden hallarse fácilmente, los puntos de las líneas de intersección producidas cuando un cuerpo arroja sombra sobre otro.

62. Sexto: **Sombra en el interior de una habitación** (fig. 59).—El recinto de esta habitación, está demarcado con paredes ó muros expresados por la letra Δ, y en proyección vertical está vista, por medio de un corte longitudinal que pasa por el eje CH'' de la misma; en dichos muros van practicadas dos aberturas, la de la izquierda, representa la mitad de una puerta P, y la de la derecha, una ventana; además, al objeto de complicar algún tanto la sombra, se dibuja otra abertura L, dispuesta en el techo de sala ó estancia; sea ahora $R^v R^h$, el rayo de luz.

En primer lugar, la arista saliente vertical A''', de la puerta, divide visiblemente una cara iluminada de otra obscura, por ella rasa un rayo de luz, que produce en el movimiento un plano, éste prolongado da el plano de sombra que corta en la vertical a'-$a''a$, al plano B''δ, así $a''a$ es la sombra arrojada, sobre el citado plano de la vertical A''', más el rayo de luz A'''a'-A''a, cuando llega á esta altura, se apoya sobre el punto A' de la arista del dintel de la puerta, y emprende el camino rasando por dicho dintel, más como la recta A-A'C', es perpendicular al plano vertical, por eso el plano engendrado será también perpendicular al propio plano, y así la sombra de la arista A'C, se confundirá, parte de ella con la traza vertical del plano y vendrá parte en AA'', sobre la jamba de la puerta, y parte en aB' sobre el muro δB'', así proseguiría continuando á no existir el resalto en B'', y caerá finalmente en el plano horizontal en bc, igual y paralela á BC, del trecho de la recta original; más á partir del punto C el rayo rasa por la horizontal CD-AD' del corte del dintel, y la som-

bra de esta línea viene arrojada, en el plano horizontal según la recta cd igual y paralela á aquélla. Asciende luego el rayo por la vertical D-D'P, y la sombra de ésta coincidirá con df traza horizontal del plano de sombra correspondiente. Desde el punto P, parte la arista horizontal PG-DG', la cual por su disposición, se comprende en seguida que su sombra arrojada sobre el plano horizontal será una recta fk paralela á aquélla; pero en k concluye el muro de frente, partiendo del ángulo k, el muro de la sala situado en la parte lateral, sobre este muro pues ahora caerá la prosecución de la sombra de la horizontal PG, hasta el momento en que llegue á alcanzar en el corte, á la arista inferior, δ'β, del batiente ó antepecho de la ventana que se señala en V-V', y es que ahora la va á recibir dicho batiente en xγ_3, paralela también á aquélla, pero á partir de γ_3 el rayo luminoso, deja de interesar á este plano horizontal de batiente, y teniendo el camino libre, por facilitarlo así el hueco de la ventana; se prolonga hasta cortar otra vez al plano horizontal en el punto γ, extendiéndose la sombra arrojada de la arista, en el trecho $\gamma\beta_1$, prolongación de la ya trazada anteriormente en fk. Ahora al proseguir su camino el rayo luminoso por el último trecho de la horizontal β_1 G' vuelve á caer arrojada sobre el muro lateral, comprendido entre βG'.

Más volviendo al rayo luminoso en la última posición que le hemos dejado, cual es $\beta_2\beta_1$, vemos que rasa por la arista vertical β jamba de la ventana, y así esta vertical, arrojará su sombra, parte en ββ' sobre el plano del batiente, y el resto en $\beta_3\beta_1$ sobre el plano horizontal de proyección, y ambos trechos, como se comprende, vendrán confundidos por la misma proyección horizontal del rayo luminoso.

Finalmente, el rayo luminoso á partir de β' resbalará por la arista exterior del batiente $\beta'\gamma_3$ produciendo con ello la sombra arrojada $\beta_3\gamma$ igual y paralela á su originaria; y si ahora tenemos en cuenta que la arista vertical H'' arroja su sombra en el plano horizontal, en H''h; así como la horizontal H-H'H'' la arroja en el plano vertical en Hh', nos haremos cargo del conjunto de la sombra arrojada exterior, cuya masa general está interrumpida por el claro que deja el triángulo $\gamma\beta_3\beta_1$, en virtud de permitir el hueco de la ventana el paso de los rayos luminosos, que tienen así el camino expedito, combinándose con ello, las sombras de algunas de las aristas de la ventana, con la que corresponde á la horizontal PG-DG'.

Por otra parte obsérvase que la vertical B″-B‴B′ arrojará sombra sobre el plano horizontal en B″*b* siendo *b* la sombra que corresponde á B′, é irá á combinarse con la que antes hemos encontrado en *bcd*.

Falta tan sólo ocuparnos del lucernario cuadrado situado en el techo de la sala; para eso partiendo nuestras observaciones de la arista M perpendicular al plano vertical, veremos que empezará arrojando sombra, sobre la caja del lucernario en la recta MM‴ confundida con el mismo rayo luminoso, proyéctese ahora M‴ sobre el plano horizontal, en M″, y con ello veremos que el rayo luminoso al llegar en M‴-M″ prosigue su marcha en el espacio hasta encontrar el plano vertical de proyección en el punto *m*, resbalando en seguida por la horizontal M‴Q″-M″S, la cual por su disposición especial, su sombra, *ms* es paralela é igual á la misma; cambia luego de directriz el rayo y emprende el camino, resbalando por la arista Q″ perpendicular al plano vertical, así produce una sombra arrojada *sq* sobre el plano de proyección vertical, sombra que como es notorio, se confundirá con el mismo rayo luminoso. Más si prolongamos éste hasta obtener el punto Q, que proyectaremos horizontalmente en Q′, esto por sí mismo nos indicará, que el punto Q′, será tal, que de él, partirá el rayo luminoso para resbalar sobre la horizontal N′ Q′-MQ, y en tal situación la sombra de esta recta será *nq*, igual y paralela á ella misma; y por fin, al llegar en el punto N′ vuelve á emprender el camino resbalando sobre la perpendicular al plano vertical M′-N′M′ y produce la sombra arrojada, *nm*, concluyendo ésta en el mismo punto *m* de donde se ha partido.



CAPÍTULO IV

Sombra de las superficies desarrollables

63. Propiedades fundamentales.—Sabido es que cuando al engendrar una superficie, ésta admite una recta por generatriz; entra en la denominación de las superficies regladas, y cuando á esta propiedad se añade la condición en la ley del movimiento, que cada dos posiciones consecutivas de dicha generatriz, estén situadas en un plano, entonces dicha superficie, pertenece á la agrupación de las llamadas *desarrollables:* esto es que de las que gozan la singular propiedad, de poderse extender en un plano, sin que exista en el desarrollo ningún pliegue, ni la menor solución de continuidad que menoscabe la extensión de la misma.

Como á consecuencia de estar en un mismo plano dos generatrices inmediatamente próximas, trae ella misma consigo que estas dos generatrices han de cortarse, así es que si unimos todos los citados puntos de intersección, se obtiene en su lugar geométrico en una línea curva; ésta es la que se conoce por *arista de retroceso* de la propia superficie, llamándose así, por dividir á esta última en dos hojas tales, que si en una de ellas concebimos un punto, y le imprimimos un movimiento, siempre caminando sobre estas hojas y en la dirección que se quiera, pero que llegue un momento que encuentre á la mencionada arista, entonces al pasar sobre la otra hoja, siguiendo el mentado movimiento; experimentará la trayectoria recorrida, un punto de retroceso, situado en la arista de este nombre.

Redúcese á un solo punto la arista de retroceso, cuando todas las generatrices. pasan precisamente en un punto, entonces se forma la superficie *cónica*, teniendo por vértice el citado punto.

Y cuando se considera el caso particular, de ser todas las generatrices paralelas, en este caso, la arista de retroceso se traslada al infinito, formándose con ello el *Cilindro*.

De todos modos, la arista de retroceso es tangente á todas las generatrices de la superficie, y semejante propiedad es tan importante, que cuando de antemano se conoce la índole de esta curva; así como su transformada en el desarrollo, sirve ella perfectamente de base de operaciones, para llevarlo á cabo, con suma facilidad.

También la teoría de las sombras, se vale frecuentemente de dicha curva, para solucionar el problema, invocando al mismo tiempo con ella la propiedad del plano tangente, de serlo á lo largo de la generatriz de contacto.

Son varios los sistemas de generación, que pueden emplearse para el engendro de una superficie desarrollable, y de todos ellos se hace aplicación en la teoría de las sombras, escogiendo el operador el más á propósito, según las condiciones del problema, el foco ó rayo de luz, y la propiedad ó carácter particular de la superficie desarrollable, pues aunque si bien todas ellas pertenecen á una misma familia, eso no obsta para que se diferencien unas de otras, por ciertos accidentes innatos á cada una de ellas.

Reasumiremos pues estos distintos modos de generación, como á recuerdo solamente de lo visto y ampliado en la Geometría Descriptiva.

El ser desarrollable, ya indica eso por si sólo una condición, así es que bastará imponer otras dos condiciones, para que las generatrices vengan completamente determinadas, estas dos condiciones pueden ser.

1.° Que la generatriz resbale sobre dos curvas A y B, directrices cuales pueden ser ya planas, ya alabeadas. *

* Sea (fig. A, lám. 6.ª), *a* un punto tomado sobre la directriz A, y trátase de trazar la generatriz que parte de dicho punto; siendo ya trazada la tangente *ab*, á la curva A en el propio punto.

El plano tangente en *a*, es evidente que contendrá la tangente *ab*, más también habrá de contener una tangente de la curva B, esto es en aquel punto, en donde la generatriz de contacto la corte. Con este fin pues, concibamos el cono de vértice el punto *a*, y por base la curva B, y tracémosle una vez formado un plano tangente, que contenga la dicha recta *ab*; este plano será tangente á la superficie desarrollable, mientras que la generatriz de contacto *ac*, con el cono, será la generatriz de la superficie desarrollable que nos habremos propuesto conducir por el punto *a*.

2.° Que las directrices sean una línea curva y un cuerpo al cual haya la generatriz de permanecer constantemente tangente. *

3.° Que las directrices sean una línea curva y un cono director, al cual hayan de ser paralelas las generatrices que se obtengan. **

4.° Puede darse la superficie desarrollable, por medio de una línea curva cualquiera, pero alabeada, sujetando entonces el movimiento de la recta generatriz á que permanezca constantemente tangente en todas sus posiciones, á esta curva, cuya no será otra cosa que la arista de retroceso.

5.° Una superficie desarrollable, puede también considerarse como la envolviente de las posiciones sucesivas de un plano, que se mueve según una ley continua y determinada; así por ejemplo, las condiciones pueden ser las siguientes.

a) Dada una curva C sobre una superficie cualquiera Σ, imponer al plano P, la condición de moverse, siendo constantemente tangente á dicha superficie, en cada uno de los puntos de la curva C.

b) Dada una curva C, imponer al plano P, la condición de moverse, siendo constantemente normal á dicha curva.

c) Exigir que el plano móvil P, sea constantemente osculador, de una curva dada C.

d) Que el plano móvil P, esté sujeto á moverse, conservándose siempre tangente á dos superficies dadas Σ, Σ', con

* (Lám. 6.ª, fig. B). El procedimiento para fijar una generatriz en este caso, puede reducirse á lo siguiente. Sea el punto *a* en la directriz A, aquel en que se quiera pase la generatriz; constrúyase el cono *abecf*, de vértice *a*, circunscrito á la superficie Σ, al mismo tiempo que se traza la tangente *ad*, á la curva A; en este estado diríjase por la tangente *ad*, planos tangentes al cono, los cuales proporcionarán las generatrices de contacto *ae*, *af*, cuyas serán generatrices de la superficie desarrollable.

** (Lám. 6.ª, fig. C). Sea la curva A y el cono director C, escójase el punto *a*, por donde se quiera pase la generatriz; trácese en *a*, la tangente *ab*, á la curva A, así como luego, un plano tangente al cono; paralelo á la recta *ab*; y á este efecto, hágase pasar por el vértice V, la recta V*d*, paralela á *ab*, encontrando su intersección *d*, con el plano de la base del cono Si desde *d*, se dirije la tangente *dc*, á la base del cono, entonces el sistema de las dos rectas *cd*, *c*V, será el plano tangente al cono, cuya generatriz de contacto, resultará ser la *c*V, y finalmente, la paralela á ella tal como *ef*, dirigida por el punto *a*, será la generatriz buscada, perteneciente á la superficie desarrollable.

solo la restricción, de que dichas superficies no sean desarrollables, pues se comprende perfectamente, que de serlo, no sería casi nunca factible realizar el movimiento con los requisitos impuestos, toda vez que el plano tangente entonces lo sería á lo largo de una generatriz, y esto por si solo equivale ya á una condición; tendremos con ello mas condiciones de las que se deben imponer; sin embargo de serlo solamente una de las superficies Σ, por ejemplo, en este caso, es muy frecuente sea posible el problema, según la índole de la superficie Σ', aunque el número de soluciones sea en este caso finito, y el número de generatrices obtenidas, no sería suficiente, para tomar con ellas en consideración la superficie desarrollable que nos interesa *.

Vistos estos preliminares pasemos á estudiar las sombras de semejante género de superficie, empezando por la más elemental; el Cilindro.

CILINDRO

64. Cilindro recto.—(Lámina 6.ª, fig. 60). Sea un cilindro recto de base circular descansando sobre el plano horizontal, por dicha su base cuyo centro es o'. El rayo luminoso es R^v, R^h. Expuesto así á la luz este cilindro Σ, Σ', sucederá que por su posición especial, los rayos luminosos límites formarán ún plano tangente á dicho cilindro, plano que será vertical, y por lo tanto la línea divisoria de luz y sombra, la formará la generatriz de contacto de dicho plano con el cilindro; más como aquí es de revolución ó si se quiere terminado en la base por una curva cerrada de segundo grado, de aquí

* (Lám. 6.ª, fig. D). La generatriz de la superficie, en el caso de admitir dos superficies directrices Σ, Σ', se determinará con la siguiente construcción.

Escójase un plano P, cualquiera; construyendo en seguida dos cilindros de contacto, á Σ, Σ', cuya dirección sea perpendicular á P, ello nos dará dos curvas de contacto la una abc, en Σ, y la otra edf; en Σ'; además encuéntrense la intersección de ambos cilindros con el Plano P, ó sean las curvas $a'b'c'$, $e'd'f'$, proyecciones de las primeras sobre el plano P; en este estado, diríjase una tangente común, á dichas dos últimas líneas, y sea ésta la mn, finalmente si nos hacemos cargo ahora de los puntos de tangencia m y n, y los contraproyectamos en m' y n' sobre las curvas primitivas, tendremos que la unión de m' con n', nos dará la $m'n'$, como generatriz buscada de la superficie desarrollable.

Escogiendo ahora otro plano P' y repitiendo análogas operaciones llegaremos á obtener otra generatriz, y así sucesivamente.

es que existirán dos planos tangentes, cuyos, quedarán determinados trazando por C y A dos tangentes Cf, Aa_1 paralelas á R^h; desde este momento, se infiere ya, que siendo ab, y cd estas generatrices de contacto, ellas serán las líneas divisorias de luz y sombra, á las cuales se unirá la semicircunferencia de la base superior CBA que también forma parte de la línea divisoria.

En este estado es sumamente sencillo buscar su sombra arrojada, pues la de la vertical ab cae en Aa_1 confundida con la misma traza del plano tangente; lo propio sucede con Cf sombra arrojada de la cd; pero aquí aparece también sombra arrojada de parte de la misma arista, sobre el plano vertical en fc_1, apareciendo con ello la sombra interrumpida en f.

En cuanto la línea curva de base ABC, parte de ella vendrá arrojada en el plano horizontal según el trecho de circunferencia $a_1\delta$ de igual radio que la originaria, cuyo centro ω, será la traza horizontal, de una recta paralela al rayo luminoso que pasa por O'-O; y en cuanto á lo restante de la curva vendrá á arrojarse en el plano vertical según el trecho de elipse $\delta e 2 c_1$; sus distintos puntos se encontrarán buscando las trazas verticales de los rayos de sombra que pasen por los puntos originales. En el punto c_1 la curva será tangente á $c_1 f$, pues el plano vertical corta á la vez al plano de sombra y al cilindro de sombra cuyos son respectivamente tangentes. En el punto 2 la tangente es horizontal, pues obedece, al punto originario G-O cuyo tangente á la base es paralela á la línea de tierra.

65. Cilindro paralelo á la L de T.—Fig. 61. Este ejercicio se resuelve aquí sin emplear plano horizontal, únicamente se supone estar en posesión de las distancias respectivas del objeto al plano vertical, todo, en virtud de emplear un rayo luminoso, en que sus proyecciones, formen ángulos de 45° con la línea de tierra. Con esto, el cilindro está dado con solo el rectángulo Σ y suponiendo que sea de revolución. Para la mejor marcha de las operaciones, imagínese que las circunferencias proyectadas en los planos de perfil, ó sean sus bases ab, FE se les circunscriben los cuadrados correspondientes, así en el espacio; tendremos realmente al cilindro, inscrito en un paralelepípedo, y encontrando la sombra de éste, será fácil alojar en ella la del cilindro; y para ello todo quedará reducido, á efectuar construcciones análogas que

las llevadas á cabo en el número 43; con este fin tomemos sobre la vertical del punto a, las distancias $a\alpha$, $a\beta$ iguales á la separación que existe al plano vertical, de los dos vértices superiores del cuadrado de base, conduciendo luego por α y β horizontales iguales á las referidas distancias; sabemos ya que los puntos que resulten en 1 y 4 serán los de la sombra de los vértices en cuestión. Dibújense en seguida las verticales 1-2, 4 3 iguales cada una de ellas, al lado ab, cerrando en seguida el paralelógramo 1-2-3-4; éste será la sombra del cuadrado de una de las bases. La sombra de la otra base está en 1'-2'-3'-4', igual y paralela á la primera y ambas á dos separadas de las distancias $\omega\omega'$ igual á O-O'; así es que sin pasar por aquellas operaciones, bastará tan solo, suponer un movimiento de traslación, en la dirección $\omega\omega'$ del paralelógramo 1-2-3-4, hasta que se haya confundido con 1'-2'-3'-4', lo cual sucederá cuando ω se haya confundido con ω'.

Hechas ya estas operaciones, circunscríbase una elipse á cada paralelógramo, cuyas se podrán trazar con facilidad trazando por el centro ω las dos transversales $a'b'$,dc, pues ellas, nos proporcionan inmediatamente, dos diámetros conjugados, así como cuatro puntos y otras tantas tangentes. Con las diagonales 1-3, 2-4 otros cuatro puntos podrían encontrarse, insiguiendo lo dicho en el núm. 43, así se podrá construir la elipse de centro ω, con toda la exactitud posible; iguales operaciones se reproducirán para la elipse de centro ω'. Trácense finalmente á estas dos elipses las tangentes horizontales límites que pasan por los puntos f, e, y se tendrá así en lo interno de las líneas producidas, la parte de sombra arrojada del cilindro sobre el plano vertical.

De esta sombra arrojada puede ahora deducirse por contraproyección, la sombra propia; en efecto por los puntos de tangencia f, e diríjanse rectas paralelas al rayo luminoso, éstos con evidencia serán rayos de sombra que bornoso, éstos con evidencia serán rayos de sombra que bordearán á la base circular en los puntos f', e', por los cuales si conducimos rectas tales como f'F, e'E paralelas á las generatrices del cilindro, ellas serán las líneas de sombra propia del mismo, y serán originarias de las sombras arrojadas, encontradas en ff''-ee''.

66. Cilindro oblicuo.—Fig. 62.—El cilindro es el expresado por C^v C^h, y R el rayo luminoso, la base de la superficie es circular de centro O-O'. Las líneas de separación de

luz y sombra estarán formadas por las generatrices de contacto de este cilindro, con planos tangentes paralelos al rayo luminoso; de aquí se infiere, que los planos de sombra confundidos con estos tangentes, vienen dados por la condición de ser paralelos á la vez á dos rectas conocidas, cuales son: la una el rayo luminoso, y la otra la que represente la dirección del cilindro; si pues, en un punto cualquiera del espacio se hacen pasar dos rectas, que tengan respectivamente aquellas direcciones, el plano que por ellas pase, será paralelo á á los que buscamos tangentes al cilindro. A este fin, por el punto ω, ω', trácese una paralela al rayo de luz, y como por el citado punto pasa también el eje del cilindro, búsquense las trazas de estas dos rectas, y con su auxilio determínense las trazas del plano Oxv, que por ellas pasa, y como quiera que las trazas horizontales de los planos tangentes ó de sombra, han de ser rectas tangentes á la base circular del cilindro, condúzcanse las tangentes af, ce, paralelas á la traza horizontal Ox; así estas dos últimas tangentes, determinan los puntos de tangencia á la base a, c, de modo que conduciendo por ellos las ab, cd, paralelas al eje del cilindro, estas serán las líneas de separación de luz y sombra sobre el cilindro, cuales podrán proyectarse desde luego en $a'b'$, $c'd'$ sobre el plano vertical.

En cuanto á la sombra arrojada, queda comprendida en el plano horizontal, dentro del perímetro $afec$, al paso que en el plano vertical, parte de los puntos f, e; siendo fg la que corresponde á la generatriz $a'b'$, por ser el punto g, sombra arrojada del b', de todos modos esta recta fg, ha de resultar como á comprobación, paralela á la traza vertical xv del plano auxiliar anteriormente trazado. Mas á partir del punto b-b', el rayo luminoso resbala ya por la semicircunferencia de base bmd, describe un cilindro, y éste es cortado por el plano vertical según el trozo de elipse ghk, cual podrá determinarse en sus distintos puntos, buscando las trazas verticales de los rayos luminosos, ó bien por sus diámetros conjugados, ó sus ejes (núm. 41). Para precisar la curva podríase encontrar su punto culminante h, el cual como es notorio, obedecería á un plano tangente al cilindro, cuya traza horizontal rs fuese paralela á la LT, y sabido es que éste no puede cortar á los planos de proyección mas que en una recta que tenga semejante posición. Por último, el trecho rectilíneo ek, corresponde á la sombra arrojada del res-

to que quedaba de la línea originaria *cd*, después de estar arrojada en *ce* sobre el plano horizontal.

67. 2.° Caso (lám. 7.ª, fig. 64).—Cuando el cilindro está dado por una curva alabeada cualquiera, *abc*, *a'b'c'*, y la dirección de sus generatrices. Concíbase entonces puntos situados sobre la curva, haciendo pasar por ellos rectas paralelas á la mencionada dirección, encontrando en seguida las trazas horizontales de las mismas, cuyos puntos unidos nos darán la curva $a'' b'' c'' d''$. Ahora estaremos ya en el caso del párrafo número 65; así es que escogiendo un punto cualquiera tal como *a'*, y conduciendo por él, dos rectas paralelas la una al rayo luminoso y la otra á una generatriz del cilindro, estas rectas formarán un plano, paralelo al que buscamos; de modo que siendo su traza horizontal ta'', la paralela á ella *sr*, á la vez que tangente á la traza $a'' b'' c'' d''$, nos precisará en el punto de tangencia *x*, la traza horizontal de la línea divisoria de luz y sombra *xz-x'z'* que podremos trazar desde luego, paralela á la dirección general del cilindro.

68. 3.er Caso.—Se supone aquí (fig. 65), que el cilindro está en condiciones tales, de no ser posible el empleo de sus bases para la determinación de la sombra; en semejante disposición, nada más fácil que recurrir á un plano cualquiera secante, para que sustituya á aquella base, y aun para facilitar mejor la construcción, dicho plano se escogerá paralelo al rayo luminoso y perpendicular á uno de los planos de proyección, el que resulte más ventajoso; el plano vertical por ejemplo (núm. 21). Este plano viene representado en nuestra figura por AB, corta al cilindro según una sección fácil de determinar, y á la que se trazarán en seguida tangentes paralelas al rayo luminoso, trácense luego los puntos de tangencia *m* y *n*, deduciremos por ellos las generatrices *ma'*, *nb'*, ellas serán las líneas de separación de la sombra propia con la parte iluminada, cuales dedicaremos sus proyecciones verticales, pudiendo encontrar con esto su sombra por los procedimientos comunes.

69. Sombras combinadas de varios cilindros.—(Lámina 6.ª, fig. 63). El cilindro Θ, es horizontal, descansando, sobre el otro cilindro Δ, también horizontal, y sobre el prisma vertical P; además existe un tercer cilindro Σ inclinado al hori-

zonte apoyándose sobre el cilindro anterior Δ. La disposición de estos cuerpos, se ha fijado, con arreglo á una proyección vertical auxiliar, fig. 63', en la cual, el plano vertical de referencia, es paralelo á los cilindros Σ y Θ á la vez que perpendicular al Δ. El rayo luminoso es el $R^v R^h$, el cual referido en el plano vertical auxiliar viene expresado en R'

Obtenido así el dato con los planos cuya línea de tierra, es L' T', ya será fácil deducir la proyección vertical definitiva cuya línea de tierra, es L-T. En este estado propongámonos encontrar las sombras combinadas que entre sí producen los referidos cuerpos, arrojándose aquéllas ya en unos ó ya en otros de las superficies de los mismos.

En primer lugar, determinemos la sombra de uno de ellos, que en general se escoge el más saliente, ó más separado del plano vertical, pues así su sombra arrojada, á medida que se va encontrando, da medio para formar criterio de las operaciones ulteriores; este cuerpo es aquí el cilindro Σ; en este concepto, prolongemos este cilindro hasta que corte al plano horizontal, y así obtendremos la elipse $f\varphi' f'\varphi$ como á traza horizontal del cilindro, y que momentáneamente podrá servir de base, así estaremos en el caso del núm. 65 y podremos resolver como allí el problema de la sombra. *

Escójase un punto cualquiera, el O-O' por ejemplo, trazando por él, una recta paralela al cilindro, y otra al rayo luminoso, búsquense sus trazas horizontales ω, τ, y la recta ωτ, que así resulta será traza horizontal de un plano paralelo á los tangentes al cilindro, que son á la vez planos límites de sombra. Si pues ahora se trazan dos tangentes á la base, paralelas á la ω τ, éstas serán las que partan de los puntos de tangencia *t*, *t'*, en dirección á t'', la primera, y en dirección á t''', la segunda linea recta, que á no existir, los demas cuerpos, serían ellas las sombras arrojadas sobre el plano horizontal de las generatrices de Σ, que dividen el claro de lo obscuro; estas generatrices quedan determinadas, conduciendo por

* Aquí admitimos este procedimiento, porque estando muy próximo el plano de proyección horizontal, del propio cilindro, tenemos que se ha de prolongar muy poco el cilindo para que sea cortado por aquél, más de haber tenido que prolongar mucho el cilindro y darnos la curva de sección á una distancia incómoda, ó tener puntos inaccesibles, entonces acudiríamos á otros procedimientos vistos. Por otra parte, siendo elipse la curva de sección, ya de momento se descubre que sus ejes son iguales el mayor á la recta $p''f_1$ y el menor, proyectado en el punto φ'', resulta igual al diámetro de la base del cilindro.

t y t' las rectas tc', $t'a'$ paralelas á la dirección del cilindro, pero que aprovecharemos en su justo límite, de $a'1$ y $c'2$, proyectándolas verticalmente en $a''1'$, $c''2'$. La base inferior, queda ahora deslindada en dos partes, la anterior $c'ia'$, y la posterior $c'fa'$ la segunda es línea divisoria de luz y sombra, y los rayos luminosos que por ella rasan, cortan al plano horizontal, según el trozo de elipse cfa, cuyos puntos se irán encontrando por medio de las trazas horizontales de los respectivos rayos luminosos teniendo en cuenta que f, por sí mismo ya es un punto de esta curva. Semejantes construcciones pueden llevarse á cabo para mayor facilidad empleando el plano de la fig. 63'. Para más detalle en el trazado de esta curva, recuérdese lo dicho en el (núm. 45).

Mas de concluirse ya la directriz curvílinea en el punto a'-a^{IV}, empieza el rayo resbalando, por la generatriz $a^{IV}1''$ cayendo arrojada en el plano horizontal, tan sólo en el pequeño trecho de recta ag'', cuya originaria es la $a^{IV}g'''$. Mas luego al seguir ascendiendo de g''' á d''; corta al cilindro Δ, según la curva deg''; su determinación será fácil, pues está producida dicha curva por la sección del plano de sombra que pasa por $g'''d''$; con el cilindro, es pues aquí una elipse, proyectada en el plano 63' como confundida con la circunferencia Δ'', sección recta del cilindro horizontal que representa; así pues, un punto cualquiera de la curva se obtendrá, escogiendo un punto e'-e'', sobre la generatriz, trazando por él un rayo luminoso; éste cortará en e''', á la base circular Δ'', proyectándolo en seguida en e, en el plano horizontal y sobre el rayo luminoso correspondiente, así determinaremos los demás, teniendo en cuenta que bajo el punto de vista utilitario el punto d será el último, el cual obedece, al rayo luminoso que pasa por d'', y es tangente en d''', á la base circular. En este punto d, se verificará (núm. 27) que la curva será tangente al rayo luminoso. Esta curva así obtenida en proyección horizontal deduciremos su proyección vertical en g_1, e_1 d^{IV}, con el auxilio de las alturas que nos proporciona el alzado de la (fig. 63').

Por sus diámetros conjugados ó por sus ejes, se hubiera podido determinar esta curva, ya valiéndonos de cuerdas conjugadas ó ya valiéndonos de un plano vertical auxiliar de proyección perpendicular, al plano de sombra, que rasa por la generatriz a'-1, pero aquí en este caso particular hubiéramos alargado demasiado las operaciones.

Téngase en cuenta ahora, que considerando análogamente la otra generatriz de contacto c'-2, como línea divisoria, ésta nos daría, en cg_1 su sombra sobre el plano horizontal y luego en $g_2e_2d_3$, $g'_1e'_1d_2$, la sombra sobre el cilindro ΔΔ', todo repitiendo las mismas operaciones inmediatamente anteriores. En d_3-d_2, la tangente á la curva también se confundiría con el rayo luminoso.

Mas el rayo de luz, después de ser tangente en d, al cilindro Δ, prosigue su camino en el espacio, y encuentra en δ'-δ, al prisma P, arrojándose la sombra de la generatriz en δ'J-δJ', cuyo último punto J-J', se encontrará ensayando otro rayo luminoso cualquiera como por ejemplo el $A^{IV}H$, que pasa por un punto de la arista vertical H; este rayo corta á la cara HC del prisma en el punto H', así es que H'δ será la intersección del plano de sombra con el vertical HC, y de esta intersección aprovecharemos tan sólo el trecho δJ'; á partir del punto J'-J, corta el plano de sombra al plano de base superior del prisma según la recta Jk', en una dirección paralela á $g''t'$, pues dos planos paralelos cortados por un tercero, las intersecciones producidas son paralelas.

Finalmente, el plano de sombra corta al plano horizontal de proyección según la $k''t'''$ y después al vertical según la t'''-$1'_0$ y entonces el rayo, abandona en 1'', la generatriz de sombra y emprende el camino resbalando por el arco superior de base 1-3-2, engendrando un cilindro cuya intersección con el plano vertical es la curva de sombra arrojada 1_0-3''-2'', luego el rayo, resbala por la otra generatriz 2 c', siendo su sombra arrojada, parte la 2''-t'' paralela á 1_0-t''' y parte en el plano horizontal en $t''c$, pero esta última quedará cubierta muy en breve en el trecho $\beta'c$ por las sombras de los demás cuerpos.

Pasemos ahora á la sombra del cilindro Δ, la cual se encontrará rápidamente si acudimos al plano fig. 63'; pues que encontrándose allí el cilindro perpendicular á dicho plano, los planos tangentes, paralelos al rayo luminoso, vendrán dados directamente, trazando las tangentes á la base circular, en d''', g^{V}, paralelas al rayo R'; los puntos d''', g^{V}, así encontrados, son proyecciones de generatrices de contacto, líneas de división de luz y sombra, proyectadas horizontalmente en $d^{VII}d^{VI}$, $g^{VII}g^{VI}$ las cuales empiezan ya á combinarse con las sombras de los cuerpos anteriores; á partir de los puntos d, d_3 y g_2 g''.

La sombra arrojada del cilindro $\triangle$, se compondrá de la que corresponde á las generatrices encontradas. Así la de $d^{VI}d^{VII}$, será la d^8n paralela á aquella. Y luego el pequeño ge- trecho que recibe el plano vertical en ns en cuanto á la neratriz inferior, su sombra $m_1m'_1$ cae entera en el plano horizontal, muy próxima con la generatriz más baja g_1'', figura 63, ó sea la misma proyección horizontal del eje en el plano de la fig. 63'; la determinación de estas rectas las facilita, usando el plano L'T', pues la simple prolongación de las tangentes en d''', g^V, hasta que corten á la línea de tierra, darán los puntos d_1^9, g_1'', en donde se proyectan verticalmente estas líneas de sombra arrojada, y de ellos deducir las proyecciones horizontales.

Ahora entre los puntos m_1', d^8, media la curva $m'_1\, m'\, d^8$, arrojada por la curva original que parte, de d^{VI} pasa por m y concluye en g^{VI}, así como la otra base circular del mismo cilindro $\triangle$, en la parte que bordea el círculo en $d^{VII}\, l'\, g^{VII}$ produce la sombra arrojada en el plano horizontal en m_1lp y prn.

Las sombras de esta clase que caen sobre el plano horizontal, pueden encontrarse fácilmente con el auxilio de la figura 63', según es de ver en las construcciones que allí constan, y esta simplicidad consiste, en que, en dicha figura, estas curvas se confunden con la L'T', razón por la cual se presenta muy expedito, trazar dichas líneas por medio de sus ejes ó también por sus diámetros conjugados.

Más antes de pasar adelante con las sombras del cuerpo $\triangle$, conviene pasar á determinar la del cilindro Θ, así como la del prisma P; para el primero, escogeremos un nuevo plano vertical L''T'', cuya posición sea perpendicular á dicho cilindro Θ, y así éste vendrá expresado en la fig. 63'', en el círculo Θ''', el rayo luminoso referido á este plano es ahora R'', de modo, que con semejante disposición, las tangentes paralelas al rayo luminoso determinarán los puntos de tangencia v, v', y con ellos las generatrices de contacto v_1v_3, v_2v_4, líneas divisorias de luz y sombra propia. Veamos ahora la que arroja; en primer lugar, el arco de base $v_3'5''v'_4$, esta cae arrojada en parte en la curva 7-8-6, sobre el cilindro Δ, y parte sobre el plano horizontal en la curva E'5'v_5; la primera se encontrará, utilizando el plano L'T', pues allí la curva que se busca se confunde directamente con el perímetro de base Δ'', y así con sólo escoger puntos entre v_9v_7, y trazar rayos luminosos, éstos cortando á la circunferencia Δ'', nos darán los puntos

de sombra, que proyectaremos en el plano horizontal de la figura 63, y de allí al plano vertical de la propia figura. En cuanto á la segunda curva, es preferible utilizar el plano vertical L''T'', por resultar más cómodo escoger directamente los puntos sobre la base circular Θ''', conforme es de ver en la figura, encontrando en seguida los puntos arrojados por confundirse la curva en proyección vertical con la L''T', aunque si bien esta segunda ventaja la teníamos también en la fig. 63'.

La generatriz v_3v_1, arroja su sombra en el plano horizontal, en $v_5\theta$, según una paralela á la original, más á partir del punto θ, la sombra es curvilínea, pues proviene de la intersección de los rayos de sombra cuando los rayos de luz han resbalado por la base circular posterior en el trecho v_1Fv_2; así es que encontrando las trazas de estos rayos de sombra, prolongación de los rayos luminosos á que nos referimos se obtendrá las curvas en los trechos que median entre θx, xnj, $j\varphi\psi$, la primera y tercera en el plano horizontal y la segunda en el plano vertical, porque la restante cae inmergida en la sombra arrojada del prisma P.

Entremos ya á la combinación de las sombras arrojadas, haciendo con ellas un estudio particular para ver lo que se desprende del mismo

En primer lugar, si nos fijamos en el punto de sombra arrojada E' este proviene de la intersección de la recta E'd^8, con la curva E'5'v_5; así es que si hacemos partir de este punto E' un rayo de sombra, éste prolongado, será tangente en el punto 6 del cilindro $\triangle$ así como, al mismo tiempo se apoyará en 6', punto del círculo de base anterior del cilindro Θ; eso pues, quiere indicar, que á partir del punto 6' la sombra arrojada de la arista circular 6 v_4, viene arrojada en el cilindro $\triangle$; esta curva viene expresada en 6-8-7 y su construcción se ha de llevar á cabo en la fig. 63'; haciendo pasar rayos luminosos desde el punto 6'' en que el rayo es tangente á $\triangle''$, hasta el que corresponde á la posición v_7-v_4, pues á partir de este último punto tiene lugar otra sombra arrojada 7 9 que proviene de la arista inferior horizontal, v_4v_2, en la cual se apoyarán también rayos luminosos, los cuales, lo mismo que los primeros, cortarán á la circunferencia $\triangle''$, y de allí deducir los puntos en el plano horizontal, obteniendo así en conjunto la línea compuesta 9-7-8-6, cuya, podremos referir al plano vertical de la misma figura 63.

Si buscamos ahora la sombra arrojada del prisma P, ésta vemos que cae toda entera en el plano horizontal, en el contorno BB'D'C'C, el cual viene inmergido en la sombra arrojada, de los otros cuerpos analizados; únicamente sí, aparece un pequeño trecho de la arista BD que continua siendo línea de división de luz y sombra, este trecho es el $k'\psi'$ que ya lo indica de por sí la porción arrojada $k''\psi$ interceptada por la recta $K''t'''$ y la curva $\psi\varphi j$; para con respecto al punto K'', si por él imaginamos un rayo de sombra, éste prolongado rasará en K', y luego más prolongado será tangente al cilindro Δ en un punto de la generatriz 1-a'; más ya hemos dicho anteriormente, que á partir de dicho punto la sombra de dicha generatriz, era arrojada en K'J, sobre el plano superior del prisma.

Pero si consideramos en seguida el punto ψ, éste, valiéndonos de un rayo de sombra, veremos, que tiene por originario el punto ψ' por el cual rasa dicho rayo, el cual más prolongado será tangente al cilindro Θ, en un punto de la generatriz de contacto inferior; por lo tanto, este hecho indica que el pequeño trecho $F'\psi$, que cae dentro de la sombra del prisma, no puede llegar á cortar al plano horizontal, por recibirle antes la cara superior del prisma P, produciendo en él la sombra arrojada $\psi'v$; más después de dicha sombra curvilínea $v\psi'$ sigue un trecho rectilíneo v-q sombra arrojada de la arista inferior del trecho v_2r, pero que muy luego, prolongada ésta de q á z' ésta se presentará oculta. Mas al llegar al punto z', el rayo será $z'z''$, y al emprender nuevamente su camino, cortará á la cara vertical HC según la recta $z\pi$; el punto π se encuentra por medio del π', haciendo pasar por éste un rayo de sombra el cual cortará en π á la arista vertical del punto C; en este estado el rayo de sombra $C\omega''$ recorre el trecho de directriz $\omega''\mu$, cuyo trecho de recta se arrojará libremente sobre el plano horizontal en $\pi'\mu'$ igual y paralela á la original. La última posición del rayo luminoso cual es la $'\mu\mu'$ aparece, siendo tangente al cilindro Δ, en el punto 9, á partir del cual, el rayo luminoso, resbala por vv_4, arrojando este trecho de generatriz, sombra sobre el cilindro Δ en el trecho de curva 9-7 y finalmente á partir de v_4, el rayo luminoso resbala sobre la arista circular de la base anterior del cilindro Θ, produciendo sobre él la línea de sombra 7-8-6, en cuyo punto 6 vuelve á ser tangente el rayo al cilindro Δ, y teniendo ya libre el paso, se prolonga hasta cortar

al plano horizontal en el punto E' como ya más antes hemos manifestado.

Obsérvase ahora que la sombra arrojada n - d^8 de la generatriz d^{VI} d^{VII}, del cilindro Δ; es tal que queda interceptada en los puntos μ'-ω', por las líneas de sombra del prisma P y del cilindro Θ; este trecho, pues, $\omega'\mu'$ no está inmergido, no puede ser, sombra parásita y tendrá, por lo tanto, su recta original de donde procede; esta recta es el pequeño trecho de generatriz que parte del punto 9, y precisada con el auxilio del plano auxiliar de la fig. 63'; vemos, pues, que el trecho $\pi\omega$, de la vertical C del prisma P es línea divisoria de luz y sombra, en razón del claro, producido dentro del triángulo, $\pi'\mu'\omega'$ formado por la intersección de la cara vertical HC con los planos de sombra del cilindro Δ' y del correspondiente Θ.

70. Molduras cilíndricas.—Sabida es la importancia que tienen las molduras, dentro la decoración arquitectónica, sirviendo para deslindar de una manera graduada á la par que determinan y acentúan mejor las distintas partes del monumento, comunicando más belleza al conjunto, evita la monotonía que aparece con la muy repetida uniformidad y así consigue cumplir con una entendida variedad, dentro de un conjunto que no pierde, antes al contrario adquiere, la unidad que cada edificio en su género á de revestir. Las molduras son simples y compuestas, figuran en las primeras, aquellas, en que la sección recta, del cilindro que las informa, está formada por una sola línea, perteneciendo á la segunda agrupación, cuando dicha sección recta está formada por varias líneas. Veremos las más principales.

71. Caveto.—La sección recta del cilindro, es un cuarto de círculo, considerado en su parte cóncava y así (lám. 7.ª, figura 66), si consideramos dos cilindros rectos, A y B, cortándose en ángulo recto, y cada uno terminado por sección recta el cuarto de circunferencia *cdefgz*, cuyo centro es el punto *o*, entonces cada uno de estos cilindros formarán un caveto, y son tales, que se cortan según una curva plana, proyectada horizontalmente, según la diagonal $a'j'$, mientras que en el plano vertical, la intersección se confunde con la propia curva de sección recta. Sea ahora $R^v R^h$ el rayo luminoso y procedamos según él, á determinar la sombra sobre dicho caveto. Esta sombra es tal que la produce, arrojada

sobre si mismo el cilindro de la moldura. No hay más que observar la posición del rayo para con respecto á los dos cilindros, y distinguir, en seguida que el cilindro B está de lleno expuesto á los rayos luminosos, mientras que por el contrario, el A, está en parte opuesto á los mismos, indicándolo así los rayos luminosos, al rasar por la arista de intersección *a'j'*, *cgz*. Ya con este intento, hemos escogido el plano de proyección vertical, que fuese perpendicular á uno de los cilindros, el A, por ejemplo; pues con tal disposición, se facilita en gran manera el problema de las sombras, toda vez que la línea de intersección de los rayos luminosos, restante, y que encuentran á la superficie de dicho A, vendrán confundiéndose, con la misma curva *cgz*, de la cual podrá inferirse desde luego la que concierne á su proyección horizontal, *ght*.

A este efecto, hagamos pasar por los puntos *ef* rayos luminosos, éstos cortarán á la misma superficie en *h'* y *z* cuales referidos en el plano horizontal sobre los rayos luminosos correspondientes, darán los *h* y *t* más entre todos ellos, existe aquel *g*, en que el rayo, es tangente á la curva, en lugar de serle rasante, en él se verifica que los puntos de partida y de llegada, ó por otro nombre de entrada y de salida, se confunden con uno sólo, en este punto *g-g'*, es aquel de donde parte la curva de sombra arrojada, la cual obtendremos, uniendo todos los puntos anteriormente encontrados en *ght*; el punto *t*, es el último de la curva, y como se comprende es aquel originado por el rayo que parte del punto *z*, el cual, cortando en *e*, á la curva diagonal, este punto *e*, será el originario. Adviértase ahora que de *e* á *c*, existe aún un trecho de línea de arista divisoria de luz y sombra, así como también la recta que media tangente, desde *c* á *a*, más ésta al rasar por ellas los rayos luminosos, no encuentran ya al caveto y lo hacen con las otras superficies que encuentran á su paso, de los cuales nos vamos á ocupar con la moldura de la

72. Gola reversa. Cuando la sección recta del cilindro de moldura se compone de una línea formada de dos cuartos de circunferencia, de modo que la concavidad de uno de ellos cae hacia un lado, y la convexidad del otro, mira hacia el opuesto presentando como una inflexión, en el punto de enlace ó de tangencia de ambos y simula así como una letra S. La Gola puede ser *derecha* esto es cuando la concavidad del

arco superior mira hacia fuera. teniendo éste más vuelo que el arco convexo inferior; es verdaderamente la letra S, directa.

Mas si el arco superior es el convexo, mientras que el inferior cóncavo tiene más vuelo que el primero, entonces se produce la Gola *reversa*, esto es como una letra S invertida y ladeada, ó si se quiere la primera formada en sentido contrario, de las líneas paralelas que la limitan inferior é inferiormente como muestran las siguientes formas (fig. 66').

Volviendo ahora á la (fig. 65), en donde la Gola *jps*, forma parte del molduraje con el anterior caveto, tenemos que la arista vertical *jz* del *filete*, arroja sombra en *j'k'*, sobre la parte superior de la Gola, cuyo último punto *k'*, se obtiene por la intersección del rayo luminoso, con la generatriz *k'k"* del cilindro de la Gola, producida por el corte del plano de sombra *zk*; esta línea de sombra es una curva en el espacio, aunque bien viene proyectada horizontalmente, según la recta *j'k'*.

Luego el rayo luminoso, resbala por la arista *j't*, y produce á su vez la sombra arrojada en *k'k"*; mas no se extiende sino hasta el punto *k"*, por el cual parte el rayo que se apoya en *t*, y también en *e*, pues á partir de este último, el rayo emprende el camino, por la curva *ec*, y luego por la vertical *ca*; la primera se arroja á la curva *k"l'*, y la segunda en la recta *l'm'* hasta encontrar la generatriz *m"m'*, de tangencia del cilindro de la Gola, con el plano paralelo al rayo luminoso, cuya tangencia se verifica verticalmente, en el punto *m*; más de todos modos, el rayo de luz, que parte de *a*, prosigue su camino en el espacio hasta cortar al plano horizontal en *x'* indicando con ello que toda la arista vertical *ca*, cae arrojada desde *l'* hasta *x'*, si bien parte de ella está fusionada con las otras sombras, apareciendo por lo tanto en el plano horizontal en el reducido trecho *v'x'*, y partiendo de este último punto la *x'x*, la cual junto con la *xa* paralela al rayo luminoso que parte del punto *a* formarán la sombra quebrantada que arroja la arista superior perpendicular al plano vertical proyectada en *a*. También la arista vertical proyectada horizontalmente en *s* produce su sombra arrojada en *s'v"* según una dirección paralela al rayo luminoso, siguiendo en pos de ella la *v"v'* paralela á la *s's"* de la cual es sombra arrojada.

Fijándonos por último en el cilindro de la Gola, el cual ya adrede hemos colocado perpendicular al plano vertical, veremos con facilidad cuales son los puntos divisorios de luz

y sombra de la curva que se extiende desde j, á s; para eso bastará trazar un plano que le sea tangente y al mismo tiempo paralelo á los rayos luminosos; dicho plano es el que tiene por traza la recta mc, y él nos indica que desde m á j el cilindro está expuesto á la luz, pero no así desde el mismo punto m hacia la parte inferior; toda vez que si escogemos un punto cualquiera tal como n-n' y se concibe por el un rayo luminoso éste corta al mismo cilindro en el punto q-q', el cual será visiblemente sombra arrojada del primero, de modo que así siguiendo encontraríamos la curva $p'q'r'$ que sería la sombra arrojada de todo el trecho de curva comprendido desde m á p, siendo r' el primer punto de la curva á partir del cual sigue la recta $r'r''$ que será la sombra arrojada hacia la parte inferior de la Gola; y la generatriz de tangencia $m''m'$, línea divisoria de luz y sombra propia producida por el plano límite y tangente cm.

En cuanto al punto p-p' será el último punto de la curva en atención á que el rayo luminoso cuando pasa por él viene en tal disposición que el punto de entrada y de salida se confunden, convirtiéndose en tangente interior, el rayo luminoso que antes bordeaba la curva formando cuerda con la misma al considerar dichas dos líneas en el plano vertical.

73. Toro de pilastra.* En la fig. 67, se representa la base de una pilastra, en la cual la moldura más dominante es el toro cilíndrico, cuya sección recta es una semi-circunferencia, hij, existiendo en cada ángulo dos cilindros de esta clase que se cortan en ángulo recto, viniendo á ser plana la curva de intersección, proyectándose horizontalmente según una línea recta $f'i'$. Dicha moldura está comprendida entre un filete rectangular g, en donde concluye el fuste uniéndose con él por medio de un pequeño caveto bef, mientras que por la

* Sabido es, que la superficie llamada Toro, es de revolución, y engendrada por el giro de un círculo alrededor de un eje situado en su plano, sin embargo, por usarse ésta en las bases de las columnas y luego venir obligadas á usarse en las bases de pilastras, cuales siendo rectangulares, obligue á las molduras, á que sean limitadas por planos y cilindros; de aquí es, que habiendo de ser la forma general del molduraje, análogo en su dibujo tanto en columnas como en pilastras que obedezcan á un mismo estilo dentro de una construcción, sea llamada también toro, la moldura cilíndrica que tiene por sección recta una semi-circunferencia empleada en las bases de las pilastras, cual moldura situada á la misma altura en que se encuentra el verdadero llamado toro en la base de una columna.

parte inferior, descansa nuestra moldura en un zócalo paralelepípedo. Encontremos pues la sombra de semejante detalle y de momento, la sombra del caveto resultará ser la curva $e'c'''$, (núm. 70) y con ello veremos que el punto c''' último de dicha línea sobre el propio caveto tiene por originario, el c', y por lo tanto, el pequeño trecho $c'a'$-bc, caerá arrojada su sombra en $b''c''$, sobre el plano vertical de proyección, viniendo luego la $b''a''$, que dimana de la vertical ba, así como en seguida la $a''a$ paralela al rayo luminoso, que será la sombra que arroja la recta perpendicular, al plano vertical, y que se proyecta en el punto a.

Con semejantes operaciones, habrá quedado en luz el triángulo mixtilíneo $f'e'c'''$; más como el plano vertical lateral del filete g, está en sombra, de aquí que la arista vertical f', será línea divisoria de luz y sombra, y ésta caerá arrojada en una curva proyectada horizontalmente en la recta $f'f'''$, así como también una pequeña parte de la misma en el plano vertical en $f''g''$, ahora se ve claramente como la recta $c''f''$, será la línea que arroja la arista $f'c'''$ inferior del caveto citado.

Pasando ahora á los toros cilíndricos, observaremos que el referente de dirección perpendicular al plano vertical, tiene un plano tangente límite, paralelo al rayo luminoso, este plano es perpendicular en este caso al plano vertical, da la generatriz de contacto h-$h'f'''$, y por lo tanto, ella es línea de división del claro obscuro, alcanzando no más al punto f''', en donde corta á la sombra arrojada $f'f'''$, hallada anteriormente, pues en cuyo punto se fusionan las dos sombras; ahora dicha recta $h'f'''$, arrojará su sombra en el plano vertical, según la paralela $g''h''$, al rayo luminoso, puesto que se trata de un plano de sombra perpendicular al plano vertical.

En cuanto al cilindro torico, paralelo al plano vertical, el plano tangente paralelo al rayo luminoso, será á su vez paralelo á la línea de tierra, pudiendo encontrar brevemente la generatriz de contacto, si echamos mano de un plano secante y vertical, lp', el cual cortará á la moldura según la elipse $ml'n$, y á su plano tangente, según la recta qr, paralela al rayo luminoso; con ello, el punto de tangencia s-s', da la altura por donde se ha de trazar la generatriz de contacto $s'j$, que es línea divisoria del claro y obscuro; de aquí resulta que entre los puntos extremos h-j, existirá un trecho de curva divisoria de luz y sombra propia, por lo tanto haciendo

pasar por ella rayos luminosos, los de sombra correspondientes, nos darán sus intersecciones con el plano vertical, la sombra arrojada $h''i''j''$, con más la $k''j''$, sombra arrojada de la generatriz horizontal jk; más desde el último punto k, cuyo rayo luminoso se apoya también en k''' de la arista $i\ i'$, la sombra arrojada la recibe en $k'''k^{IV}$, el plano horizontal iI, del zócalo. Con semejantes operaciones, ha quedado un trecho $i'k'''$, de separación de luz y sombra, y por lo tanto, arrojará sombra, apareciendo, ésta interrumpida en $k'j''$-$j'i''$ puesto que parte de ella cae en el plano vertical, y la otra parte en el horizontal. Finalmente, el rayo luminoso al resbalar por la vertical iM, producirá la sombra arrojada $i'i''$ referente á dicha vertical, concluyendo con ello el contorno de la totalidad de la sombra arrojada.

74. Talón. Fig. 68. El talón está compuesto, en la sección recta del cilindro de la moldura que lo forma, por medio de dos arcos de circunferencia que se juntan acordándose, con las convexidades opuestas, dando así lugar á una curva sinuosa, con un punto de inflexión en su medio, en donde pasa de la parte cóncava á la convexa. También esta curva en lugar de ser geométrica y trazada con compás, puede formarse á pulso con una línea de sentimiento, pero que cumpla con sus propiedades generales.

El Talón es *derecho*, cuando la parte cóncava está abajo y la convexa por arriba, y más saliente que aquélla, y por el contrario es *reverso*, cuando si bien está más saliente ó voladiza, la convexa; ella sin embargo está dispuesta hacia abajo y la cóncava hacia arriba. Aquí en nuestra figura el talón va acompañado de un filete rectangular Aa, que lo termina en la parte superior, mientras que más entrante que la moldura hay hacia la inferior, un friso, que se extiende en las cuatro caras de un paralelepípedo rectangular aunque consideramos de ellas dos caras, cuales son una perpendicular, y la otra paralela al plano vertical. Siendo ahora el rayo R^v-R^h, determinemos las sombras que producen estos cuerpos combinados.

En primer lugar, la arista a-A''A', es línea divisoria de luz y sombra, el plano de sombra que por ella rasa, es perpendicular al plano vertical, cortará al cilindro del talón lateral, según la generatriz $b\ b'b''$, ésta será precisamente la sombra arrojada de aquélla sobre el referido talón. Sin embargo, conviene observar, que si por el punto extremo obte-

nido en b'' trazamos un rayo luminoso, éste no pasará por el A'' sino que será otro comprendido entre A'' y A' tal como γ, luego esto indica que el trecho γA'', caerá arrojado sobre el talón de frente, y lo indica así también, el que dicho plano de sombra siendo perpendicular al plano vertical en ad su situación expresa que prosigue su camino internándose en el contorno de la moldura.

Este trecho de sombra arrojada es la curva $b''d'$ aunque proyectada según la recta bd, en la traza vertical del plano que la contiene, su último punto es el d-d', de cuyo es originario el a-A'', esto es aquel en donde empieza el rayo á rasar, la arista aa_1, la cual arroja su sombra en dd'' sobre el talón paralelo á la línea de tierra; dicha sombra puede encontrarse fácilmente por la siguiente consideración. El plano de sombra que rasa por la arista aa_1, resulta ser perpendicular á un plano de perfil, perpendicular á los dos planos de proyección, luego, sobre este plano, se proyectará según un punto la sombra $d'd''$, á este efecto escojamos como á plano de perfil, el sX, en él la traza del plano de sombra, será la recta que resulte, de proyectar el rayo luminoso, proyectemos pues éste en Oβ, toda vez que el O, es proyección de sí mismo, mientras que el β, lo es del punto escogido α-α' en esta situación giremos OX, alrededor del eje O hasta colocarlo paralelamente al plano vertical en OX', entonces la sección con la moldura se confundirá con la misma curva del talón del dato A$abcemnpq$, mientras que la proyección del rayo rebatido será el R', en virtud de haber con el rayo del dato girado el punto $\alpha\alpha'$ esté proyectado en el perfil, resulta el β y al girar este último describe un arco ó cuadrante de circunferencia horizontal, situándose en definitiva en β'-β'', y por lo tanto, la unión de este último con O, dará el rebatimiento de R'. Ahora bien, en este rebatimiento si trazamos por el punto a la recta ac paralela á R' esta ac, representará la traza vertical del plano de sombra sobre el de perfil, y por lo tanto, la intersección de esta recta con la curva del talón, representará la generatriz del cilindro de frente, sobre el cual cae arrojada la arista superior aa'; por lo tanto, si volvemos á colocar las cosas en su estado primitivo, dicha recta proyectada en c no cambiará de altura durante el giro, y como sabemos ha de venir á ser paralela á la línea de tierra; ella será la horizontal cd''; sin embargo, su punto de partida será el d, toda vez que obedece al rayo de sombra que parte del

punto *a*, en donde principia la arista originaria; ahora se verá claramente como desde el punto *d*, hacia *b*, viene la sombra arrojada de la arista lateral *a*-A″A′. Esta sombra se logrará en proyección horizontal, escogiendo el punto que se quiera entre *d* y *b* haciendo pasar por él una generatriz del cilindro proyectando luego esta generatriz horizontalmente y trasladando en ella por medio de una proyectante, el punto en cuestión; así obtendremos la curva *b″d′*.

Fijándonos ahora en el cilindro del talón y aprovechando el giro que hemos practicado, será fácil observar que si se traza la tangente *em*, paralela al rayo rebatido en R′, ésta representará la traza sobre el plano del perfil rebatido, del plano tangente al cilindro, y á la vez paralelo al rayo R^v-R^h luego ello indica que la generatriz de tangencia está proyectada en el punto *e*, y que ella no cambiará de altura, cuando se deshaga dicho giro, para colocar las cosas á su debido lugar; de allí pues, que esta generatriz, que aquí será línea divisoria de luz y sombra propia vendrá á colocarse en la horizontal *ee′*, EE′.

En cuanto á lo que se refiere al talón perpendicular al plano vertical, en este, es aún más fácil y directa la determinación de la línea divisoria, toda vez que la fija de momento, el plano tangente cuya traza es la recta R_2^v, paralela á la proyección vertical R^v, del rayo luminoso; dicho plano nos da la generatriz de tangencia *g*-*g′g″*, la cual es ya la línea de separación que se deseaba. Este mismo plano tangente prolongado, vemos que corta al talón en su parte inferior, según una generatriz *h*, *h′h″*, la cual será evidentemente la sombra arrojada de la generatriz *g*-*g′g″*, sobre el mismo talón.

En esta disposición, es que podemos apreciar con conocimiento de causa, como la línea que media desde E-*e* á *g′*-*g*, es línea de división de luz y sombra propia, y por lo tanto arrojará sombra, y la arrojará sobre la misma superficie del talón paralelo á la línea de tierra. Para esto, no hay más que considerar un punto tal como *f*, comprendido entre *eg*, por este punto pasa el rayo luminoso *fx*, y éste, proyectado en el plano de perfil usado anteriormente será el *f l*, el cual en semejante disposición, se ve de momento el punto *l*, en que corta al cilindro del talón, proyectado ahora, según su sección recta en la curva *b e n*; ahora bien, es obvio que cuando se coloquen las construcciones á su debido lugar, la altura de la generatriz proyectada en el punto *l*, no se alterará y así

vendrá á colocarse en la horizontal *l x*, conducida por el punto *l*; y como en ella ha de situar el punto en cuestión, claro es entonces, que *x*, que es el punto de intersección de dicha horizontal con el citado rayo luminoso, será el punto de sombra arrojada del escogido *f*; del propio modo se encontrarían otros, y así se obtendría la curva *vxy*, *v′x′y′*, como sombra arrojada de *efg*, siguiendo luego la *yy″*, arrojada de la generatriz de frente *ee′*. Mas á partir del punto *g*-*g′*, el rayo deja de resbalar por la directriz curvilínea E*f′g′*-*efg*, y emprende el camino resbalando por la generatriz de contacto lateral *g′g″*, cuya situación de la misma es tal, con respecto al cilindro de frente, que el trecho de ella que media, desde *g′* hasta φ, (determinado este punto por el rayo que parte de *h′*, en donde termina la sombra arrojada *h″h′*, sobre el talón lateral), cae arrojado en la curva *h′t′u′v′*, proyectada según la recta *hv*, en el plano vertical; y es que el rayo luminoso al resbalar por *g′*φ, engendra un plano de sombra perpendicular al plano vertical, y por lo tanto, todo lo en él contenido, como lo es la curva de intersección *h′t′u′v′*, con el talón frontal, se confundirá proyectado verticalmente, según la traza vertical R_2^v, de dicho plano. El modo de obtener puntos de dicha curva en el plano horizontal, queda reducido, á escoger los puntos que se quieran *t*, *u*, etc....., en el plano vertical, haciendo pasar por ellos generatrices del cilindro, ambas referidas en el plano horizontal, en ellas, por medio de proyectantes, inferiremos los *t*,′ *u′*... etc., tal como es de ver en las construcciones indicadas.

Finalmente, para con respecto á la sombra *prz* del talón sobre el friso inferior, repetiríamos las mismas consideraciones hechas con el filete superior, aunque aquí aparece el resultado aún más sencillo, en atención á que después de la sombra *vz* de la arista *nn′* sigue la *pr*, sombra arrojada sobre la cara de frente por la arista lateral *n*-NN′, perpendicular al plano vertical, siendo por lo tanto una recta *pr*, en lugar de ser una curva, como lo era la *c″ d′*, y que por lo tanto estábamos obligados á determinarla por puntos en la proyección horizontal.

75. **Sombras relieve.**—Llamadas también *sombras equitéticas*, porque tienen la propiedad de reproducir en proyección, la verdadera forma de la superficie en donde caen arrojadas, lo cual facilita un medio muy expedito para conocerla

forma, curvatura y relieve de todos los puntos de dicha superficie. En general tienen lugar en las superficies cilíndricas, ó éstas combinadas con planos, formando en conjunto haces de molduras, y empleándose siempre en estos casos el rayo luminoso, cuyas dos proyecciones forman ángulo de 45° con la línea de tierra.

Dichas sombras son producidas por la que arroja una sola línea sobre el cuerpo en cuestión; así como á primer ejemplo supongamos que en la fig. 69 se presenta un muro ó una pilastra, la cual se adelanta de una cierta cantidad, á un haz de molduras, cuales están proyectadas por medio de la serie de líneas paralelas, cuales, dos á dos van limitando cada una de ellas. Por otra parte, prescindiendo en estos ejemplos de la planta, ésta será necesario substituirla por otro dato que nos dé los distintos vuelos de dichas molduras, así como las distancias respectivas que median desde todos los puntos de las mismas, á la arista saliente más próxima á ellas; semejante dato ha de estar proporcionado por medio de cotas ó sino por un corte auxiliar en el sentido de la sección recta, al haz de molduras, tal como expresa en A, la fig. 69', en donde la recta *a'b'*, es la arista vertical saliente, con que termina el muro ó pilastra hacia la parte del molduraje, y allí se puede ver claramente que la separación de dicha arista, ó lo que ella adelanta más, para con respecto á la moldura, son las distancias *x''x'*, *m'n'*, *p'q'*, *r'e'* ....., etc. Se comprende ahora, recordando lo dicho en el número 20 2.° que si escogemos un punto cualquiera de la arista vertical, tal como ε y hacemos pasar un rayo luminoso inclinado á 45°, éste será tal que cortará á la superficie en un punto *e*, de tal manera que podremos formar un triángulo ε*re*, en que los catetos ε*r*, *re*. serán iguales á la separación que existe del punto escogido ε-ε', á la superficie *q'e'*, y como partimos de la base de conocer *a priori* esta separación, nada más fácil que señalar el punto de sombra *e*, con el auxilio de dicho triángulo; repitiendo la misma operación para todos los puntos entrantes y salientes del molduraje, semejante operación, es equivalente, si la consideramos en su conjunto, á imaginar un plano vertical de sombra que pasa por la arista *ab*, el cual teniendo su traza horizontal inclinada á 45° con la L. de D., vendrá cortando á todo el molduraje, según una sección oblícua, más siendo ella tal, que vendrá precisamente á proyectarse según la sección recta de todo el sistema de molduras; siendo por

lo tanto exactamente igual á la que tenemos dibujada por el dato en A; en resumen, que dicha proyección oblicua puede considerarse estar situada en un plano vertical diagonal de un cubo, en cuyas dos caras de frente paralelas al plano vertical estuviera dibujada la moldura en sección recta, tal como expresa el perfil A, cuyo vendría ser con evidencia la proyección ortogonal sobre dicha cara de la sección oblícua antes producida.

En su vista, para representar dicha sombra arrojada, bastará, sin ulterior operación, reproducir el corte A en la fig. 69 y así simplemente copiarlo en *x*, *n*, *q*, *e*, *f*, *g*, *i*, *j*, *k*, *l*, de modo que las distancias respectivas *mn*, *pq*, ..., etc., sean respectivamente iguales á *m'n'*, *p'q'*, ..., etc., sombreando en seguida todo lo que exista entre la línea sinuosa así producida, y la vertical *ab*.

Faltan ahora las sombras del molduraje sobre sí mismo, quedando reducida la cuestión al trazado de rectas paralelas al rayo luminoso, las unas por los puntos de ángulo ó vértices salientes del perfil de sección, como los *e*, *i*, y los otros por los puntos de tangencia *c*, *g*, *k*, los primeros cortarán, á las superficies inferiores, en *f*, *j*, por los cuales podrán trazarse las líneas paralelas, á la dirección general del cuerpo de moldura, éstas representarán las sombras arrojadas de las aristas salientes, sobre las molduras inferiores; en cuanto á los segundos, determinarán las líneas de contacto de las superficies cilíndricas con planos tangentes paralelos á la dirección de la luz, dándonos así las líneas divisorias de luz y sombra propia en las horizontales *ii''*, *gg''*, *kk''*, mientras que por las intersecciones *h*, *j*, *l*, de aquellos rayos con las superficies inferiores, indicarán cuales son las sombras arrojadas de aquellas mismas generatrices de contacto.

Es de advertir ahora, que por los mencionados puntos de sección encontrados en *d*, *f*, *g*, *j*, *k*, *l*, se verificará la inmersión en la sombra de parte del perfil de sección, el cual se considerará como á sombra parásita en los trechos *qd*, *zf*, *gh*, ..., etc., siendo verdaderamente aquellos puntos, los llamados puntos de pérdida.

76. Otro ejemplo análogo al que acabamos de expresar, es el que se refiere á la fig. 70, en la cual el haz de molduras es vertical, y de sección recta el perfil representado en M, en el plano horizontal; viniendo coronado dicho haz por un pa-

ralelelípedo A-A'; es el caso que aparece en la práctica, de una jamba moldurada terminada superiormente por una faja ó listelo, cuyo está destinado á recibir directamente el arco, que corona la abertura. Como el principio es exactamente el mismo que el expresado anteriormente, y siempre conservando las proyecciones del rayo luminoso á 45°, no nos detendremos en más explicaciones, recordando tan sólo que el punto de partida *a* nos dará inmediatamente la sombra *a'*, de cuyo último punto partiremos en seguida para dibujar fielmente la moldura M colocándola en *a'bcdef*, la cual ya será de por sí la sombra arrojada de la arista horizontal sobre el molduraje inferior. Ahora, los rayos rasantes y tangentes á esa línea de sombra así producida, nos darán las sombras propias y arrojadas de la superficie sobre sí misma, precisándonos con ello los puntos de pérdida en donde la primera línea trazada entra en sus trechos correspondientes á ser parásita.

77. **Cañón seguido.**—El cilindro hueco, esto es, considerado en su parte cóncova, es de frecuentísima aplicación en la práctica de las artes é industrias, hé aquí porque nos proponemos tratar este asunto con alguna extensión, proponiendo al efecto una serie de ejemplos á cual más importantes, reseñando además procedimientos expeditos, breves, y sencillos para poderlos poner en ejecución en el terreno práctico, una vez ya conocida la teoría general en la que se apoyan dichas operaciones. Tomamos como á primer ejemplo el cañón cilíndrico circular objeto de la (fig. 71, lám. 8.ª), bóveda la más sencilla para cubrir un pasaje rectangular, toda vez que se trata aquí del cilindro recto; pero considerado no más en su mitad, en virtud de haber hecho en él, una sección longitudinal conducida según la línea AB de la planta. Según esto, la planta de la mitad del cilindro la representa el rectángulo ABCD, siendo AC el radio de la base circular, mientras que el rectángulo M, significa el muro de apoyo, así como el grueso de la bóveda, grueso que se reproduce en el plano vertical en el rectángulo A'B'B''A'', cuando el plano de sección ha cortado á la bóveda á lo largo de la generatriz culminante. El rectángulo C'D'B'A' es la proyección vertical del cilindro, que aquí como vemos se ha colocado adrede paralelo á la L de T al objeto de facilitar su estudio, y finalmente el otro rectángulo C'C''D''D' significa la altura y proyección vertical del ya referido muro de apoyo.

Como quiera que el estudio principal que hemos de llevar á cabo en este caso, es el que concierne á la sombra arrojada del cilindro sobre sí mismo, convendrá para allanar el camino de investigación, poder disponer á parte, de la sección recta del cilindro, pues sabido es que en esta importante línea, queda en ella confundido todo lo que en esta superficie situa; mediante esta tan fácil consideración, podremos ya dar por sentado que el problema está resuelto en principio, toda vez que todo quedará reducido á escoger puntos en la sección recta y colocarlos en donde les corresponda de la línea de sombra en la superficie cilíndrica. Con ese objeto, pues, gírese el plano vertical AC'' alrededor de la vertical del punto A hasta que se coloque paralelo al plano vertical en AC''', en cuyo caso la sección recta del cilindro cóncavo estará representado en verdadera magnitud en el cuadrante C'A'C_2, mientras que el otro cuadrante concéntrico C'A'C^{IV} será la sección recta del cilindro convexo, en donde termina el grueso de la bóveda.

Falta tan sólo, ya que hemos de operar en este plano rebatido, referir en él el rayo luminoso, lo cual vale tanto como proyectarlo en dicho plano; á este efecto, si escogemos los dos puntos C'', G''', el primero ya es proyección de sí mismo, y en cuanto al segundo irá en A-*a* en el giro, pues A es fijo por estar en el eje, y el C-C' pasa á ocupar la posición de C'''-C^{IV}; luego el rayo primitivo del dato R^v-R^h referido ya al plano de la sección recta será la recta R'.

Es evidente ahora, que por la posición del cilindro para con respecto á la luz, parte del arco de cabeza será divisorio de luz y sombra; y con esto, si escogemos un punto cualquiera *a'* en él, por dicho punto se podrá hacer pasar un rayo luminoso paralelo á R', y éste cortará al cilindro en el punto *b*, el cual no será otro que la sombra arrojada del primero sobre el cilindro. Hemos obtenido ya un punto de la curva, falta ahora conducirlo á su debido sitio; y para ello observemos que dicho punto ha de encontrarse sobre la generatriz del cilindro que se encuentra á la altura de *bb'*, puesto que ella se proyecta en un punto *b* en la fig. 71', y en el giro esta recta no cambia de altura; mas por otra parte, el punto *a'* en su verdadero lugar está en *a*, y el rayo luminoso (paralelo á R^V) que por él pasa, ha de contener también al punto incógnito; luego éste será el *b'*, intersección de las expresadas dos rectas; se comprende que mediante idénticas consideracio-

nes, encontraríamos los demás puntos de la curva $cb''d$ que será la sombra arrojada sobre el mismo cilindro del trozo de arco $A'a'c'$ de la base. El primer punto c de dicha curva, corresponderá á aquel c', en donde el rayo de luz se proyecte según una tangente á la base en el plano de la fig. 71', mientras que el último d corresponderá al original A', en donde la curva de la sección recta termina en virtud del corte longitudinal practicado.

Esta curva de sombra, puede ahora referirse al plano de proyección horizontal en $c'''b^{IV}d^{IV}$, con arreglo á las construcciones que en el dibujo se expresan.

Puede si se quiere rectificar esta curva para su buen trazado; venir á la averiguación de sus tangentes en sus distintos puntos, como por ejemplo el punto de partida c-c''', y para eso no habrá más que combinar en este punto los planos tangentes, el uno al cilindro del dato, y el otro al cilindro oblícuo formado por los rayos luminosos cuando rasan por la curva de cabeza, proyectada verticalmente en la recta A'C'; sin embargo, será más á propósito sustituir á uno de estos planos tangentes por el mismo plano de la curva por ser este procedimiento más general, toda vez que precisamente en el punto c-c''' los dos planos tangentes aludidos se confunden, y así quedaría indeterminada la tangente que buscamos *.

* La curva de sombra $cb'd$, es una eclipse que proviene de la intersección de dos cilindros, cuales son, el cilindro del cañón seguido y el cilindro de los rayos luminosos, formado al resbalar aquéllos por la curva circular de cabeza, cuya singular propiedad es hija del siguiente teorema:

Cuando dos cilindros de 2.º grado se cortan según una curva de entrada plana, la curva de salida ha de ser igualmente plana.

Demos por supuesto (fig. 76), que la elipse *acenfdbm* es la curva plana de entrada que sirve de directriz á los dos cilindros, los cuales llevan respectivamente las direcciones aA, $a\beta$; cortemos á estos dos cilindros por medio de planos paralelos á la dirección de ambos, estos planos 1, 2, 3 cortarán desde luego al plano de la curva de entrada en una serie de rectas paralelas, cuales vendrán representadas por las cuerdas ab, cd, ef; así el plano 1 cortará á un cilindro según las dos generatrices aA, $b\alpha$, y al otro según otras dos generatrices $a\beta$, bB, estas cuatro rectas contenidas en un mismo plano se cortarán dos á dos formando un paralelógramo $axbx'$, cuyos vértices a, b, x, x' serán dichos puntos de intersección, pero los a y b pertenecen á la curva de entrada; luego los x, x' serán los referentes á la de salida.

Del propio modo el plano núm. 2 nos proporcionará otro paralelógramo $cy'yd$, y con él dos puntos de entrada c y d y dos de salida y, y', así como el plano número 3 el paralelógramo $ezfz'$ y los puntos ef de entrada y dos de salida z, z', y así sucesivamente con otros planos.

Es evidente ahora que las rectas ab, cd, cf son diagonales todas paralelas de los

El plano tangente en el punto c-c' al cilindro del cañón está determinado por la generatriz cc^{V} y la tangente á la base rebatida en c'F, de modo, que si consideramos como á plano vertical de proyección el que es tangente al cilindro exterior en su arranque, dicho plano se halla en el giro de la figura 71' expresado en el de perfil HC^{V}, y por lo tanto, su intersección con el tangente c'F será la recta proyectada en el punto f; y ésta colocada á su debida posición vendrá proyectada en $f'f''$, la cual será la traza vertical de dicho plano tangente; en cuanto á su traza horizontal y escogiendo para abreviar como á plano de proyección de este nombre el mismo plano de arranque, será la recta proyectada en F; mas colocada verdaderamente en donde le corresponde en F''F''', así ella y la $f'f''$ constituyen las trazas del plano tangente en cuestión, el cual aparece paralelo á la línea de tierra.

En cuanto al plano de la curva, sabemos ya en virtud de lo demostrado en el teorema de la nota adjunta que corta al plano de la curva de entrada (aquí base del cilindro) según el diámetro $C'c'$; de modo, que según esto, siempre podremos concebir en dicho plano de la curva de sombra una serie de rectas paralelas al diámetro $C'c'$, y así las trazas de dichas

citados paralelógramos, así como también las diagonales xx', yy', zz' que unen dos á dos los puntos de salida, y como á tales, estas últimas pasarán respectivamente por los puntos medios ω, O, ω', etc., de las cuerdas de la superficie ab, cd, ef, etc.; luego ello es bastante para inferir, que dichas rectas xx', yy', zz', etc., todas paralelas, cortarán al diámetro mn de la superficie que se encuentra conjugado con ab, cd, ef, formando por lo tanto un plano que contiene todos los puntos de salida x, y, z, x', y', z', etc.; luego la curva que por ellos pasa es una curva plana.

Pero aun hay más; esta curva de salida será del mismo género que la de entrada, toda vez que si consideramos dos á dos los puntos uno de entrada y otro de salida tales como el b con el x'; el d con el y', el f con el z', cada dos de ellos tienen una misma abscisa como $O\omega$ los primeros, el punto de origen O para los dos segundos y $O\omega'$ los mentados en tercer lugar, resultando con ello, que la relación que guardan las ordenadas ωb, Od, $\omega' f$ será la misma que entre la que entre sí tengan las $\omega X'$, Oy', $\omega' z'$, por ser agrupaciones de diagonales de una serie de paralelógramos; así pues, si los puntos extremos b, d, f pertenecen á una curva elíptica, como así sucede por haber partido de este dato los otros x', y', z', igualmente pertenecerán á una curva de esta clase. Estas dos elipses tienen además el diámetro común mn, y visiblemente se observa que en sus puntos extremos m y n las tangentes á las dos curvas, lo propio que las generatrices de las dos superficies son paralelas á los planos secantes 1, 2, 3, etc., por lo que se inferirá que los dos cilindros en cuestión tendrán dos planos tangentes comunes y paralelos, cuyos puntos de tangencia serán los puntos extremos m y n del diámetro de la superficie, que resulta de la intersección de los planos de las curvas de entrada y salida.

rectas situarán en las trazas del plano, ó si se quiere por la inversa, por las trazas de las rectas pasarán las trazas del plano; dos de estas rectas, pues, nos bastarán para nuestro objeto; sean pues la misma C'c', y luego la d'K pasando por un punto cualquiera de la curva, como por ejemplo el d'. Estas dos rectas están cada una en el espacio proyectadas en planos de perfil, y son como es de ver las A'C''-AC, K''*d*-K'''d^{IV}. Encontremos sus trazas recurriendo al plano auxiliar de la figura 71'. La traza vertical de la primera está en H pero á su debida posición en H', mientras que su traza horizontal en C' proyectada en A. En cuanto á la segunda su traza vertical es el punto M, mas al colocarse en su sitio viene en M'; y su traza horizontal se halla de momento en K, pero luego, al deshacer el giro se coloca en K'''; de aquí se infiere pues, que H'M' es la traza vertical del plano de la curva, y la AK''' su traza horizontal.

Combinemos ahora estos dos planos tangentes, y así la intersección de H'M' con *f'f''* nos dará el punto *f''* y con él la *f''c* en el punto considerado, lo propio que en el plano horizontal en donde el punto I es el de intersección de las trazas horizontales, y, por lo tanto, unido con c''' será I*c'''* la tangente en el punto *c''* á la propia curva proyectada horizontalmente.

Determinada ya la curva de sombra sobre el cilindro, pasemos á ultimar la cuestión, y para ello, después de haber rasado el rayo luminoso sobre el arco de cabeza, y habiendo llegado por último en el punto culminante A', empieza á rasar por la generatriz A'B' y entonces el plano de sombra que engendra, corta al interior del cilindro según la otra generatriz *de*, cual viene á ser la sombra que arroja el trecho de recta A'J, mientras que el resto JB', viene arrojado en el plano vertical en *e'*β, igual y paralela á aquélla; más al llegar el rayo en el punto B'-B, rasa por la vertical B'B', originando la sombra arrojada en ββ'; emprende luego el rayo, el camino que dirige el arco de cabeza de la superficie cilíndrica exterior, la cual puede deducirse inmediatamente en la figura 71', cual es el trecho de curva que media entre el punto A'' y el E, que obedece al límite de tangencia de un plano paralelo al rayo luminoso y cuya generatriz de contacto en el cilindro exterior es E'E''; los puntos que componen dicho trecho de curva están proyectados en su debido lugar en B''E''-BE^{IV}, por lo tanto quedará concretada la operación, á

escoger puntos en dicha curva tal como el E''E^{IV} hacer pasar por ellos rayos luminosos y á encontrar en seguida sus trazas verticales, así se obtendrá la curva β'E^{V}, sombra arrojada del arco de extrados mentado y finalmente la horizontal E^{V} ε que será la que arroja la generatriz de contacto E'E'' concluirá la sombra hacia la parte superior.

Volviendo ahora á la posición del rayo luminoso, para cuando pasaba por los puntos *e* y J, resulta que también puede emprender el movimiento hacia la parte inferior, resbalando por el trecho de arco proyectado en *e*D'-*e''*D y rebatido en la fig. 61', en *d'*C_2; escógense pues, puntos en dicho arco, condúzcanse por ellos rayos luminosos y sus trazas verticales proporcionarán la sombra arrojada *e'*δ del referido trozo de arco; por último la vertical δδ' y la Dδ' horizontal paralela al rayo luminoso cuyas dos líneas constituyen la sombra arrojada é interrumpida de la vertical D''D'-D, concluirán en un todo la sombra general.

De ser plana la curva de sombra, concerniente á la que arroja el cilindro sobre sí mismo, se presta á facilitar el problema, en el caso que conociéramos de antemano el plano de dicha curva, pues entonces, lograríamos gran rapidez, escogiendo un nuevo plano de proyección vertical perpendicular á aquél, y así de momento tendríamos resuelto el problema pues la curva vendría proyectada en dicho plano de proyección, según una línea recta, cual fuera la misma traza vertical del plano de la curva.

Las trazas del plano de esta curva son según hemos visto la AK''' la horizontal, y la H'M' la vertical, escojamos pues, una nueva línea de tierra L'T' que sea perpendicular á la AK''', la nueva traza vertical, en el cambio de plano vendrá en OC_1, para lo cual nos hemos valido de la horizontal PQ del plano tornando al efecto QC_1=P'M'; además, proyectando el cañón cilíndrico con sus dos bases, así como la dirección que en el nuevo plano guarde el rayo luminoso, bastará trazar paralela á la dirección que resulte, y por el punto más alto A_1 la A_1d_1 y ésta cortando á la traza vertical del plano en el punto d_1, toda la línea de sombra en su justo límite estará comprendida en la recta c_1d_1, la cual junto con la horizontal d_1e_1 completarán el problema de la sombra.

78. Cañón seguido medio rápido. Si la luz viene dada á los 45°, esto dará lugar á gran brevedad en virtud de las

relaciones que se desprenden en semejante caso, bastando en general en la práctica de las frecuentes aplicaciones, la determinación de dos puntos y dos tangentes, para que la línea de sombra quede en el resultado trazada con bastante exactitud.

Examinemos pues estas relaciones. Sea la fig. 72 en donde la parte comprendida entre las paralelas DD′ y OK representa la proyección vertical del intrados cilíndrico, y el cuadrante ODJ la base del cilindro rebatida, tal como hemos verificado en el caso anterior. Si la luz es á 45° la tangente en L (que da proyectándolo en GO, el punto A, de partida de la curva de sombra), será tal, que el triángulo LGO, además de rectángulo será isósceles y dará OL=LG, más si por D, se traza la DC paralela á LG, formaremos otro triángulo DCO semejante al primero, y por lo tanto OC=CD; pero al proyectar L en A; hemos formado otro triángulo LAO y este es precisamente igual al DCO por tener respectivamente iguales los ángulos, y además las hipotenusas OL, OD, iguales por ser radios de un mismo círculo; luego se infiere que OA es igual á su homólogo OC; por lo tanto, el punto A se obtiene inmediatamente con sólo construir el triángulo OCD, en que el ángulo en O y en D, sean de 45°, trazando en seguida con el centro O y radio OC, un arco de circunferencia, hasta cruzar en A á la recta OD; el punto A, será el primer punto de la curva.

La tangente HA, á la curva por el punto A, es la hipotenusa de un triángulo HGA, tal que uno de los catetos, el que está en la dirección AG, es igual á uno, mientras que el otro cateto GH, es igual á dos; esto es HG=2·AG, de modo que esta tangente tiene una inclinación de $\frac{1}{2}$. En efecto, tomemos como á plano vertical de operaciones el del corte longitudinal, que pasa por la generatriz culminante y por el eje, y recordemos la operación antes efectuada en el párrafo anterior al objeto de construir la tangente; en este concepto, el plano tangente IG en el punto L, tiene por traza vertical, la GG′ paralela á la línea de tierra, mientras que el plano de la curva expresado por la recta OH, en el rebatimiento tendrá también por traza vertical en el primitivo plano de proyección la misma HO, (todo en méritos de haber escogido el rayo á 45°). En efecto, así es, porque visiblemente, el punto O ya pertenece de hecho á esta traza, por estar situado en el plano vertical, al paso que otro punto tal como M, lo encontraremos, como anteriormente concibiendo una recta EK paralela á LO y situada en el plano de la curva, esta recta corta al plano vertical de operaciones, el cual punto de intersección ó sea traza vertical de dicha recta) colocada en su verdadero sitio está en M; luego MO es la traza vertical del plano en cuestión, cual traza será prolongación de LO; y en efecto, EK, es paralela á LO, luego estará inclinada á 45° lo propio que lo estará la JP de escoger el punto de la curva proyectado en J, y correspondiente al B, último de la curva, siendo su traza vertical el P, correspondiente al Q, así pues, los puntos Q,M,O, ha de encontrarse sobre una misma recta pero el punto B, sabemos que corresponde al vértice, del triángulo rectángulo isósceles, en que OB=OD=OJ=OP, de donde se infiere BOPQ, es un cuadrado en el cual QO es la diagonal, y por lo tanto inclinada á 45°, ó lo que es lo mismo prolongación de OL.

Y con esto, podemos ya colegir que siendo OHG un triángulo rectángulo isósceles será $OA=AG=\frac{1}{2}OG=\frac{1}{2}HG$ resulta pues, que tomando á partir de A una distancia cualquiera tal como AG, y levantando por G, una perpendicular GH igual al doble de AG, la recta HA, hipotenusa del triángulo AGH así formado, será tangente pedida.

Para con respecto al punto B, es evidente que se obtiene tomando sobre el arranque á partir de O, la distancia OB=OD, y para con respecto á su tangente BD, ella se confunde con el mismo rayo luminoso que parte del punto, en atención que en este punto B el plano tangente al cilindro del dato, es vertical, esto es paralelo al plano vertical de operaciones, que ha producido el corte longitudinal al paso que el plano de la curva, ya hemos visto que tiene por traza vertical la recta QO, luego esta misma traza es la intersección de los dos planos, esto es del corte longitudinal con el de la curva, y como quiera que dos planos paralelos cortados por un tercero las intersecciones son rectas paralelas, de aquí que trazando por B, una inclinada á 45° esta recta que pasará por el punto D, será la tangente pedida.

79. Si ahora hacemos abstracción de toda clase de consideraciones que han sido necesarias para la demostración de semejante linaje de demostraciones y nos concretamos tan

sólo á las estrictas operaciones prácticas, veremos que con suma rapidez y aún haciendo caso omiso de la planta, podremos dibujar la línea de sombra de que se trata. Sea á este fin la fig. 73, en donde se figura la sección de una puerta circular, ó corte vertical que pasa por la generatriz más alta del cilindro.

1.° Trácese por G, la GF á 45° y luego su perpendicular DF, trasládese haciendo centro en G. El cateto GF, en GA sobre GD, el punto A será el primero de la sombra.

2.° Tómese de A para arriba sobre la vertical que por él pasa, una distancia cualquiera, la AD por ejemplo, y luego ella duplicada, en DE, sobre la perpendicular correspondiente á la primera, entonces uniendo E con A, la recta EA será la tangente en el punto A.

3.° Trácese por D la recta DC inclinada á 45° su intersección C con la línea de arranque vertical será el último punto de la sombra y la misma DC su tangente.

Con estos dos puntos y sus tangentes, puede ya trazarse la curva, con suficiente exactitud, máxime si se trata como en el caso presente de una parte del cilindro de la puerta en donde la curva aprovechable AB, es de poca extensión.

80. Cañón seguido combinado con arcos torales.—Son los arcos *torales* unos refuerzos que se dan á la bóveda, á fin de que ésta con su mayor grueso en el sitio en donde se considere más conveniente, pueda dar más garantías de solidez al conjunto de la construcción, así en la fig. 74 son los arcos A y B, colocados en los extremos de la bóveda, teniendo menos radio, que la base ó sección recta de ella, dando con ello lugar á aumentar el espesor en todo el contorno en donde corre el anillo ó fajas circulares expresadas en A-A′, B-B′; más al objeto de poder seguir con facilidad el curso de los razonamientos, echaremos mano de un nuevo plano de proyección fig. 74′, que representará análogamente que en los casos anteriores, una sección recta, dada á la bóveda, la cual vendrá acompañada, de la proyección de los dos arcos torales, así como también de la imposta corrida, en el arranque y con los resaltos correspondientes, en virtud de seguir la salida de las pilastras destinadas á sostener los torales.

Téngase en cuenta ahora que nos servimos del rayo cuyas proyecciones, forman ángulos de 45° con la L. de T. En este concepto, empecemos, dibujando la sombra en el intrados

del toral, producida por su arco de cabeza, la encontraremos en *ub*, aplicando directamente el principio establecido en el núm. 78, no hay pues que detenernos en ella, es fiel reproducción de las construcciones allí hechas; más el rayo luminoso al resbalar á la vez por *a* y por *b* que es el último punto de aquella curva, continúa su camino en el espacio hasta cortar en el punto *c*, al cilindro del cañón, rasando en seguida el rayo luminoso, por el arco de perfil *bdf*, describiendo un cilindro paralelo á los rayos luminosos, el cual cortando á la bóveda *ceg*, ésta la sombra que arroja sobre el cilindro de la bóveda, el mencionado arco de perfil. Dichos puntos de la curva se encontrarán recordando que en la sección auxiliar fig. 74′ dicha curva de sombra, estará confundida con la sección recta del cilindro; así pues, bastará trasladar los puntos escogidos en *bdf* en *b′*, *d′*, *f′*, trazar por ellos rectas paralelas al rayo luminoso proyectado, ó referido al plano 74′ y los puntos *c′*, *e′*, *i′*, donde aquellos rayos cortan al arco circular de sección recta, aquéllos serán los que buscamos, aun, que trasladándolos á la posición que en el espacio tienen en *ceg*. Mas en el punto *g*, deja el rayo de cortar al cilindro y en todo el camino que resta por recorrer en el trozo de directriz que media desde *f* á *y*, corta al plano horizontal superior de la faja de la imposta, produciéndose así el trecho de elipse $\alpha\beta$, como sombra arrojada del mentado arco circular proyectado verticalmente en la recta *fy*, y visto en verdadera magnitud en la fig. 74′.

Volviendo ahora con el rayo, en la posición *abc*, éste asciende recorriendo la parte de arco *ax*, entonces los rayos luminosos cortan al cilindro del cañón según la curva *c-i* sombra arrojada por el mencionado arco siendo el punto *i* el producido por el *h*; el modo de encontrar puntos de semejante curva, es acudiendo á la fig. 74′, escogiendo un punto tal como por ejemplo *h*, en la directriz, haciendo pasar por él un rayo luminoso y averiguando en donde corta al cilindro, aquí en *i′*, para trasladar este punto de nivel en *i*.

Más el punto *i*, es el último que interesa al cilindro, y así el trecho que aún queda del arco; *hx*, *h′x′* va á arrojar su sombra parte en la elipse *kl*, sobre el plano horizontal de imposta; es cuestión, pues, de encontrar simples trazas horizontales de rayos luminosos, y parte en el otro trecho de elipse *l′z′* sobre el plano vertical de dicha imposta. La fig. 74′ indica también su obtención.

A partir de z' viene la horizontal $z'p$, igual y paralela á la generatriz de corte del toral, la xn; sigue el rayo resbalando por la vertical nm'' y produce la sombra arrojada de ésta, parte en la recta vertical pq sobre la cara vertical de la imposta, y parte en la recta $n'm$, sobre el plano horizontal de la misma. Al llegar el rayo en m'' emprende el camino resbalando por la generatriz culminante $m''\mu$, arrojando su sombra precisamente confundida con la generatriz de arranque, en el $m'\,r'$ (por estar inclinado el rayo á 45°); más en el punto r', que corresponde al originario r, deja el rayo de cortar al cilindro y empieza cortando al plano vertical $\mu r'$, correspondiente al ancho del toral, le corta según la recta $r's'$, vista de frente en $f'\,i$, en la fig. 74' conduciendo por el punto culminante θ un rayo luminoso cual será la traza vertical del plano de sombra perpendicular en este caso al plano de la fig. 74', esta recta $r's'$, es la sombra arrojada del trecho rs; y finalmente en el punto s', el rayo ha alcanzado cortando á la arista circular del arco, tal como puede verse en f' fig. 74', y entonces los rayos luminosos hieren al grueso del toral B, produciendo la sombra $s'f'$, arrojada del trecho st, á la cual es igual y paralela.

La sombra del toral B, sobre la imposta, es igual á la que arroja sobre la misma el toral A, basta pues copiarla, y en cuanto á la sombra de la faja de imposta con sus resaltos, sobre las pilastras y muro de sostenimiento, no tiene ninguna dificultad y el procedimiento lo hemos visto ya al tratar con superficies planas.

81. Sección en un cilindro vertical. Considerando este cilindro fig. 75 en su parte cóncava se desprende ya desde luego, que si adoptamos conforme se hace en los dibujos el rayo luminoso á 45° entraremos de lleno en los mismos procedimientos prácticos, que los vistos, cuando se ha tratado de un cañón seguido, así los dos puntos D y G con sus tangentes nos bastarán, para obtener la curva DG con suficiente exactitud para podernos valer de ella inmediatamente. Así (núm. 79) el punto D, lo obtendremos con el triángulo ACO; la tangente en el mismo punto con el auxilio del otro triángulo ABD, en donde AB=2·AD y finalmente el punto G y la tangente que pasa por dicho punto, valiéndonos del rayo luminoso AG, pues su intersección con la generatriz media OH, será dicho punto G, al paso que el mismo rayo AG se confundirá con la propia tangente.

82. Arcada en un muro, visto de canto.—El muro en cuestión es el expresado por M en la fig. 76 de la lám. 9; en él hay abierta una arcada semicircular proyectada según el rectángulo $abdc$, y partiendo del supuesto de que la luz ha de tener sus rayos inclinados á 45°, se desea encontrar la sombra arrojada de dicha arcada sobre el plano vertical de proyección, prescindiendo de la proyección horizontal del dato, pero, sí, conociendo la distancia ef de dicho plano vertical del punto de arranque d más próximo á dicho plano. Para resolver este problema con toda la generalidad posible, empecemos encontrando la sombra de cada uno de los arcos semicirculares colocados el uno en ac y el otro en bd, lo mismo que si estuvieran aislados, y tal como hicimos en el párrafo núm. 42. Así para el círculo bd concibámosle inscrito en el semi-cuadrado correspondiente, la sombra de este semi-cuadrado la encontraremos en $d'b''b'''d''$, recordando con ello que hemos trazado la vertical $d'f$, separada de la de de la cantidad ef, igual á la separación dada anteriormente del plano vertical al punto de arranque más próximo. Trácese también separada de la $d'f$ otro vertical cuya equidistancia sea igual al diámetro de la abertura; ahora estas dos verticales vienen cortadas por el rayo luminoso que parte del punto d, según los puntos d', d'', los cuales unidos dan la base del semi-cuadrado, mientras que el rayo luminoso que parte de b corta á estas dos mismas verticales en los puntos b'', b''', con los cuales y los primeros obtenidos es que puede concluirse el antedicho paralelógramo $d'b''b'''d''$, en él trácese la transversal ob', así como las diagonales ob'', ob'''; ahora con el auxilio de estas líneas inscríbase al paralelógramo la elipse $d'b'd''$, insiguiendo en un todo lo explicado en el párrafo núm. 42. Repítase esta misma operación, para con respecto al arco semicircular proyectado en ac, teniendo en cuenta además que la separación ef ahora se ha de contar, desde la vertical ac; mas teniendo en cuenta que la elipse que así resultará, ha de ser igual á la anteriormente obtenida aunque colocada con respecto á ella, de modo que si se hubiera ella movido con un movimiento de traslación horizontal, recorriendo un camino $c'd'$ igual á cd bastará con ello correr la primitiva elipse $d'b'd''$ hasta á colocarse en $c'a'c''$. La sombra arrojada será

pues toda la que se encuentra en la parte superior del contorno $fd'h'a'c''$.

Mas estas dos elipses de sombra arrojada se cortan en el punto h', y esto precisamente indica que si se hace pasar el rayo de sombra que parte del punto h', este rayo de sombra se apoyará en h sobre el círculo posterior, al mismo tiempo que en h'' sobre el círculo anterior; y por lo tanto h es también sombra arrojada de h''; por lo cual se infiere que la línea oculta gh será la sombra arrojada en el interior del arco del trecho curvilíneo en el espacio, y que va de h'' á g.

El punto g que es el primero de la sombra se encontrará como anteriormente hemos indicado y como es de ver en las operaciones que constan en la figura.

83. Sombra en una estancia cuadrada, teniendo abierto en su techo un lucernario cilíndrico.—Se supone (fig. 77) que se da el interior de una habitación cuadrada; por medio de su sección longitudinal que pasa por el centro, cortándonos así á los muros en M y al techo en T, en el cual aparece también cortado el lucernario cilíndrico L; se emplea el rayo luminoso á 45°, y con ello, y con el precedente que tenemos ya de la forma de la sala, prescindimos por completo de la proyección horizontal.

La resolución de este problema se comprende ya desde luego, que ha de llevarse á cabo, con las mismas condiciones que en la cuestión anterior.

En efecto, propongámonos encontrar la sombra de la semi-circunferencia proyectada en bc, no sin que antes la consideremos inscrita en el semi-cuadrado correspondiente, este cuadrado encontraremos su sombra en $b'b''c''c'$; y es que $b''c''$, responde á la distancia gk que existe al plano vertical de los vértices del cuadrado más próximos á él; mientras que $b'c'$ es consecuencia de haber tomado la distancia gi igual al semilado del cuadrado de la planta de la habitación. En este paralelógramo y auxiliado de la transversal $m\omega'$, y la diagonal $\omega'b''$, inscríbase la elipse $b'mc'$ (núm. 43).

De esta elipse dedúzcase en seguida la $a'nd''$, con sólo un movimiento de traslación ascendente, cuyo camino sea la vertical $b'a' = ba$.

Ahora estas dos elipses se cortan en p por él, pasa un rayo luminoso pfq, y eso nos indica que á partir del punto q el rayo luminoso deja de cortar al plano vertical de la habitación, y corta en cambio al cilindro del lucernario según la curva ef, cuya se encontrará conforme tantas veces hemos hecho, esto es, por medio de los dos puntos e, f y sus respectivas tangentes, el punto auxiliar de esta curva, situado en el eje oh es el punto r según ya sabemos, $b'g'$ es sombra arrojada de bg, y la $g'h$ lo es, de la vertical que parte del punto g.

84. Sombra de un tubo cilíndrico.—Está representado el tubo en la fig. 80, suponiendo se le ha cortado longitudinalmente, por el eje, por lo que consideraremos la mitad de esta sección, expresada por todo el contorno bordeado con tinta negra y fuerte en su entonación; en este tubo nos proponemos determinar la sombra de su interno, partiendo del supuesto que hay en la base anterior de este cilindro, un orificio circular proyectado, de canto en el rectángulo $abdc$. Este es un ejemplo, muy frecuente en la aplicación de las artes industriales, es análogo á las cuestiones ya tratadas en las figs. 77 y 74, prestándose el que más para usar el rayo luminoso á 45° (sus proyecciones con la L de T) y con él poder hacer completa abstracción de la planta, ateniéndonos tan sólo al alzado.

Con el centro t y radios, las distancias tb y te (radios respectivos, cuya diferencia es el grueso del anillo que circunda el orificio), trácense dos semicircunferencias; son las que se distinguen de líneas de trazos. Estas líneas pueden considerarse como rebatimientos de la circunferencia interna del anillo, por la cual resbala el rayo luminoso; y la segunda la circunferencia externa, que servirá de sección recta de la superficie cilíndrica exterior, y será á propósito para averiguar de momento las intersecciones de este cilindro, con las distintas posiciones del rayo luminoso, cuando resbala por la primera circunferencia, arista ó borde interior del anillo, así si nos proponemos encontrar la sombra arrojada por el punto f, obraremos del siguiente modo: hágase pasar por f un rayo luminoso, la intersección f' con el cilindro, será dicha sombra arrojada; su encuentro es fácil si consideramos el punto f rebatido en φ, haciendo pasar por él el rayo luminoso referido al plano del rebatimiento; y como este rayo corta en φ' á la circunferencia que es sección recta del cilindro, en donde ha de encontrarse el punto de intersección, inferimos que φ' es precisamente el punto incógnito, aunque ahora se ha de trasladar en su lugar correspondiente, por medio de la

proyectante paralela á la dirección del tubo, la cual cortará al primitivo rayo luminoso que parte de *f* en el punto buscado *f'*. Escogiendo ahora nuevos puntos en *d*, *g*, *t*,... etc. y repitiendo otras tantas operaciones, obtendremos los de sombra respectivos en *d'*, *g'*, *t'*,... etc. y con ellos la curva arrojada en *d'g'f'v*... etc.; mas para saber donde termina, precisa ahora determinar la línea de sombra *kl*, que arroja la circunferencia anterior sobre el grueso del orificio, y ésta se obtendrá insiguiendo el procedimiento explicado en la fig. 73, ahora por el punto *l* pasa un rayo luminoso, el cual rasará al mismo tiempo por el punto exterior *m*, encontrando en *m'* al cilindro del tubo; este punto *m'* lo obtendremos del propio modo que los anteriores *g' f'*... etc., y él, será aquel en que concluye la curva en cuestión. Mas á partir de *m* el rayo resbala por el pequeño trecho de arco exterior proyectado desde *m* hasta *a*, y así el cilindro oblicuo que engendra en el movimiento, corta al del tubo, según la curva *ma'*; es la sombra arrojada del trecho de arco *ma*. Cada uno de estos puntos se hallarán, refiriendo los originarios en la circunferencia *ba'd*, y luego referidos, repetir igual operación que la explicada con el *f'*, sin embargo, el último punto *a'* se encuentra directamente por la intersección del rayo que parte de *a* con la semicircunferencia rebatida en *ba'd*. En *a* empieza en seguida la generatriz culminante *ab*, cuya horizontal y paralela al cilindro del tubo, tendrá por sombra arrojada sobre éste, la *a'b'* igual y paralela á aquella; adviértase con todo en esta *a'b'*, que *b'* estará en el encuentro del rayo que parte de *b*, con la semicircunferencia de mayor radio *e'b'y*.

Sigue luego la vertical de sección *be*; es la directriz de un plano vertical paralelo al rayo luminoso, éste nos cortara al cilindro del tubo, según una elipse, pero proyectada, según el trecho de circunferencia *b'e'*; y esta singular propiedad se comprenderá perfectamente, teniendo tan sólo en cuenta que el mencionado plano de sombra vertical, forma un ángulo de 45° con el plano de proyección vertical, y esto hace que el diámetro mayor de la elipse de sección, proyectado en *te'*, sea igual proyectado con el menor *te*; *e'b'* es pues la sombra arrojada de la vertical *be*. Sigue luego la generatriz *e'r'* cuya es sombra arrojada de la *er*. Y finalmente, la parte de circunferencia *yd'* es la sombra arrojada del trecho de la vertical *yd*, cuya circunferencia *yd'* es proyección de una elipse, conforme hemos ya indicado poco ha.

85. Sombra de dos cilindros superpuestos y verticales.—Puede ser el caso de un fuste de columna B, sosteniendo una plataforma terminada verticalmente por un cilindro A, ó bien si se quiere el cilindro A puede representar un collar, que ciña á la columna cuya práctica fué tan difundida en el arte Arquitectónico en el último período del renacimiento (fig. 81) el rayo luminoso es el que está inclinado á 45° en sus proyecciones con la L de T.

Ante todo, empiécese buscando la sombra propia de los dos cilindros, en *a'a"*, *b'b"* por medio de las tangentes en *a* y en *b* paralelas al rayo luminoso, por determinar ellas los planos tangentes límites.

Para la sombra arrojada de A sobre B imagínese el cilindro formado por los rayos luminosos que se apoyan en la arista curvilínea inferior *jkg-mh'*, encontrando luego su intersección con el cilindro B que como es vertical, en su misma sección recta, lleva ya proyectada, dicha línea de intersección, y así escogiendo en el borde de dicha circunferencia el punto *d-d'*, hágase pasar un rayo luminoso el cual corta en δ, al cilindro, cuyo punto δ tiene su proyección vertical en δ' esto es en la intersección de la generatriz que corresponde al punto δ, con el rayo luminoso que parte de *d'*.

Si empleamos ahora el punto *c-c'* que responde al rayo luminoso que en proyección horizontal es tangente en *a*, al cilindro B, entonces efectuando la operación anterior, se logrará el punto *a"*, es el punto de pérdida de la misma y en él el rayo luminoso le será tangente (núm. 27).

Ensayando el procedimiento en el punto *e-e'* referente á la intersección de la arista curvilínea *jkg*, con el plano vertical que pasa por O y paralelo al rayo luminoso, entonces el punto que obtendremos en ε-ε' será el más alto de la curva; y si tenemos en cuenta que ambos cilindros A y B vienen cortados simétricamente para con respecto al plano vertical *eo*, que pasa por el eje y contiene al rayo de luz, entonces habremos de convenir que la curva será simétrica, para con respecto al plano *èo*, de modo que obtenido un punto por el procedimiento que acabamos de reseñar, es fácil inmediatamente deducir otro; así, por ejemplo, obtenido el punto δ', que está precisamente en la proyección vertical, del eje, este punto por razón de simetría, se podrá trasladar desde luego en *n*, esto es, en la generatriz del contorno aparente de la izquierda; así, pues, tendremos tantos cuantos puntos desee-

mos, y con ellos la curva $n\varepsilon'\delta'a''$ sombra arrojada sobre B de la curva circular horizontal *mh'*.

Falta ahora expresar la sombra arrojada del cilindro A sobre el plano vertical de paramento CD, en donde la columna está embebida, un tercio de su diámetro, y para ello entramos de lleno en el problema de la fig. 37, lám. 3.ª, hágase pues como allí al determinar la sombra arrojada de los círculos horizontales de base, facilitando la operación, el ser iguales ambos, por lo que bastará encontrar uno de ellos, el inferior por ejemplo auxiliados del paralelógramo 1-2-3 4, y será la elipse 4*k*'1, y de ella deducir inmediatamente la superior, tan sólo en el trecho *h''f'*, por medio de un movimiento de traslación ascendente y vertical, recorriendo cada uno de sus puntos el camino *f''f'*=*b''b'*, cuya línea *f''f'* deberá ser la tangente por ser la sombra arrojada de la generatriz vertical *b'' b'*.

86. Otra solución.—Aquí (fig. 82) ambos cilindros A y B son horizontales; es el caso, que puede ocurrir en los diseños de detalle de máquinas, como por ejemplo un árbol A acompañado de un collar B.

El rayo luminoso también es el de 45°. La sombra propia de los dos cilindros la encontraremos desde luego en *ee'*, *ff''*. haciendo uso de las propiedades del (núm. 78), valiéndonos de los triángulos, rectángulos é isósceles *oac*, *obd*. Continuando valiéndonos de las ventajas de la inclinación de rayo á los 45°, proseguiremos la circunferencia de radio O*e'*, hasta que corte en *f'* la generatriz de sombra propia del cilindro A, entonces el punto *f'* será el punto de pérdida de la curva de sombra arrojada de la arista *e' j'* sobre el cilindro A. El punto *g'* de esta curva, que se encuentra sobre la proyección del eje se buscará directamente, conforme hemos hecho en el párrafo anterior, valiéndonos de las proyecciones *ml'n*, *prq* de las bases de los dos cilindros, combinados con la proyección correspondiente del rayo luminoso, conforme es de ver en la figura 82. Obtenido el punto *g'*, puédese en seguida lograr en razón de la simetría el punto *h*, situado en la generatriz del contorno aparente. Y, finalmente, el punto más alto *k* se encontrará directamente.

87. Como á ejemplo práctico notabilísimo en los asuntos arquitectónicos del problema del párrafo 84, referente á

la figura 81, podemos citar los templos circulares antiguos y muy especialmente (fig. A) el templo de *Vesta en Tívoli*; en él se destaca la sombra arrojada de un cilindro sobre el otro inferior y de menor diámetro en tres sitios distintos. Primero en la sombra de la cornisa sobre el friso. Segundo en la sombra del cornisamento sobre el muro exterior del recinto del templo (ésta es la mayor), y acentúa más su curvatura, atención hecha al mayor vuelo del cuerpo saliente; aquí cornisamento, y tercero: de la cornisa del basamento, sobre el fuste del mismo *.

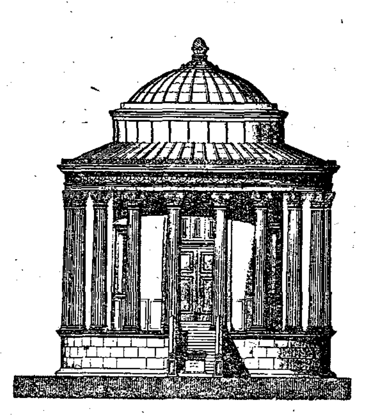


Fig. A

88. Bóveda por arista (fig. 79).—Nos proponemos aquí determinar las sombras que producen la combinación de dos cilindros horizontales que tienen la misma altura, así como el plano de arranque común, y ellos son los que producen la bóveda conocida con el nombre de *por arista*, la cual tiene la singular propiedad de que las curvas de intersección son planas, que se proyectan según dos rectas Dδ, ER en el plano de arranque, que aquí es el plano de proyección horizontal, viniendo á confundirse estas dos proyecciones con las diagonales del rectángulo de la planta formado por el corte sucesivo, dos á dos de las generatrices del arranque **. Presentamos aquí la bóveda por arista por medio de dos secciones, la una longitudinal, por la cual vemos el cilindro mayor proyectado en su sección recta que aquí es una elipse, en la figura 79', y luego una sección transversal, objeto de la figura 79'', en donde nos podemos hacer cargo de la sección recta del cilindro menor, que aquí es una semicircunferencia; ambas á dos, secciones producidas por el corte de dos planos verticales, pasando respectivamente la primera por el eje

* En esta fig. A, se ha prescindido de las sombras arrojadas de las columnas al objeto de que aparezca bien perfilada la línea de sombra arrojada.

** Para más detalles sobre el particular, véase la 2.ª parte de nuestro tratado de la *Estereotomía de la piedra*, párrafo núm. 12.

del cañón menor, y la segunda por el del mayor, la sombra que vamos á encontrar la consideraremos colocada para con respecto á estas dos secciones, tal como ellas se presentan, esto es, colocadas de una manera directa, tal como aparecen en las proyecciones (figs. 79′ y 79″); más no así para la planta ó proyección horizontal, pues que con el objeto de tener más combinaciones y aumentar las dificultades la concebimos invertida, suponiendo que dicha bóveda descansa sobre el plano horizontal, confundiéndose éste con el plano tangente común á los dos cilindros, el cual como es sabido contiene las dos líneas de contacto, correspondientes á las generatrices más altas, que aquí serán las más bajas, y dicho de otro modo y vulgarmente hablando, la bóveda estará situada *boca arriba*, el intradós en la parte superior y el extrados en la inferior, todo inverso de lo que realmente sucede en el espacio. Se dirá que es anómala esta disposición, por no tener aplicación directa en la práctica, y ser inverosímil que semejante construcción esté de tal manera colocada, más aquí no hace el caso el razonamiento, pues hemos dicho que se trataba de tener más peripecias en el problema, dando lugar á más práctica en el ejercicio de las sombras.

(*a*) Sombra de la sección longitudinal (fig. 79′) queda reducida á la curva elíptica XY, que produce la base circular O_1Z del cañón menor sobre sí mismo, nos encontramos dentro el caso empleado en el párrafo núms. 78 y 79; y á este fin valgámonos tan sólo del punto X y su tangente, haciendo uso de los triángulos $o_1\,\alpha\,Z$, $X\,Z\,\beta$; así como también del punto auxiliar Z' y su tangente ZZ', aprovechando de esta curva la parte real XY.

(*b*) Sombra de la sección transversal (fig. 79″), la constituye tan sólo la línea curva elíptica TU, que proviene de la sombra que arroja el arco elíptico proyectado en O_2a sobre el intradós de este mismo cilindro. El punto de partida T se obtiene recurriendo á la sección recta de este cañón elíptico proyectado en la figura 79′, y allí construir la tangente á dicha sección recta, tangente que sea paralela al rayo luminoso, así obtenemos el punto *t*, el cual referiremos en altura, hasta obtenerlo en T en la figura 79″ (núm. 77); téngase en cuenta ahora que en este punto no podemos alegar la propiedad que tenía la tangente en el punto análogo cuando se trataba del cilindro circular, haciendo uso allí de el triángulo rectángulo, cuya hipotenusa (la tangente) estaba inclinada

de $\frac{1}{2}$. No tendría cuenta aquí de buscar la relación que liga esta tangente, pues dicha relación variaría con las dimensiones de la elipse de sección recta.

Esta sombra si el cilindro elíptico no fuera interceptado por el circular, se extendería hasta *c* sobre el arranque; y aun después hasta el punto V; pero ya se comprenderá que el trecho V*c* correspondería á la sombra arrojada del último trecho del arco *ba*, sobre el muro vertical de sostenimiento, así pues las líneas V*c*, *c*T, son distintas una de otra, aunque teniendo una tangente común. Ambos puntos *c* y V pueden encontrarse si así se desea con el auxilio del plano de proyección (fig. 79′); en él se trazarán por *e* y por *h* dos rayos luminosos, el primero nos dará el punto *d* (corte con el muro de sostenimiento), y el segundo el punto *b′*, que será el originario del que produce el último punto de sombra arrojada sobre el cilindro elíptico, encontrándose con esto la sombra de dicho punto sobre la línea de arranque del cilindro.

En su virtud refiérase el punto *b′* de la figura 79′ en *b* de la figura 79″, conduciendo en seguida por *b* el rayo luminoso, cual cortará en *c* á la línea de arranque, proporcionando así el punto extremo de la curva, á la vez que su tangente, que aparecerá confundida con el rayo luminoso (núm. 77).

Con estos elementos tenemos bastante para trazar la curva aprovechándola en el trecho real TU, el cual no es muy extenso, más si puntos intermedios quisiéramos buscar para alcanzar más desarrollo á esta curva elíptica, entonces lo propio que se efectuó en el párrafo 77 podría aplicarse en este caso, echando mano de la sección recta del cilindro elíptico situada en la figura 79′, en ella se escoge el punto originario que se quiere, el *1* por ejemplo; por él pasa ahora un rayo luminoso, el cual corta en *z* al cilindro, siendo por lo tanto el punto *z* arrojado del *1*; condúzcanse, pues, ahora todo lo hecho á su debido sitio, en la (fig. 79″), y así lograremos el punto *z′* de la curva de sombra. No hay necesidad aquí del trecho de curva *c*V por ser distinta de la anterior, más de querer encontrarla, las construcciones indicadas en la lámina explican sobradamente como se llevan á cabo.

(*c*) Sombras sobre la planta invertida (fig. 79). 1.° La Nμ es la sombra arrojada de la arista EN sobre el cilindro elíptico; su punto de partida N responde al de tangencia *t* de la figura 79′ correspondiente al plano tangente al cilindro; é in-

clinado á los 45°; su punto último ζ, derivará de otro punto de la generatriz de arranque (recuérdese que el cañón está invertido), y por lo tanto, trazando por el punto E-Y un rayo luminoso, éste cortará en ζ-b' al cilindro, al mismo tiempo que Eζ será la tangente á la curva; con estos elementos trazaremos ya la curva Nζ, aprovechándola no más en el trecho real Nμ, si mayor exactitud deseáramos con un punto intermedio M', éste se encontraría escogiendo el punto originario M-*z*, conduciendo por él un rayo luminoso, y encontrando finalmente el punto M'-1 de intersección de aquél con el cilindro elíptico.

2.º La línea elíptica que se extiende de P á Q es la sombra arrojada de la arista PR sobre el cilindro circular. El punto de partida P, lo proporciona el plano tangente á los 45° al cilindro circular, expresado en la figura 79" que da la generatriz de tangencia, proyectada en el punto P', y en cuanto al último punto Q de esta sombra, ya sabemos (núm. 78) que se halla en la intersección del eje con el rayo que parte de R, rayo que á la vez es tangente á la curva en dicho punto.

3.º Sombra del pilar y anexos de la parte izquierda, la línea elíptica BC es la sombra que arroja el arco proyectado AB sobre el cilindro circular; el B es el punto de partida, el cual se infiere de la generatriz ya trazada, proyectada en P'; la tangente BG en dicho punto B, se deduce por el triángulo BGA (núm. 78). En cuanto al punto G último de la curva, está en la intersección del eje con el rayo que parte de A, y dicho rayo es la tangente á dicha curva en el propio punto C.

La recta CD' es sombra arrojada sobre el cilindro circular de la generatriz de arranque AD; sigue luego la línea circular D'F' (pero que en el espacio es una elipse), y es la sombra que arroja el trecho de generatriz de arranque DF, y en pos ella sigue F'H', sombra arrojada en el cilindro elíptico del resto FH de la generatriz antedicha, y, finalmente, la curva elíptica H'J, sombra arrojada del trozo de elipse proyectado horizontalmente en HJ sobre el cilindro elíptico. El primer punto J lo dará el plano tangente en *t* inclinado á 45° (fig. 79'), y su tangente LJ en este punto de partida, se obtendrá combinando el plano tangente al cilindro elíptico; y cuya traza horizontal es ν *k* con el plano de la curva, cuya traza horizontal es la φθ (núm. 77) la intersección de estas tra-

zas es el punto L, y por lo tanto LJ la tangente buscada. En cuanto al último punto H', lo proporciona proyectando en el rayo que parte de H el punto *b'* de la figura 79', puesto que este punto *b'* obedece al rayo que parte del *h* del arranque último de la curva, es el más bajo en la figura 79', pero el más alto en la figura 79, atendiendo á la convención que hicimos en lo inverso de la bóveda.

Se comprende fácilmente ahora que todo punto I', intermedio que quisiéramos, lo hallaríamos insiguiendo los procedimientos detallados en circunstancias análogas, y que á pesar de ello constan las construcciones en dicha figura 79.

89. Sombra en los cilindros de una bóveda en Luneto. —En este caso los cilindros se diferencian del anterior que acabamos de ver, en que, los cilindros no tienen la misma altura, cortándose según dos líneas de doble curvatura, si bien en proyección horizontal según dos ramas de una misma hipérbola *; sin embargo, continúan teniendo el mismo plano de arranque. En el caso de la bóveda por arista, hay penetración recíproca entre las dos superficies, mientras que en la bóveda en Luneto hay sola penetración del cilindro menor en el mayor.

Por lo demás, los datos vienen dados en la misma disposición que hemos expuesto en el caso anterior, así la figura 78 es la planta considerada como allí invertida, la figura 78' figura la sección longitudinal, y la figura 78" la sección transversal; continúa también aquí empleándose el rayo inclinado á 45°.

Sección longitudinal.—En ella hay como á línea de sombra la P*r*; es la sombra que arroja el arco circular PZ sobre el cilindro menor. Dos puntos y las dos tangentes en ellos bastarán para trazar la curva elíptica P*r*, el punto de partida P y su tangente en él con el auxilio de los dos triángulos $o_1\alpha z$, Pβz, el último punto *z'* y la tangente en él, valiéndonos del triángulo $o_1 z z'$ (núm. 78); y luego se obtiene en seguida el punto real *r*.

Sección transversal.—Con análogas operaciones se encontrará la curva elíptica *mn*, sombra arrojada sobre la parte cóncava del cilindro menor del arco de embocadura proyectado en el trecho *mg*.

* Véase para esto nuestro tratado de Estereotomía, 2.ª parte, págs. 86.

Planta.—En ella hay varias masas de sombra, cuales son:

(*a*) La *a'd*, línea alabeada en el espacio, representando la sombra arrojada de la arista *ca'* sobre el cilindro de radio menor, (aquí en este caso no siendo ya una curva plana la arista de que se trata, no tiene ya aplicación la propiedad enunciada en el párrafo núm. 78). El punto de partida *a'*, se encuentra inmediatamente con el auxilio del plano tangente en *a* (fig. 78'), cual está inclinado á los 45°; el último punto *c'*, cuyo originario es *c*, se encuentra en el eje y en el rayo que parte de *c*, cuyo rayo es tangente á la curva en dicho punto; un punto intermedio *b'*, empleando el procedimiento general, y que á la vez muestra la figura.

(*b*) La *eg*, sombra arrojada de la arista *ej*, sobre el cilindro del rayo mayor. Está en análogas condiciones que la anterior, y sobran explicaciones; bastan las construcciones que obran en la figura.

(*d*) Sombra de la izquierda de la planta producida por la combinación del pilar con los detalles anexos, y se compone de las siguientes partes:

1.° La curva elíptica CD, sombra arrojada sobre el cilindro de radio mayor, producida por el trozo de arco circular de paramento, proyectado horizontalmente en AC. Los dos puntos de partida, el uno C y el último el otro D, así como su tangente, serán suficientes para trazarla con bastante exactitud los triángulos SAD, ABC, bastan para evidenciar las construcciones (núm. 78).

2.° La recta DE, coincidiendo con el eje, es la sombra que arroja la generatriz de arranque AG sobre el cilindro mayor.

3.° Sigue la circunferencia EF, que es la sombra arrojada sobre el cilindro menor, cuya línea la origina la generatriz de arranque en el trecho GH (esta curva FE es elíptica en el espacio, pero proyectada se presenta circular, en razón de ser á 45° el rayo luminoso relacionado con la posición especial dada á la bóveda).

4.° La FI' recta, sombra arrojada sobre el cilindro de radio menor del trecho restante HI de la generatriz de arranque; aquí la sombra es igual y paralela á la línea original, y

5.° La elipse RI', sombra arrojada del arco de embocadura RI, sobre el cilindro menor; bastan dos puntos R y I' y sus tangentes, haciendo uso de los triángulos consabidos IJR, O_2II' (núm. 78).

Todos estos ejemplos se han propuesto para evidenciar (núm. 20-2.°) las ventajas indiscutibles del empleo del rayo luminoso, cuyas proyecciones forman ángulos de 45° con la L-T, pues nacen gran número de relaciones que facilitan brevedad á la par que exactitud en las construcciones.

CONO

90. Cono oblicuo (fig. 83, lám. 10).— El cono es circular, de vértice VV', la base, partiendo del plano horizontal, y su radio conocido por el dato, se trata, pues, aquí de trazar dos planos tangentes al cono que sean paralelos al rayo luminoso; y sabido es que la tangencia se verificará á lo largo de dos generatrices de contacto, cuyas no serán otra cosa que las líneas de separación de la parte iluminada y de la sombra propia; más como quiera que por la índole especial de la superficie, en donde todas las generatrices pasan por el vértice, se infiere también aquí que no siendo excluídas de tal propiedad las dos del contacto mencionado, resultará que si buscamos la sombra arrojada del vértice, por ella también pasarán las dos que arrojan las líneas divisorias de luz y sombra propia; en tal concepto hagamos pasar por el vértice un rayo luminoso, buscando en seguida su traza horizontal, ésta se encuentra en *h*, y así este punto nos expresa la sombra arrojada del cuspidal; por él pasarán ahora las dos mencionadas líneas de sombra arrojada, cuales aquí se confunden con las trazas horizontales de los planos tangentes antes mentados; trácense, pues, por *h* las dos tangentes *hb*, *ha*, aprovechando empero de ellas los trechos *bc*, *ad*, únicos aprovechables, pues que considerando el plano vertical opaco, la sombra no cayendo ya en el plano horizontal posterior, será recibida en cambio por el plano vertical, y la recibirá según el triángulo *dcv* formado por la unión de los puntos anteriormente encontrados en la línea de tierra *d*, *c*, con el punto *v* traza vertical del rayo luminoso que con antelación se ha hecho pasar por el vértice. Con ello se tiene, pues, que aquí existe sombra interrumpida, siendo *cd* los puntos del quebranto, y que la totalidad de la sombra está limitada por el contorno *advcb*, esto en cuanto á la arrojada, que para con respecto á la propia, ya desde luego se comprende que ha de estar limitada por el sector cónico definido por las ge-

neratrices bV'-$b'V$, aV'-a'-V obtenidas de unir el vértice con los puntos de tangencia encontrados en b y en a.

91. Cono recto, cuyas generatrices están inclinadas de 45° con el plano de su base, y empleándose el rayo luminoso igualmente de 45° sus proyecciones con la L de T (fig. 84).—Efectuando con estos datos el procedimiento visto en el caso anterior, tendremos que la separación de la sombra propia serán las dos generatrices, una que será la del contorno aparente $V'b$ Vb', y la otra la correspondiente en el plano meridiano de perfil $V'a$, Va'; las cuales formarán un verdadero cuadrante en el plano horizontal, relativo al círculo de base, quedando con ello en sombra la cuarta parte de la superficie del cono.

En la parte vista de la proyección vertical todo estará en luz; y para con respecto á la sombra arrojada en el plano horizontal, quedará ella encerrada en el ángulo recto bva, formado por las dos tangentes á la base del cono, la una perpendicular y la otra paralela á la L de T; así teniendo en cuenta estas circunstancias podremos en semejante caso dibujar directamente la sombra sin necesidad de mediar ninguna construcción.

92. Caso en que las generatrices del cono estén inclinadas del ángulo ω, continuando el rayo á 45° (Véase el párrafo 20-2.°).—En este caso sabemos que si bien el ángulo que forman las proyecciones del rayo con la L de T, es de 45°, es también cierto que el ángulo que forma el rayo con el plano horizontal es igual á ω, así, pues, rayo y cono siendo igualmente inclinados con el plano horizontal, resultará que al ir á trazar por el vértice un rayo de luz, éste coincidirá con una de las generatrices del cono, siendo por lo tanto su traza uno de los puntos de la base, resulta con ello que la sombra en este caso se concretaría á la mencionada generatriz, que no sería otra que el rayo de sombra, que dejaría tras de sí el punto cuspidal. Mas considerando las construcciones en su límite, y conviniendo que un punto es la carencia de toda dimensión, de aquí resulta que bien podremos convenir que el cono carecerá de sombra en semejante estado de cosas.

93. Cono iluminado por entero.—Tiene lugar semejante caso cuando el rayo luminoso forma un ángulo con el plano de la base del cono, mayor que el que forman las generatrices con dicha base, pues en semejante situación (se trata de un cono recto), se comprende perfectamente que el rayo que pasa por el vértice tendrá su traza horizontal en lo interno de la base, no pudiéndose ya trazar tangentes á dicha curva.

Claro es que esto mismo nos dará pie para generalizar esta cuestión para concluir que: *en un cono cualquiera estará completamente iluminado cuando la traza del rayo luminoso que pasa por su vértice cae en el interior de la línea de base (base cerrada).*

94. Sin embargo, la excepción que sufriría semejante propiedad, será cuando se consideren las dos hojas del cono, pues entonces la hoja superior arrojará sombra sobre la inferior, cuya cuestión vamos á ver en la fig. 87, en donde las dos hojas están expresadas en los triángulos A V^v B la superior, y la CV^v D la inferior, ambas proyectadas horizontalmente en los dos círculos concéntricos de radio respectivo V^h A', V^h C'; sea ahora la dirección de la luz R^v-R^h. El rayo que pasa por el vértice corta aquí al plano de base del cono en el punto α-b, esto es, en el interior del contorno de dicha base, en este concepto el cono V^v C D estaría completamente iluminado, á no estorbarlo la hoja superior A V^v B, la cual, encontrándose en posición completamente opuesta é invertida de la primera, ella estará toda en sombra, apareciendo únicamente iluminado el plano de base; resultando de ello que la circunferencia de radio V^h A' será línea divisoria de la luz y sombra propia; por ella, pues, rasarán los rayos luminosos. Escojamos, pues, un punto, como por ejemplo en m-m'; por él pasa ahora un rayo luminoso que se convertirá en rayo de sombra en su prolongación hacia la parte opuesta á la luz, y este rayo de sombra, cortando á la hoja inferior en el punto n, éste será la sombra arrojada del primero m.

Para encontrar á dicho punto n, es cuestión, pues, el resolver el problema conocido, de la intersección de una recta con un cono; á este efecto hágase pasar un plano por el rayo luminoso que parte de m-m', encontrando la intersección de este plano con dicho cono, y finalmente, la intersección de aquella intersección y el rayo luminoso. Mas de todos los planos que podemos escoger auxiliares que pasan por el rayo de m-m', claro está que iremos á escoger aquellos que nos

den las líneas de corte más fácil con la superficie del cono, serán, pues, planos que pasan por el vértice del mismo, para que así tengamos no más rectas á combinar; en este concepto hállase la traza horizontal b del rayo luminoso que pasa por el vértice, así como la que corresponde á la generatriz que pasa por m, esta última está en p, es evidente ahora que la recta pb es la traza horizontal del plano secante en las condiciones antes impuestas; más como resulta que dicha traza vuelve á cortar en q á la base del cono, de aquí resulta que la generatriz qV^h es la línea de sección del cono con el plano; y por lo tanto el punto n-n' que resulta de cortar el rayo que pasa por m-m' á dicha generatriz, nos suministrará el de sombra arrojada del punto escogido. Repitiendo, pues, semejante operación, obtendremos nuevos puntos de la curva.

De escoger el punto l-l'', situado en el mismo plano meridiano que contiene al rayo luminoso, entonces el punto de sombra l'-l''' se encontrará aun más directamente, pues será dado de un modo inmediato por la intersección de la generatriz $V^h G$-$V^v G'$ con el rayo de sombra que parte de l-l''.

El procedimiento (n.° 24) de planos horizontales se presta aquí también para emplearlo con ventaja en busca de los puntos que queramos, y que se encuentren á la altura que deseemos; así, por ejemplo, tratemos de determinar los puntos que corresponden al plano secante horizontal XX', semejante plano nos produce en el cono una sección circular yzf; por otra parte, si buscamos la sombra que produce el círculo AB, sobre dicho plano, ésta la encontraremos en el que tiene el centro en ω-ω', y por radio el mismo del originario; ahora bien, de encontrarse estos dos círculos, como efectivamente se encuentran en f y e, esto indicará que estos puntos son sombra arrojada sobre la hoja inferior, y en el círculo de la altura escogida XX'; de aquellos otros dos puntos originarios colocados en el círculo de base de la hoja superior; proyéctense, pues, verticalmente dichos puntos en $e'f'$. Empleando dicho segundo procedimiento con el mismo plano de proyección horizontal, que aquí es el confundido con el de la base del cono inferior, obtendremos directamente los puntos de partida de la curva, y serán los c-c', d-d'. Semejante sistema es esencialmente útil, pues nos indica al mismo tiempo al obtener cada operación dos puntos igualmente separados del plano vertical que pasa por R^h; que la curva $dnl'''fc$ es simétrica, siendo el más

alto el encontrado en l'''-l' situado en dicho plano proyectante de R^h.

Finalmente, concluyendo en c y d la línea de sombra que arroja la circunferencia AB sobre la hoja inferior, esto indicará que á partir de dichos mismos puntos su sombra será arrojada en el mismo plano horizontal, siéndolo como es evidente la circunferencia cgd de radio igual al del círculo originario AB.

95. Cono del cuál no pueda disponerse de base.—Es el caso representado en la fig. 85, en donde la línea que sirve de directriz es la curva alabeada $abcd$-$a'b'c'd'$, y con ello se desprende inmediatamente que no podríamos aplicar el procedimiento visto en la fig. 83; sin embargo, podemos con facilidad referir á aquél los nuevos datos, con sólo echar mano de un plano auxiliar secante al cono, y escoger la posición de este plano de la manera más ventajosa que creamos más procedente; aquí escogemos el plano horizontal Pt', el cual corta al cono según la curva plana $\alpha\beta\gamma\delta$, tomando esta curva como á verdadera directriz, y á su plano como el de la base del cono, estaremos ya en las mismas condiciones que en la solución dada en la fig. 83. Trácese, pues, el rayo que pase por el vértice del cono, encuéntrese la traza t-t', desde cuyo punto se dirigirá la tangente $t\varphi$ á la curva, el punto de tangencia φ, unido con el vértice determinará la generatriz de la sombra propia.

Ahora es cuando se puede precisar toda la línea del contorno del cono, que es de separación de luz y sombra, y advirtiendo que ya de momento se advierte que toda la cara inferior de la superficie está en sombra, luego se infiere que el total de la línea que va á servir para directriz del rayo de sombra que va á dar la arrojada; aquí toda entera cae sobre el plano horizontal, se compondrá de la generatriz $V^h\varphi''$, de la directriz curvilínea $\varphi''c'b'a'$; y de la generatriz extrema $V^h a$, haciendo, pues, pasar rayos de sombra y encontrando sus trazas horizontales, vendremos á deducir el contorno mixtilíneo $v\varphi'''a''$ como á dicha sombra arrojada.

96. Cono con vértice inaccesible.—Con frecuencia ocurre en las aplicaciones aparecer un cono cuyas generatrices van á cortarse fuera de los límites del dibujo, ó también tratarse no más de un cono truncado en el que hayamos de li-

mitar las operaciones en el espacio comprendido entre las dos bases. En semejante estado, lo lógico y acertado es acudir al procedimiento del párrafo (n.° 24) y en tal concepto (fig. 86). Ténganse en cuenta las bases superior é inferior $e'f'$, $g'h'$, aquí la primera es una circunferencia de centro O y de radio Oa, y la segunda otra circunferencia de centro ω y de radio ωc. Encuéntrense ahora por separado la sombra de dichas dos bases; la primera lo será la misma base por estar ya de hecho confundida con el plano horizontal, mientras que la segunda la hallaremos en la circunferencia igual á la original y colocada, teniendo por centro ω''; es evidente ahora que la sombra arrojada correspondiente á las generatrices, límite de sombra propia subsistente en la superficie cónica han de venir precisamente á ser tangentes á las circunferencias encontradas en la sombra arrojada (por ser común el plano tangente en c al cono y al cilindro luminosos); luego quedará resuelta la cuestión trazando las tangentes comunes bd', ac', á las mismas, y el contorno $afbd'c'$ será la sombra arrojada, mientras que utilizando los puntos de tangencia hallados en a y b, por ellos habrán de partir las generatrices de tangencia, cuyas trazas horizontales de los planos tangentes son las mismas ac', bd'; estas generatrices de contacto ac-$a'c'$, bd-$b'd'$, sabemos por otra parte son las líneas divisorias de luz y sombra propias que nos proponíamos investigar.

97. Sistema de Reyter.—Es á propósito para el caso en que el rayo luminoso vaya á cortar á la base del cono á una distancia inaccesible, ó quiera prescindirse de la proyección horizontal del cono; de todos modos adopta Reyter esta solución, valiéndose del rayo cuyas proyecciones formen ángulos de 45° con la L de T.

El artificio de que se vale, consiste en escoger un plano auxiliar y vertical que pase por el eje del cono, y forme un ángulo de 45° con el plano de proyección vertical; atendamos para ello á las dos figuras (91 y 91', lám. 11), una en perspectiva, la otra en proyección vertical solamente, que es la única que se supone disponer en este especial caso. En este plano P se encuentra la sombra que sobre él arroja el cono, lo cual es facilísimo, pues el vértice V ya de por sí es sombra de sí mismo, y la sombra que concierne á la base circular aparece proyectada según otro círculo de menos radio, tal como resulta en la curva $maq'bn$, así, pues, trazando á este

círculo desde el punto V las tangentes Vm, Vn, la sombra total de la arrojada del cono estará expresada por $Vmaq'bn$. Ahora partiendo de contraproyección, se infiere que si por m y n se trazan rayos luminosos, éstos irán á cortar á la base del cono en el espacio, en los puntos m', n', siendo estos los puntos originarios de los m y n, luego infiérese de aquí que las líneas divisorias de luz y sombra en el cono dado, serán las Vm', Vn', originarias de las que arrojan en Vm, Vn, sobre el plano P.

Que en estas condiciones el círculo de base aparece según otro en su sombra arrojada es evidente, pues el plano P corta al cono según las dos generatrices Va, Vb, mientras que al plano H de esta base la corta según la recta ab, diámetro del círculo de esta base; así es que el plano P, el plano H y el de proyección vertical Q están entre sí y con relación al círculo de base y al rayo luminoso (inclinado á 45° según hemos dicho), exactamente en las mismas condiciones que las vistas en el párrafo 44, en donde demostramos el caso de aparecer un círculo la proyección ó sombra arrojada de otro círculo original.

Así, pues, el medio práctico de resolver esta cuestión será: dado la proyección vertical del cono (fig. 91') en qVg, trácese la qq' inclinada de 45° con qg, y luego la que partiendo de O la es perpendicular, así tendremos el triángulo rectángulo isósceles $aq'o$; ahora con el radio Oq' descríbase la circunferencia $aq'b$, esta será la sombra arrojada del círculo de base.

Por el procedimiento y que consta en la figura condúzcanse á esta circunferencia las dos tangentes Vm, Vn, y, finalmente, por contraproyección, proyéctense en dirección paralela á los rayos de luz los puntos m y n en m' y n', así se obtendrán definitivamente las líneas límites de sombra Vm', Vn', habiendo prescindido de la proyección horizontal de la superficie cónica.

98. Cono cuyo vértice se supone al infinito.— Es el cilindro, y se trata de corroborar, como considerando este segundo, como un cono, como por análogas consideraciones puede hallarse su sombra.

En efecto, si se trata de un cono recto, éste degenerará en el cilindro suponiendo el vértice alejado al infinito; ahora como para hallar las líneas de sombra en el cono se hace

preciso trazar las tangentes á la base, desde el punto de traza del rayo que pasa por el vértice (traza sobre el plano de base), y aquí estas tangentes han de partir de un punto situado al infinito, resulta que dichas tangentes (fig. 92) *cc'*, *dd'* serán paralelas ambas á la proyección del rayo (éste se supone inclinado á 45°), luego las generatrices de contacto ó líneas límites de sombra propia serán las verticales *d-ih*, *c-ja'*.

Mas si carecemos de la proyección horizontal, y sólo si, de la vertical, con no menos rapidez y facilidad vendremos en conocimiento de las líneas de separación, de luz y sombra, pues poniendo en práctica la solución de Reyter, con arreglo á lo practicado en el párrafo anterior, se podrá echar mano del plano vertical auxiliar que forme un ángulo de 45° con el plano principal del cilindro, que se levanta sobre el diámetro *ab*, entonces aquí como allí, buscando la sombra arrojada sobre este plano del círculo de base superior *qr*, entonces esta sombra aparecerá en proyección, como un círculo *a'egh*, al cual trazaremos tangentes, desde el punto vértice del cono, situado sobre la vertical del punto O, y á una distancia infinita, y claro está entonces que estas tangentes, siendo paralelas y verticales, corresponderán los puntos de tangencia en los *a'*, *h*, extremos del diámetro horizontal, no habrá, pues, necesidad de acudir como en el cono, á contraproyectar estos puntos sobre la base originaria, ellos mismos se confundirán con los originarios pudiendo trazar directamente por ellos las generatrices *a'j*, *hi*, que son las líneas divisorias de luz y sombra.

Resumiendo, pues, este procedimiento, y cerniéndonos á la parte práctica, todo quedará reducido á trazar el triángulo rectángulo isósceles *qfe*, cuya hipotenusa sea igual al radio del cilindro, (pues aquí se practica dicho procedimiento en un cilindro de revolución, y el rayo á 45°), llévese la distancia ó cateto *fe*, en *a'f* y en *fh*, y así se obtienen de momento los puntos *a'*, *h*, por donde se conducen las líneas de sombra correspondientes.

Aun se ha tratado de sacar mayor partido de dicho procedimiento evaluando la distancia *fh* en función del radio del cilindro, toda vez que conociendo ya esta relación de antemano, no habrá más que colocarla desde O hacia su derecha é izquierda en *fh*, *fa'*.

Ahora bien, considerando al triángulo rectángulo isósceles Obm, éste nos dará $\overline{Ob}^2 = 2 \times \overline{Om}^2$ ó bien siendo R el ra-

dio $R^2 = 2 \times \overline{Om}^2$, $Om = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = 0'707$ R; de modo que tomando desde *f* y á su derecha é izquierda la fracción 0'707 del radio, tendremos así los puntos de donde parten las líneas divisorias de luz y sombra.

99. Problema de Mr. Derboux.—Titulado por su autor con el nombre de dos *conos gemelos*, y que nosotros lo aplicamos á la determinación de las sombras á que los mismos se prestan, caso muy raro y particular que influye notablemente al conocimiento práctico que el operador pueda adquirir después de ejercicios en que los resultados aparecen con propiedades inusitadas y nada comunes, haciendo así se adquiera un tino especial en sortear construcciones, tendiendo á la brevedad del final que se persigue.

Dos conos A y B (fig. 93) de revolución, rectos é iguales, están superpuestos á lo largo de una generatriz común VC, y, por lo tanto, sus vértices se confunden en el punto V, el radio V'C' de la base es la mitad de la generatriz VC. Uno de los conos, el A por ejemplo, descansa en su base sobre el plano de proyección horizontal, y de tal modo que su circunferencia sea tangente en O á la L de T, así como su generatriz VC paralela al plano vertical de proyección. El problema pide, que con arreglo á estos datos se construyan las proyecciones del sólido así formado, y al mismo tiempo la determinación de su sombra, en el concepto de ser F-F' el foco luminoso, siendo la distancia F'C igual al doble de la longitud de una generatriz DV.

Para la 1.ª parte de este ejercicio, empecemos dibujando la base horizontal circular, cuyo centro sea O-V', de modo que con el radio dado de la misma cumpla ella la condición de tangencia con la L de T en O. Proyectando el diámetro D'C' en DC, constrúyanse el triángulo equilátero DVC y luego otro en CVE; en este último, el lado CE, será la proyección vertical de la base circular del segundo cono B, y de ella podrá ya deducirse fácilmente la proyección horizontal de la base en la elipse C'G'E'G''.

Con respecto á la segunda parte de la cuestión, tómese CF'=2-DV' y observando que el centro del foco sitúa en el mismo plano horizontal, inferiremos que las trazas de los planos tangentes al cono A, serán las F'H, F'C', dándonos con

ello los puntos de tangencia H y C', á la vez que las generatrices de contacto HV'-H'V, V'C'-VC, líneas de separación de luz y sombra propia. Mas como los rayos que pasan por H y V', situados en el plano límite tangente á lo largo de V'H cortan al plano vertical en los puntos J y K, de aquí se infiere ser la JK la sombra arrojada de la generatriz VH'.

Lo propio haremos para el cono B, más para precisar mejor la tangente FM' á la base proyectada según la elipse ω, haremos la operación rebatiéndola en el círculo ω', trazando allí la tangente FM, trasladándola á su debida posición FM', así tenemos la V'M'-VM" la generatriz divisoria de luz y sombra, quedando la otra VC-V'C' confundida con la misma encontrada en el cono gemelo, ahora el punto N es traza vertical del rayo de sombra que pasa por M', luego la KN es sombra arrojada de la línea VM"; en cuanto á la sombra arrojada de la base circular de B, ella se confunde con la misma traza vertical CE del plano de base, en atención de estar situado el foco en dicho plano, y este último es perpendicular al plano de proyección vertical.

Obsérvese finalmente, para la debida comprobación de operaciones, que la traza vertical *t*, de la generatriz V'M' habrá de coincidir precisamente con el punto de intersección de las NK y VM".

100. Cono hueco.—Es la aplicación de la sombra á una zanja cónica (fig. 88), formando un verdadero cono truncado, considerándolo en su parte interior ó cóncava, y admitiendo en él un corte meridiano, cuyo plano de sección tomaremos como á plano de proyección vertical, pudiendo así ver el detalle interior de la curva de sombra, en tal concepto el trapecio AB*ab*, es dicho corte vertical, mientras que las circunferencias concéntricas de centro V constituyen en la proyección horizontal las bases superior é inferior de dicho cono. Dada ahora la dirección del rayo luminoso R^v - R^h, ya desde luego se descubre que la parte de la curva circular de base superior, que se encuentra hacia la izquierda, será la que dividirá el claro de lo obscuro; y, por lo tanto, habrá de servir de directriz al rayo luminoso al venir á determinar la sombra arrojada de esta misma parte de curva en el interior del cono; precisa, pues, encontrar los puntos límites, que nos indiquen la justa porción de curva que origina dicha sombra.

Para encontrarlos, observaremos que habrán de corres-

ponder á los límites de aquellas generatrices de contacto del cono con planos tangentes al mismo y paralelos al rayo luminoso, insiguiendo, pues, lo dicho en el n.º 90; trácese el rayo luminoso por el vértice V-V' y por el punto de traza t^h - t^v sobre al plano de la base, condúzcanse las tangentes $t^h m$, t^hM á la base circular; los puntos de tangencia *m* y M, son, pues, aquellos en que pasarán las generatrices límites del cono, y como quiera que el trecho de curva comprendido entre ellos, MZX*m*, es la que se opone á la luz, ella será también la línea originaria de la arrojada que buscamos.

A este efecto, propongámonos encontrar la sombra arrojada del punto *n*; hágase pasar por él un plano secante $t^h np$, que á la vez pase por el vértice del cono y sea paralelo al rayo luminoso semejante plano, habrá de cortar al cono según la generatriz *p*V, y al cilindro de los rayos luminosos que se apoyan en la línea MZX*m*, según la generatriz *nn'*; ambas secciones rectilíneas se cortarán en *n'*, y esta será la sombra arrojada del originario *n*. Así se irían encontrando los demás hasta que la curva, partiendo de *m* y pasando por *n'* encontraría en *q* la circunferencia de base inferior, teniendo el *q*, por originario el X, indicando con ello que á partir del punto X, la sombra del arco XZ cae arrojada en el plano de dicha base, haciéndolo según un arco de circunferencia *qr*, igual y paralelo al ZX, y cuyo centro ω' será la traza del rayo luminoso que pasa por el centro O de la base superior sobre el plano de la base menor.

Compréndese desde luego que pudiéndose escoger simétricos los puntos de la curva MX*m*, simétricos también serán la situación de los planos secantes y la de los puntos de sombra que encontremos, para con respecto al eje de simetría t^h ω'; así es que una vez encontrada la parte de curva hacia un lado, la *mn'q*, por ejemplo, se podrá deducir fácilmente por razón de simetría, la que se encuentra en M*r* hacia la parte opuesta.

Además, dos á dos los puntos de dicha curva, y en atención á semejante simetría y formación, están enlazados por una serie de rectas paralelas á las M*m*, que son cuerdas de la superficie divididas todas por mitad por el plano vertical t^hV que contiene el rayo luminoso, luego este plano es un plano principal y la curva será plana, puesto que todas las mencionadas cuerdas se apoyarán en la recta 1-2 producida por el lugar geométrico de los puntos de intersección de dichas cuerdas con el citado plano principal.

Esta importante propiedad, que hemos observado por inducción á posteriori, una vez vistas las circunstancias que concurrían en el problema resuelto, hubiera podido ser aplicada directamente, teniendo en cuenta el teorema, el cual *a priori* nos indica desde luego del modo como hemos de llevar las operaciones para obtener la línea de sombra proyectada según una línea recta; este teorema es el siguiente:

Si un cono y un cilindro de segundo grado se penetran según una línea de entrada plana, la curva de salida será igualmente plana; estas dos líneas de intersección pertenecerán al género de las cónicas, ya que las superficies que se consideran son de 2.° grado.

En efecto, sea en la fig. 89, AVC, un cono de 2.° grado, de eje VO, y en él, consideramos una base elíptica, tal como la que suponemos esta proyectada según la recta DC, en este supuesto hagamos servir á esta elipse como á directriz de un cilindro, cuyo eje es FF′, y de dirección paralela á los rayos luminosos, cilindro y cono se cortarán en su contorno aparente en los puntos D,B,C,A, los puntos D y C, así como todos los comprendidos entre ellos, ya por el supuesto pertenecen á la curva elíptica de entrada, y en cuanto los A y B pertenecen evidentemente á los extremos de la de salida, veamos, pues, cual, es ella. Coincibamos el plano AB, perpendicular al plano de las rectas VO, FF′, ejes de las dos superficies; este plano secante las cortará según dos elipses que tendrán un eje común AB, así como también será común el punto E, y con ello deducimos que dichas dos elipses están superpuestas coincidiendo en una sola. Así, teniendo ahora no más en cuenta la parte que utilizamos EB, este arco elíptico estando situado á la vez en el cilindro y en el cono, formará parte de la intersección de los dos, y como á tal se le podrá considerar como la sombra que arroja el trozo de arco DE, de la base del cono, sobre el interior del mismo. Además vemos que el plano de esta cónica se encuentra perpendicular al que pasa por el eje de las dos superficies.

Si en virtud, pues, de este teorema, quisiéramos aprovecharlo aplicándolo en la teoría de las sombras, y teniendo en cuenta que en la fig. 88 el plano de los dos ejes es el vertical t^hV, escogeremos en seguida un plano vertical de proyección L′T′ (fig. 88′) paralelo al primero de dichos ejes; en él se proyectaría luego el cono GH*hg*, así como el rayo luminoso R′.

En dicho plano los puntos superiores M*m*, unidos por la cuerda perpendicular al nuevo plano de proyección, vendrán á proyectarse confundidos en uno solo J; por otra parte el punto extremo vértice de la curva será el producido en φ por la intersección del rayo que pasa por H, y la generatriz opuesta G*g*; únense, pues, estos dos puntos, y la recta JR′ será la traza vertical del plano de la curva, ahora si así nos conviniera pasaríamos por cambio de plano, del vertical L′T′ al LT.

101. Sombra de la Gota* cónica.—En la fig. 90 se dibujan los dos troncos de cono △ y Σ, internados en parte en el plano de proyección vertical y viniendo coronados por el prisma ó paralelepípedo B″A″A′B′, comprendido en el plano horizontal, entre la arista AB y la LT; siendo ahora Rᵛ - Rʰ la dirección del rayo de luz, se quiere averiguar la sombra propia de estos conos así como su arrojada, y á la vez la que arroja sobre ellos el expresado paralelepípedo.

En primer lugar, determínese la sombra propia de estos conos tal como si estuviesen aislados é independientes; de tener

---

* **Gota** del latín **guttæ**. Generalmente es un cuerpo de forma cónica de dimensiones relativamente muy reducidas y se empleaba en la Arquitectura Griega y Romana, como á elemento de ornamentación, colocando seis de estas gotas, como si estuvieran suspendidas ó colgantes, debajo de los triglifos en el listelo, en que aquéllos descansan; también solíase ornamentar con ellas el plano inferior del cuerpo de cornisa, disponiéndolas entonces, por contar con mayor espacio, en tres líneas de fondo cada agrupación de ellas, coincidiendo su sitio encima al destinado para las *metopas*. Sin embargo, semejante ornamentación era no más reservada al cornisamento *dórico*.

Casos hay que algunas de estas *gotas* se presentan piramidales, sobre todo las que corresponden al arquitrabe; otros aún más raros las gotas aparecen cilíndricas.

Hay muchas dudas sobre lo que motivara semejante detalle ornamental, así como también el origen de su nombre, aunque no dejan de existir apreciaciones de algunos autores, cuales creen que son fiel representación de las gotas de agua, que caen como lágrimas cuando la lluvia, azotando los paramentos de los muros, deposita en ellos el líquido, y éste se desliza en seguida, acumulándose brevemente para formar la gota, por cuya semejanza se le da el nombre.

Otros, como León Battista Alberti, creen que representan clavos, cuya especie aún es más dudosa porque ¿qué es lo que figuran estos clavos en dichos puntos y tal cual están colocados; sobre todo á que ponerlos por agrupaciones y en tan gran cantidad debajo la cornisa? Véanse los del teatro de Marcelo en Roma, donde se encuentran en agrupaciones de tres á seis líneas de fondo. En el pronaos de Ranno, en la torre de Cirresto y en la tumba de Cirena se descubre también este ornamento en el architrave y con la particularidad de no existir allí triglifos.

el vértice V accesible. podemos valernos de él, (n.° 90) haciendo pasar por dicho punto un rayo luminoso, y encontrando su traza t^v - t^h sobre el plano de la base del cono, la tangente t^h G', dirigida desde dicho punto á la base circular, nos indicará en el punto de tangencia G', que por él, pasa la generatriz G'V'-GV, que será ya la línea divisoria de luz y sombra, en el cono △' no habrá porque trazar la segunda tangente desde t^h al círculo de base, toda vez que la segunda generatriz de contacto que encontraríamos, caería de lleno en la sombra, que el prisma superior, arroja sobre el cono.

Para con respecto al cono Σ, claro es que podríamos repetir la operación, más atendiendo que dicho cono está con igual situación que el primero, para con respecto al rayo luminoso, bastará de momento copiar simplemente la sombra en gv, esto es, tomando la distancia 2-G y colocándola en 8 g, uniendo luego g con v.

Las bases circulares 1-2, 7-8 salta á la vista que están opuestas á la luz y por lo tanto originarán sombra arrojada sobre el muro; como quiera que, se trata de circunferencias horizontales, podemos poner en práctica el procedimiento del párrafo n.° 41, haciendo depender dichas curvas de los paralelógramos 1-2-4-3, 7 8 6-5, inscribiendo luego en ellos las elipses HJI, KML.

El propio rayo luminoso que pasa por el vértice V tiene por traza vertical el punto θ, de modo que dirigiendo desde dicho punto una tangente á la elipse HJI, la recta que así resulte θz, será la sombra arrojada de la generatriz GV. Para el cono Σ trácese sencillamente una tangente á la elipse KML, que sea paralela á GV; así obtendremos la z'P, que será la sombra arrojada de la $g\pi$.

Pasemos ahora á la sombra que arroja el paralelepípedo superior, sobre los conos inferiores. Aparece de momento la arista proyectada en A', perpendicular al plano de proyección vertical, por la cual rasa el rayo luminoso, que engendra un plano de sombra, perpendicular también al plano vertical, dicho plano corta al cono, y lo hace de tal modo, que toda la línea de corte viénese á confundir, en este caso especial, con la misma traza vertical del plano de sombra A'C', extendiéndose no más en el justo límite FC', pues el resto A'F es la arrojada sobre el mismo plano de proyección vertical.

La curva del espacio, que aquí será una elipse, se proyec-

tará fácilmente en el plano horizontal, disponiendo en proyecciones horizontal y vertical un determinado número de generatrices del cono, y proyectando en ellas, los respectivos puntos E',F',C ya encontrados en E,F,C'.

Mas el punto C C' siendo el que corresponde á la sombra arrojada del originario A-A', esto es, el último de la recta directriz A'-AL, se infiere que el rayo luminoso se apoyará luego en la arista de frente A'B', y así obtendremos otro plano de sombra, que cortará al cono △', según un pequeño arco elíptico C'D'-CD, cuyo último punto D'-D lo obtendremos con suma facilidad observando que A'B' y la generatriz VG tienen, respectivamente, por sombras arrojadas sobre el plano de proyección vertical, las QR y $z\theta$, y éstas cortándose en el punto S indica que si por contraproyección trazamos el rayo de sombra que parta de dicho punto S, ésta se apoyará á la vez en D''', en la arista A'B' y en D' de la generatriz VG, por lo tanto D''' cae arrojado en D' y como á consecuencia en S; atención hecha á la poca extensión que abarca la curva C'D', con estos dos puntos basta para el trazado de esta curva, cual puede dibujarse á mano, pues se advierte de momento por la situación especial del plano de sombra sector, hacia que lado cae la concavidad de la línea.

Inmediatamente el rayo luminoso emprende dos caminos distintos en el rase, el uno siguiendo á lo largo de la generatriz, esto es, de D' hacia G; y el otro continuando apoyándose en la arista horizontal, desde el punto D''' hacia B'. Veamos el primero, y al efecto, observemos que con la sombra arrojada el punto N está producido por la intersección de las $z\theta$ y de la curva KML, sombras arrojadas respectivas de la generatriz VG y de la base circular del cono Σ', por lo tanto, en dicho punto N parte un rayo de sombra que se apoya en N''', sobre la generatriz VG, y en α en la base circular del cono Σ', lo cual expresa que la sombra que arroja el trecho de generatriz N'''D' lo hace sobre la superficie cónica Σ', siendo α el último punto de la curva, mientras que el primero, será el S á partir del cual aparecerá la otra curva $\varepsilon'''\delta'''\gamma''\pi'$ elíptica, sombra arrojada sobre el mismo cono, Σ' de la arista que media desde D''' á P', á partir del cual, la sombra de dicha arista horizontal, cae de lleno sobre el plano vertical en PR.

Encontremos, pues, la curva $S\varepsilon'''\delta'''\gamma''\pi'$ á este fin, escojamos un punto cualquiera, tal como γ', situado entre D''' y P' en la arista A'B', y hagamos pasar por él un rayo de sombra para

encontrar en seguida su punto de encuentro γ″ con el cono Σ′. Observemos para obtenerlo, que si conducimos un plano por el rayo de sombra que pasa por γ′ y por el otro rayo de sombra que pasa por el vértice *v* del cono Σ′, tendremos así que este plano cuya traza horizontal es $6\tau^h$ (tomando como á línea de tierra auxiliar la recta que pasa por la traza vertical del plano de las bases inferiores de los conos △′, Σ′,) nos cortará al cono Σ′, según la generatriz *av′*, y así la intersección de ésta con el rayo de sombra que parte de γ′, nos dará el punto de sombra γ″, que proyectaremos horizontalmente en γ‴. Escogiendo, pues, nuevos puntos en la arista A′B′, iríamos repitiendo iguales operaciones para el descubrimiento de otros puntos de la sombra arrojada.

Aplicando el procedimiento para el punto que esté situado en el plano meridiano del cono, el *v′*δ′, que á la vez es paralelo al rayo de luz, se obtendrá aún con mayor brevedad el punto δ‴ en cuestión, pues, que vendrá dado directamente por la intersección de la generatriz *v′*ψ′-*v*ψ con el rayo de sombra que parte de δ′-δ″, esto es, del punto intersección de la arista A′B′, con el referido plano meridiano.

Aplicando el procedimiento á la generatriz *v′x* se hallará el punto ε-ε‴ en que la curva pasa de vista á ocultar en el plano vertical; más las operaciones se han de llevar inversamente, pues aquí partimos de la generatriz, en que se encuentra el punto de sombra, y tratamos de encontrar éste por el originario que también se ha de determinar. Con este motivo, y tomando también como plano horizontal auxiliar el de la base inferior de los conos, hagamos pasar un plano por la generatriz dada *v′x* y el rayo de sombra que pasa por el vértice, este plano tiene por traza horizontal la recta τ^h *x*, la cual encontrando á la AB en el punto *y-y′*, si por él trazamos la *y*ε′-*y′*ε″ paralela á la generatriz *xv′*, ella será con evidencia el corte del plano vertical AB, con el trazado anteriormente por la generatriz *v′x*, paralelo al rayo luminoso, y, por lo tanto, el encuentro de esta recta *y′*ε″ con la recta A′B′ nos dará el punto ε″, cual será ya el originario, y que corresponde al rayo luminoso que irá á herir al cono en el punto ε‴, situado sobre la generatriz del meridiano principal. Dicho método podremos emplearlo, desde luego, al proponernos querer determinar un punto de la curva de sombra que estuviera en una generatriz determinada de la superficie.

Así que se alcance en las operaciones al rayo que pasa por

el punto D″, cual se apoya también en el punto D′, según antes hemos visto, entonces habremos encontrado en S al primer punto de la curva y en donde empezará la otra Sx que produce la generatriz originaria en el trecho D′N″, un punto cualquiera intermedio de esta línea de sombra se encontrará, análogamente, según lo referido en las operaciones anteriores. Es escusado ahora detallar las operaciones para referir al plano de proyección horizontal, todo lo resuelto en el plano vertical.

102. Sombra en la combinación de dos conos.—(Figura 94, lám. 11) Con motivo de generalizar ya sombras de una superficie cónica, trataremos de combinar dos conos á la vez, haciendo de modo que se corten, y aquí en este caso especial lo hacen de tal modo, que existe entre ellos *penetración recíproca*; las curvas de penetración se cortan ambas, apareciendo dos puntos múltiplos, y ellas son dos curvas planas, aquí dos elipses (puesto que las bases son líneas de 2.° grado; aquí dos círculos). No nos detendremos á detallar las operaciones pertinentes para obtener las curvas de intersección, dichas construcciones se supone son ya del dominio del lector; únicamente sí recordaremos, que en este caso especial los planos secantes límites y que pasan por la recta que une los vértices V y *v*, son tangentes á la vez á las dos superficies, y por lo tanto los planos auxiliares secantes que nos darán puntos de la intersección, estarán todos comprendidos en sus trazas horizontales entre las rectas t^h - 1, t^h - 2.

Sea ahora R′ R^h el rayo luminoso y encontremos las sombras combinadas de ambas superficies. En primer lugar la sombra propia del cono *v* (n.° 90) se compondrá de las dos generatrices *av-a′v′*, *bv-b′v′*, y en cuanto al cono de vértice V, éste estará todo iluminado en razón á que el rayo luminoso, que pasa por su vértice, corta al plano de la base, interiormente á ésta (n.° 93).

Veamos ahora la sombra arrojada del cono *v*; la sombra de su vértice cae en v^s sobre el plano horizontal, luego las dos tangentes, que de este punto se dirijan al círculo de centro *o*, serán las v^s - *a*, v^s - *b*, sombras arrojadas sobre el plano horizontal de las líneas de separación de luz y sombra *av*, *bv*; más estas líneas arrojadas quedan interceptadas al encontrar la base del cono V, en los puntos *j*, *k*, indicando ello, que á partir de dichos puntos, las sombras son recibidas

por la superficie de dicho cono V; veamos, pues, el medio de trazarlas por medio de puntos. Los *j* y *k* ya son puntos de la curva, son los primeros, situados en el plano horizontal, y por lo tanto sus proyecciones verticales en *j'*,*k'*, en la L de T; también lo son desde luego los *c* y *d*, esto es, aquellos en donde concluyen, perteneciendo á la intersección de las dos generatrices de sombra del cono *v*, con la superficie del V; busquemos ahora un punto intermedio de cada una de ellas, y sean aquellos dos que estén situados en un plano horizontal cualquiera, comprendido entre aquellos primeros y últimos; el plano L'T' por ejemplo, este plano cortará al cono V, según un círculo de centro ω-ω' y cuyo radio el que resulta de la sección; al paso que á la generatriz *bv* del cono *v* le cortará según el punto *q*-*q'*, y, por lo tanto, inferimos que cortará al plano tangente, cuya generatriz de contacto es la propia *bv*-*b'v'* según la recta *qp*, paralela á la traza primitiva bv^s de dicho plano tangente; infiérese de aquí que el punto *p*, intersección de la *qp* con el círculo de centro ω, pertenece ya de hecho á la curva (como pertenecían también á ella el *k* y el *j*) y así proyectando *p* en *p'* y trazando por él un rayo de sombra, éste irá á cortar en *p"* á la generatriz de sombra, y, por lo tanto, diremos que *p"* es el originario de *p'*, así buscando otros puntos se obtendrá la curva *dp'k'*, *d'pk* como la sombra arrojada de la generatriz del cono correspondiente al trecho *dv'*.

Análogas operaciones darán en la *j*πδ la sombra arrojada de la otra generatriz en el trecho que media entre δ y *v*. El punto intermedio π se ha encontrado echando mano del mismo plano secante auxiliar L'T', el cual cortando al cono V, según el círculo de centro ω', y al plano tangente del cono según la *z*π, paralela á la traza primitiva av^s, estas dos secciones, curva la una y recta la otra, se cortarán en π-π' punto ya de la curva; de él ahora puede deducirse el que le sea originario cual es el π".

Mas estas dos generatrices *bv*, *av* de las líneas divisorias vuelven á arrojar sombra hacia la parte inferior del cono V, pues atención hecha, al modo de cortarse dichas superficies, hace que una vez internada, por ejemplo, en *d* la generatriz *v'b'*, en el cono V', vuelva á salir otra vez por el punto *c* cogiendo, ahora en el corte, el plano de sombra la parte inferior del cono V'.

Infiérese, por lo tanto, que el procedimiento para encontrar la curva de sombra *cm'g'* *c'mg* en nada ha de variar al empleado últimamente, para encontrar las superiores, así el punto *g*, en donde queda interrumpida la traza horizontal bv^s, al cortar la parte anterior de la base circular del cono V, es ya un punto de la sombra, esto es, donde ella empieza, cual punto se proyecta verticalmente en la L de T, en *g'*.

El punto *c*-*c'*, en donde la generatriz de sombra hace la salida del cono V, es también por sí mismo un punto de la curva, esto es el último, por último un punto intermedio cualquiera, el *m*-*m'* por ejemplo, podía obtenerse con el mismo plano auxiliar L'T', de que se ha echado mano anteriormente. Así este plano cortará al cono V, según una circunferencia de centro ω-ω', y al plano tangente de sombra á lo largo de la *v'b'*, según la *qp*, paralela á la traza *bv'*, ahora la mencionada circunferencia y la recta *qp* se combinarán cortándose, tomando ahora en consideración el primer punto de corte cual es el *m*-*m'*, éste será el de la curva en cuestión. Idénticas operaciones nos darán la curva que corresponde hacia la parte opuesta, y que se refiere á la sombra que arroja el trecho de generatriz que media desde *a'* hasta φ, más ésta que empezará en el punto ψ y concluirá en el φ, aparecerá oculta en los dos planos de proyección.

Obsérvese aquí que de las cuatro ramas de curvas arrojadas forman, sin embargo, cada dos de ellas una sola curva; así las *dp'k'* y *cm'g'* al parecer distintas, forman ó pertenecen sin embargo á una sola línea, esto es aquí á una rama de hipérbola producida por la intersección del cono V con el plano tangente de sombra á lo largo de la generatriz *vb*. Lo propio sucederá con el otro plano tangente de sombra que se refiere á la generatriz *av*.

Por último, el conjunto de la sombra termina mediante las rectas *bg*, *a*ψ' últimos trechos que quedaban en las trazas horizontales, ó si se quiere sombras arrojadas, sobre el plano horizontal de las generatrices de sombra *av*, *bv*.

103. Combinación de un cilindro con un cono. — Trátase también en este ejemplo de estudiar las sombras combinadas que producen al cortarse un cilindro y un cono, y con él completar mejor el criterio que pueda formarse, del modo y forma como aparecen las sombras arrojadas, según sean las superficies que las producen. Sea para ello la fig. 95, en donde el cilindro es oblícuo, de base circular, descansando

en el plano horizontal y de centro ω-ω′, teniendo su dirección paralela al plano de proyección vertical; el cono es también de base circular, situada del propio modo en nuestro plano horizontal, tiene el centro en O-O′, y su dicha base circular se da con la condición de ser tangente en V á la base circular del cilindro, y mediante la condición que dicho punto de tangencia V sea proyección horizontal del vértice del cono, vértice que se supone sitúa en V′, esto es, sobre la generatriz O′H del cilindro; producida por la sección que en el produce el plano vertical O*e*, considerada de las dos que produce el corte, la superior.

En virtud de lo especialísimo de los datos, ya adrede combinados, así para lograr si cabe más dificultades, apuntemos ligeramente las operaciones para encontrar la curva de intersección; á este efecto nos valdremos de una serie de planos secantes auxiliares que pasen por la recta V′O′, VO, lo cual, paralela á la dirección del cilindro, pasa al mismo tiempo por el vértice del cono; las trazas de todos estos planos pasarán así por el punto O, y semejantes planos no podrán cortar sino según rectas generatrices á cilindro y cono.

Sea, pues, escogido el plano que tiene por traza la AOA_1, éste cortará al cono según las dos generatrices AV-A′V′, A_1V-$A_1'V'$; y al cilindro según las dos generatrices B*b*-B′*b*′, OV-O′V′; éstas al cortarse nos proporcionarán los tres puntos V-V′, *c*-*c*′, *b b*′; así podríamos ir siguiendo determinando los demás, pero hay otros especiales que conviene fijemos nuestra atención, con preferencia, si cabe que los ordinarios, son los puntos situados en los contornos aparenta en que la curva pasará de vista á oculta, siendo al mismo tiempo tangentes sus proyecciones, á los mencionados contornos aparentes.

Así los del contorno aparente, para con respecto al plano horizontal, podremos obtenerlos recurriendo al plano secante D_1OD_2, el cual corta al cono según las generatrices VD_1; cuales cortarán á su vez á la generatriz del contorno aparente del cilindro según los puntos *d* y δ que proyectaremos verticalmente en *d*″,δ″. Adviértase ahora que la curva que vamos á obtener es simétrica, el plano de simetría de las superficies, es aquí el plano vertical principal EV*e*, común á ambas; así es que aprovechándonos de esta propiedad, una vez encontrados en cada operación la serie de puntos de que ella sea susceptible, como los *b* y *c*, podremos deducir sus si-

métricos en *b*″, *c*″; lo propio que los encontrados últimamente, en *d* y δ trasladados en *d*′ y δ′.

Siendo la línea de intersección algo movida, sobre todo en su proyección horizontal, en donde forma una suerte de lazo, conviene rectificarla encontrando sus tangentes, así por ejemplo, la del punto *b*, la obtendremos combinando los planos tangentes á ambas superficies; el que corresponden al cono, tiene por traza horizontal la recta CA, tangente á la base de dicha superficie, la que concierne al cilindro es la BC, y así ambas cortándose en C, dan en C*b* la tangente pedida.

Haciendo uso del plano secante auxiliar EO*e*, se obtendrán los puntos V-V′, GG′, *ee*′, situados sobre el contorno aparente en el plano vertical.

Obsérvese que el punto V-V′, ya de por sí punto doble de la curva de intersección: las tangentes en este punto son las generatrices del cono Vα-V′O′, Vβ-V′O′.

Esta curva de intersección, si bien es alabeada en el espacio, sin embargo reune la propiedad de proyectarse verticalmente, según una curva plana aquí de 2.° grado *.

Obtenida así la curva *e*′*d*″*b*′V′δ″G′, así como su respectiva proyección horizontal, pasemos ahora á la determinación de la sombra combinada de dichas superficies, pues ya sabemos en donde empiezan una y otra, bajo el punto de vista del contacto de los rayos luminosos, cuya dirección es $R^v R^h$.

Para con respecto al cono (n.° 90), la sombra de su vértice cae en el plano horizontal en el punto F; así es que tra-

* Las dos superficies que hemos empleado son de 2.° grado, y además tienen un plano principal común, cual es el vertical EO*e*, y cuando tal sucede hay lugar á enunciar el siguiente teorema: *Cuando dos superficies de 2.° grado tienen un plano principal*, y sea cual fuera la posición *de sus ejes principales; la línea que resulte de la intersección estará siempre proyectada en este plano principal en una curva de segundo grado.*

En efecto, refiramos las dos superficies á tres planos coordenados, y tales en que el de las XZ coincida con el plano principal aludido; ahora bien, admitiendo cada superficie este plano de simetría, sus respectivas ecuaciones no podrán contener ninguna potencia impar de la variable Y, y así serán de la forma

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + B'xz + Cx + C''z + E = O \quad (1)$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + b'xz + cx + c''z + e = o \quad (2)$$

Ahora, si en este estado se multiplica la (1) por a' y la (2) por A', y luego se restan mutuamente, tendremos así una nueva ecuación en donde quedará eliminada la y, cuya ecuación será de 2.° grado, representando la proyección de la curva sobre el plano horizontal XZ.

zando por él las tangentes á la base F-*1*, F-*2*, los puntos de tangencia *1*, *2*, nos facilitarán las líneas de *1*V-*1*'V'; *2*V-*2*'V' de sombra propia del cono; aunque la primera no alcanzará más que hasta el punto *g*, en donde la generatriz se introduce en el cilindro.

La sombra arrojada cae entera en el plano horizontal, según las mismas tangentes, antes referida en F*1*-F*2*.

Para la sombra del cilindro (n.° 66), tracemos por el punto V-V' dos rectas, una paralela al cilindro, otra al rayo R, y estas dos formarán un plano cuya traza será la FO, cual será paralela á las trazas MK, DJ de los planos tangente al cilindro y paralelos al rayo luminoso; con ellos habremos logrado las líneas MP-M'P', DN de sombra propia, mientras que las citadas tangentes MK, DJ serán las correspondientes que arrojan las primeras sobre el plano horizontal.

Ya en posesión de las sombras de estas superficies, cual si fueran independientes, veamos que modificación sufrirán al considerar tal cual son, para con respecto á las superficies combinadas, al encontrarse: Observemos que la generatriz del cono que parte del punto *1*, sombra propia del mismo, penetra en *g* en el cilindro, y por lo tanto esto por sí mismo indica que su sombra arrojada empezará cayendo sobre el cilindro á partir del punto *g*; además en el punto Q del plano horizontal se encuentran las sombras del contorno del cono y cilindro, internándose la del primero en la del segundo para hacerse allí parásita, todo lo cual nos indica que si por el punto Q-Q' se traza un rayo luminoso, éste será tangente al cilindro y al cono en los puntos Q'', *q*, siendo respectivamente originarios del primero Q, pudiendo con ello asegurar que todo el trecho de generatriz *1*'*q* cae arrojado en *1*Q en el plano horizontal, mientras que el pequeño trecho *qg* vendrá arrojado sobre el cilindro, según una curva que mediará entre los puntos *g* y Q''; en este nuestro caso aparece esta curva con muy ligera curvatura, y puede sin dificultad trazarse de primera intención á mano sin puntos intermedios; más si precisión existiera de obtener puntos intermedios, podríamos proponernos de encontrar, cual es el punto de la sombra que esté situado sobre una generatriz del cilindro comprendida entre los puntos *g* y Q''; y para ello encontraríamos la sombra de que sería susceptible arrojar esta generatriz en el plano horizontal, buscando luego la intersección de esta línea de sombra con la correspondiente á la *1*F que corresponde á la

del cono. Hallado que sea el punto de intersección *x*, hágase pasar por él un rayo luminoso, y éste cortará á la generatriz escogida en un cierto punto que llamaremos *x*', será el punto que buscábamos. Si bien se considera semejante procedimiento es exactamente igual que el empleado para el último de la curva, el Q''.

Pasemos ahora á la sombra que producirá la generatriz V*2* del cono, para ello fijaremos el punto θ', en donde se cortan las sombras arrojadas de las generatrices de cilindro y cono; en dicho punto la sombra arrojada *2*θ' del cono se interna en la sombra general del cilindro, y con ello expresa que aquélla se convierte en parásita en el plano horizontal, y, por lo tanto, á partir del punto originario θ'' la sombra de la generatriz del cono en el trecho θ''V, cae arrojada sobre el cilindro. Tres puntos serán bastantes para su trazado; los dos extremos quedan en seguida determinados, el uno en θ, producido por la intersección del rayo luminoso que parte de θ', con la generatriz de sombra del cilindro; el otro V, de donde parte la curva, es evidentemente sombra de sí mismo.

Ahora otro intermedio cualquiera podrá encontrarse, escogiendo un punto cualquiera *l*' entre θ'' y V, concibiendo por él, un rayo luminoso y encontrando su intersección *l*'' con el cilindro, y por ello hágase pasar por *l*' un plano paralelo á la dirección del cilindro, y á la vez al rayo de luz, semejante plano cuya traza horizontal es *mk*, no podrá cortar al cilindro sino según una generatriz *m''l''*, la cual cortada en *l''* por el rayo luminoso de *l*', dará finalmente el punto intermedio deseado.

Por último, y al objeto de complicar más la cuestión de sombra, concibamos que el cono se prolonga hacia la parte superior, teniendo así en cuenta la otra hoja de dicho cono (esta prolongación la consideramos no más en el plano vertical, prescindiendo de la misma en el plano horizontal, en donde dicha superficie cónica obra no más en su hoja inferior, terminándola por lo tanto en el vértice V, todo con el objeto de que quede visible y mejor representada la línea de intersección de ambas superficies); entonces la generatriz de sombra V*2*-V'*2* aparecerá hácia la parte anterior en V'W, arrojando otra vez sombra sobre él cono, y vendrá expresada en la curva en V'γR; de ella el punto V' es sombra de sí mismo, el otro punto extremo R, se obtendrá recurriendo á un plano auxiliar L'T', encontrando sobre él, las sombras

arrojadas $\varphi\varphi'$, $\psi\psi'$; la primera de la línea de sombra del cono (que será paralela á la $2\theta'$), y la segunda, sombra correspondiente á la del cilindro (que será paralela á la MK), ambas se cortan en R'', y en él trazando un rayo de sombra R'R, él por contraproyección oblícua, nos dará el R sobre la generatriz de sombra M'R.

Ahora, queriendo determinar un punto intermedio entre ellos, tracemos en este intermedio un plano auxiliar horizontal XX', el cual cortará al cilindro y cono según dos circunferencias, cuales tomadas como á base de dos cilindros paralelos al rayo luminoso, éstos deberán ser cortados por el plano horizontal de operaciones auxiliar L'T', en dos circunferencias iguales á aquéllas, cuyos centros respectivos serán el de la primera en $\alpha\alpha''$ y la segunda en $\beta\beta''$; es esta última designada por *3-3*, trácese ahora una tangente $\mu\gamma$, paralela á la traza $2\theta'$ del plano tangente al cono (esta recta representará la proyección oblícua sobre el plano L'T' de la intersección del plano secante XX' con el plano de sombra tangente al cono, á lo largo de la generatriz *2'*V', prolongada en la hoja superior), y dicha recta cortando en γ á la circunferencia *4-4*, tendremos que dicho punto $\gamma\gamma''$, contraproyectándolo oblicuamente en dirección paralela al rayo luminoso en el plano XX' nos dará definitivamente en γ' el punto que buscamos, el cual tendrá por originario el γ'''.

SUPERFICIES DESARROLLABLES EN GENERAL

104. (*a*) La desarrollable dada por una *curva directriz y un cono director* (n.° 63). Fig. 102, Lám. 12, la curva directriz es la A, con sus generatrices ya construídas en 1, 2, 3, 4, 5... etc., y el cono es el B, y se emplea el rayo luminoso R; es evidente ahora, que correspondiendo cada generatriz de la superficie; otra que le es paralela en el cono, la cuestión quedará reducida á encontrar las generatrices, división de luz y sombra en este último, para que de ellas podamos deducir sus paralelas en la desarrollable. A este efecto, encuéntrase, pues, en el cono por lo expuesto en el n.° 90, su línea de sombra propia BC, valiéndonos de la traza D del rayo luminoso BD, así como de la tangente DC, secciónese ahora á la superficie desarrollable por un plano P, que será el horizontal paralelo á la base del cono B, y así produciremos la curva E á que podremos con facilidad conducir una tangente GF que sea paralela á la CD, en la que podremos precisar el punto de tangencia G por el cual se conducirá la G3, paralela á la BC, cumpliendo aquella recta las condiciones requeridas á la generatriz de la línea divisoria de luz y sombra.

Son múltiples, y en gran número variables, las superficies desarrollables que admiten cono director, y que trascienden en sus aplicaciones en el terreno de la práctica, prestando grandes servicios, no ya tan sólo bajo el punto de vista de arte y ciencia, sino que también en las cuestiones industriales, en los problemas de construcción, etc., ete. Uno de tantos ejemplos, como de su clase pueden mentarse, es cuando se trata de la formación de estos grandes terraplenes, de trazo curvilíneo, con superficies laterales en talud y que unen para establecer caminos ó grandes vías, calzadas, etc., etc., así como también los muros de fortificación de que antes se valía la ingeniería militar; veamos, pues, un caso de esta naturaleza en el siguiente párrafo.

105. (*b*) **Superficie de igual pendiente.**—Llámase así una superficie desarrollable engendrada por el movimiento contínuo de un plano, que permaneciendo siempre tangente á una curva determinada, forma en todas las posiciones el mismo ángulo con el plano horizontal; entonces la serie de rectas producidas por las intersecciones sucesivas del plano, en sus distintas posiciones, serán las generatrices de semejante superficie. Sea ahora (lám. 12, fig. 96) la curva directriz la situada en el plano inclinado A'B', perpendicular al vertical de proyección, y cuya proyección horizontal viene representada en ACBD, en cuanto al ángulo que ha de formar constantemente con el plano horizontal, el plano móvil, estará representado en la abertura α; con estos datos propongámonos determinar las posiciones del plano móvil, así como las generatrices que se vayan formando. Fijémonos, por ejemplo, con el que pasa por el punto E-E'; en dicho punto el plano tangente á la curva contendrá la tangente E'I-EI' á la misma, además teniendo que formar un ángulo α, con el plano horizontal, claro es que siempre será tangente á un cierto cono recto, cuyo vértice sea el punto E-E', y cuyas generatrices estén inclinadas del ángulo α con el plano de la base; si, pues, construímos dicho cono y luego le trazamos un plano tangente

que contenga la tangente anterior E'I-EI', este plano cumplirá con las condiciones requeridas.

A este efecto, condúzcase por E-E' la recta E*f'*, que forma con el plano horizontal el ángulo E'*fe*, igual al α, imagínese luego que gira dicha E'*f* alrededor del eje E'*e*, así engendrará el cono recto cuya base circular es la línea GFH de centro E. En este estado, el plano quedará determinado, pues por contener la tangente EI'-E'I habrá de pasar la traza del plano por la I', de la recta, y por ser tangente al cono su traza horizontal será tangente á la traza horizontal de dicho cono, luego ella será la recta FI', mientras que la generatriz de contacto EF-E'F' será la generatriz de la superficie desarrollable.

Adviértese, ahora, que desde el punto de traza I' podría trazarse otra tangente al círculo HFG, por lo cual obtendríamos una segunda solución, mas de ella prescindiremos toda vez que aquí consideramos tan sólo la parte exterior de la superficie.

Análogas operaciones, repetidas para todos los otros puntos, nos darían finalmente las generatrices que constituyen el conjunto de nuestra superficie, cuya traza horizontal viene expresada por la curva PFSJN, lugar geométrico de las trazas horizontales de las diversas tangentes á la curva directriz. Obsérvase de paso, para apreciar las propiedades de esta superficie, que todas sus generatrices, en proyección horizontal, vienen á ser las distintas normales á la curva exterior de traza conducidas por los distintos puntos de la línea elíptica, directriz é interior.

Esta especial superficie se emplea en las aplicaciones para la construcción de taludes en terraplenes, desmontes, diques, etcétera, cuyos contornos sean formados por líneas curvas.

Al construir, por ejemplo, un terraplén de esta naturaleza y lanzar los trabajadores, las tierras en los taludes, éstas se mueven parcialmente de tal modo á dar lugar una serie de conos de revolución, cuya envolvente de todos ellos es precisamente nuestra superficie. Admitido que sea el caso de una alineación rectilínea, entonces la superficie forma un plano, pero en todo otro caso de dirección curvilínea, produciremos una superficie de igual pendiente. *

* Esta es la razón porque défínese también semejante superficie diciendo ser una superficie envolvente de las distintas posiciones que ocupa un cono de revolución, que moviéndose, permanece constante en la figura ó ángulo al vértice, así como en la verticalidad de su eje.

Para ello no hay más que concebir en la fig. 96' la curva A-A', como á directriz del camino que ha de seguir el cono de revolución *ade*, cuyo vértice está situado en el punto *a* de la curva; supongamos ahora que el cono se traslada, en el movimiento ante dicho, en una posición muy próxima, en el *bfg*, habiendo pasado el vértice de *a* á *b*, si ahora concebimos la intersección de estos dos conos, tomando como á plano vertical de referencia el que tiene por traza horizontal, confundida con la secante *a'b'*, entonces dicha intersección se proyectará en dicho plano vertical, según la recta *mn*, toda vez que *a'b'* es un plano principal (n.° 102, nota), además los dos conos son aquí homotéticos, también tendrán dos planos tangentes comunes, cuyas trazas horizontales pasarán por la traza *t* de la recta que pasa por los vértices *a b*, por todo lo cual la curva es plana, siendo aquí una hipérbola. Si aproximamos ahora más y más estas dos superficies, hasta llegar á una posición infinitamente próxima, se verá que el punto *l* de intersección de las bases tenderá á confundirse en el límite con el *x*, de tangencia con el plano tangente al cono de vértice *a*, mientras que el vértice *b* del segundo, tendería también á confundirse con el vértice *a* del primero; en resumen, que en su límite, la hipérbola anterior tenderá á reunirse con las dos generatrices de contacto *a'x*, *a'z* cuales se habrán también reunido, las que ya juntas determinarán como una característica de la superficie.

Conocida la superficie, pasemos ya á determinar su sombra; al efecto, fórmese V'*ac*, esto es el cono director, cuyo ángulo α á la base, sea el mismo que la abertura del de igual pendiente de la desarrollable, y dado que sea R^v R^h, el rayo de luz, encuéntrense en este cono (n.° 90) las generatrices V*o'*, V*d'* divisionarias de luz y sombra. Redúcese ahora la cuestión á señalar en la superficie de igual pendiente las generatrices que sean respectivamente paralelas á las V*o'*, V*d*. A este objeto, ensáyese una tangente SU á la curva de base que sea paralela á la traza *d'l'* del plano tangente al cono, y si por el punto de tangencia S resulta que la generatriz RS es paralela á la V*d'*, tanto en proyección vertical y horizontal, entonces ella será una línea divisoria de luz y sombra, como así acontece para dicha generatriz; en caso contrario, como el que se refiere á la otra tangente que podríamos trazar hacia la parte opuesta, dejará de ser generatriz de sombra.

Aplicando dicha operación para con respecto al plano tangente, paralelo al *o'l'*, obtendremos otra generatriz línea divisoria en la NT-N'T'.

En cuanto á la sombra arrojada se compondrá de las dos rectas S*r*, N*t*, antes trazadas, y luego la curva *tβr*, cuya originaria es la elipse directriz del dato, cuya sombra se obtiene fácilmente ó bien trazando una serie de rayos luminosos, por los puntos de la curva TBR, y buscando sus trazas horizon-

tales, ó aún mejor reproduciendo, el segmento elíptico, encerrado por la cuerda y su arco en TBR, trasladándolo entero *tβr*, haciendo la concidencia de cuerda con cuerda.

106. (*c*) **Superficie desarrollable dada por su línea de retroceso.**—(Fig. 97). La curva directriz es aquí la hélice á base circular *abcd-a'b'c'd'*, el rayo luminoso el R^v - R^h . Considérese en primer la traza horizontal *a*-1-2-3-4 ..... etc. como confundida con la traza horizontal de un cilindro paralelo á los rayos luminosos, concíbase luego otro cilindro con idéntica dirección que el primero, pero cuya directriz sea nuestra arista de retroceso, entonces esta última superficie vendrá á ser cortada, también, por nuestro plano horizontal, por la otra curva *atsrqpmz*; ya en posesión de estas dos curvas de traza, será sumamente fácil disponer una tangente *bm*, que les sea común, y entonces se comprende inmediatamente, como si se traza por el punto de tangencia *b* una generatriz de la desarrollable (cual generatriz, para serlo, sabemos que ha de cumplir el requisito de ser tangente á la arista de retroceso) ésta, que resultará ser la *by*, solucionará el problema, pues será la línea de división de luz y sombra, pues como es obvio, por las construcciones practicadas, está contenida en un plano tangente á la superficie, y que á la vez es paralelo al rayo luminoso, luego la comprobación del resultado será cuando al dirigir por el punto *b* la tangente hacia la arista de retroceso, el punto de tangencia *y* que se obtenga coincida con el punto de encuentro de dicha curva del retroceso con el rayo de sombra que parta del punto de traza *m*; así, pues, *by* es línea de sombra propia, la *bm* es su arrojada, la pequeña curva *mn* es arrojada por el pequeño trecho de hélice *e'y'*, y finalmente la recta *z*-8 es la arrojada por la generatriz extrema *e'*-8'. Obsérvese, en este nuestro caso particular, que existirá también sombra en el interior de la superficie, cual constará de dos partes, la primera de la curva *atsrx* arrojada de la hélice del retroceso, sobre el plano horizontal, más al llegar al punto *x*, en corta á la traza de la superficie, entonces la sombra de dicha hélice la recibirá la misma superficie en el intervalo de *x* á *y*.

107.—El mismo caso anterior, pero la luz, proviene ahora de un foco F, como á luz artificial, la resolución por lo tanto será la análoga (fig. 100) A, es la curva directriz, la intersec-

ción de la desarrollable dada con el plano P, se supone estar hallada en la curva C, mientras que el cono de rayos luminosos, cuya base es la línea A, corta al mismo plano P, según la curva B, más como quiera que, insiguiendo la solución anterior, se da por supuesto que la línea C es también intersección con P del cono de rayos luminosos cuya base es la misma C, de ello se infiere que la tangente común DE, á las dos líneas C y B, pueda representar traza de un plano tangente á los dos conos de vértice F y de bases C y B; claro es pues que si concebimos por el punto D un rayo de luz DF, éste contenido en el plano tangente mentado, cortará en G á la curva directriz, y, por lo tanto, uniendo G con E, la GE será ya generatriz, línea divisoria de luz y sombra, pues que es línea de contacto con la superficie de un plano que pasa por el foco luminoso.

108. Si nos fijamos en los datos de la fig. 97, podremos observar que podríamos solucionar el problema con arreglo al resuelto en la fig. 96, toda vez que aquí como allí se trata de una superficie de igual pendiente, pues sabido es que si se trata de hélice circular como lo era allá la línea de retroceso; las tangentes á dicha línea forman ángulos de abertura constante con el plano de la base de la hélice. El caso era, pues, de una superficie helizoidal ó sea el helizoide desarrollable; de dicha superficie volveremos á insistir pues dedicamos capítulo especial para toda clase de superficies helizoidales.

109. (*e*) **Desarrollable á dos directrices.**—La fig. 98, representada en perspectiva, será suficiente para hacerse cargo de la resolución. Las curvas A y B son las dos directrices; imagínense dos cilindros Σ, Σ' de directrices A y B y de dirección paralela al rayo de luz R, encuéntrense sus intersecciones A', B' con un plano cualquiera, el horizontal por ejemplo, y á ellas trácese la tangente común DC, esta recta es que representará la traza de un plano que será tangente á dichas superficies cilíndricas, pues además de ser tangente á sus bases contendrá á la vez las generatrices DD', CC'; si unimos pues D' con C' la D'C' será la línea divisoria de luz y sombra, toda vez que está contenida en un plano tangente á la superficie desarrollable y al mismo tiempo paralela al rayo luminoso. En primer lugar es tangente á la superficie por serlo á los dos cilindros, y, por lo tanto, lo es á las dos curvas

de base que son precisamente las líneas A y B del dato, y luego en segundo lugar es paralelo á la dirección de la luz por serlo los dos cilindros auxiliares, conducidos exprofeso con aquella dirección.

110. (*f*) El mismo caso anterior variando solamente el foco luminoso que aquí se supone ser luz artificial. Este caso representado en la figura convencional de n.° 99. Las operaciones son análogas; las directrices son A y B y F el punto luminoso. Los cilindros del caso anterior se convierten aquí en conos de vértice común F y de base respectivas las curvas A y B, las intersecciones de estas dos superficies auxiliares con el plano auxiliar secante son las otras dos curvas A′ y B′, cuyas tienen la tangente común DC; de modo que, uniendo ahora D con F y C con F, tendremos así dos rayos luminosos que cortarán, el primero en D′, á la curva B, y el segundo en C′ á la curva A, y con ello obtendremos, con la unión de estos dos últimos puntos, la recta D′C′ como á línea divisoria de luz y sombra y ello por los mismos razonamientos del caso anterior.

111. (*g*) **Desarrollable dada por dos cuerpos directores.**—Se comprende ahora fácilmente como este caso es consecuencia de los dos anteriores, ya sea con ello iluminada por luz natural ó artificial. Siempre serán susceptibles de hacer servir estos cuerpos ΣΣ′ como directores de los cilindros ó conos de luz, cuyos últimos sean respectivamente tangentes á aquellas superficies, y con ello repitiendo las operaciones anteriores se echará mano del plano secante á los dos cilindros ó á los dos conos, así como del plano tangente á esta altura, cual determinará en definitiva la línea divisoria de luz y sombra, contraproyectando los puntos de traza tangenciales sobre cada una de las curvas respectivas.



CAPÍTULO V

SOMBRA EN LAS SUPERFICIES DE 2.° GRADO

112. Generalidades.—Las superficies de 2.° grado son así llamadas por estar representadas algebraicamente por ecuaciones de 2.° grado con tres variables, según demuestra, y su estudio es pertinente en la Geometría Analítica de tres dimensiones.

También se las conoce con el nombre de Cuádricas.

Además, los caracteres geométricos de estas superficies, son:

1.° No pueden ser cortadas por una recta en más de dos puntos *.

2.° Los contornos aparentes son curvas planas **.

3.° Cortadas por un plano las secciones que sólo se pro-

* Una línea recta no puede encontrar á una superficie del grado *m*, en más de *m* puntos. En efecto, para hallar la intersección de una recta con una superficie del grado *m*, es necesario combinar dos ecuaciones de primer grado con una del grado *m*, y así el nuevo sistema que resulte de dicha combinación no puede admitir más que *m* soluciones.

** Veremos perfectamente semejante propiedad, si atendemos á que para obtener analíticamente la proyección de la sección plana de una superficie, es preciso eliminar una de las variables *z*, por ejemplo, entre la ecuación de la superficie y la del plano secante, así se obtendrá en el resultado una ecuación entre *x*, *y*, que se referirá á la proyección sobre el plano de las *xy*, concerniente al perímetro de esta sección; ahora bien, la eliminación de una incógnita entre una ecuación de primer grado, y otra de 2.° grado, dará un resultado de 2.° grado; luego la proyección de toda sección plana, de una superficie de 2.° grado, es una curva de 2.° grado.

ducen, son: curvas de 2.° grado ó una ó dos rectas, según los casos *.

La forma más general de la ecuación de 2.° grado que las representa, es:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

lo cual simplificada para hacer más expedito su uso, se llega á las otras dos:

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$$
$$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx.$$

La primera, que corresponde á la superficie de 2.° grado que tienen centro, y la segunda de las que de él carecen ó lo tengan al infinito.

La discusión detenida de la ecuación general, demuestra que existen no más cinco superficies de 2.° grado, cuales son:

El elipsoide, el cual seccionado por un plano da tán sólo elipses **.

El hiperboloide de una hoja, susceptible de dar elipses, hipérbolas, ó ya dos rectas cortándose ó paralelas ***.

---

* Más de otra parte, para tener la intersección de una superficie del orden *m*, con un plano basta tomar este plano por el de las $x'y'$, y hacer $z' = 0$ en la ecuación transformada; y como esta ecuación será también del grado *m*, resulta que: la intersección de una superficie del grado *m* con un plano, es una curva que no puede pasar del grado *m*.

La sección se llama ***diametral,*** cuando el plano divide en dos partes iguales á una serie de cuerdas paralelas.

La sección es ***principal,*** cuando el plano secante diametral, además de dividir á un sistema de cuerdas en dos partes iguales, les es perpendicular.

** La sección plana de un elipsoide cualquiera, es una elipse, y como caso particular un círculo y también un punto.

Las secciones hechas por dos planos paralelos son semejantes: las proyecciones de dos secciones paralelas sobre un plano cualquiera, son elipses homotéticas.

Por el centro de un elipsoide de tres ejes desiguales, pueden trazarse dos planos tales que le corten según dos secciones circulares; éstas son las secciones *antiparalelas,* y tienen la propiedad de contener el eje medio de la superficie.

Cuando el elipsoide es de revolución, estas dos secciones circulares coinciden con el ecuador de la superficie.

Para todo plano tangente, la sección degenera en un punto. La superficie tiene centro.

*** El hiperboloide á una hoja es también una superficie reglada; por lo tanto, si un plano es tal que corta á la superficie según una recta en la entrada, ha de

El hiperboloide de dos hojas *.

El paraboloide elíptico que da parábolas y elipses en la sección con dicho plano sector **.

El paraboloide hiperbólico, cual aparecen en él, parábolas é hipérbolas, así como también dos rectas que se cortan, y aun tan solo algunas veces una recta ***.

---

cortarla también según otra recta en la salida, puesto que la sección es de 2.° grado y la recta de 1.°; el primer miembro de la ecuación de 2.° grado se descompondrá en dos factores de primer grado, y cada uno de estos factores, igualado á *cero*, da la ecuación de una recta.

Si representamos por α el ángulo que el plano sector forma con el plano horizontal, y por β el que cada generatriz rectilínea del hiperboloide de revolución forma con el mismo plano H, se obtendrán los siguientes resultados.

1.° Cuando $\alpha < \beta$, las secciones serán *elípticas*, y como á caso particular, **Circunferencias.**—El hiperboloide de tres ejes desiguales, admite dos direcciones para las secciones circulares; pero cuando se trata del hiperboloide de revolución, estas dos direcciones coinciden, y todo plano paralelo al de la garganta dará un círculo.

2.° Cuando $\alpha = \beta$, entonces se obtendrán secciones parabólicas y como á caso particular, dos rectas paralelas; este último caso se presentará cuando el plano secante sea tangente al cono asintótico.

3.° $\alpha > \beta$. En este caso el plano secante dará hipérbola, y cuando degenera en tangente á la superficie, entonces la sección se compondrá de las dos generatrices que pasen por el punto de contacto.

Esta hiperboloide tiene centro.

* Esta variedad de superficie de 2.° grado es de muy poco uso en las aplicaciones. Las secciones producidas en ella por un plano pueden ser elipses, hipérbola y aun también parábola, en el caso de que el plano secante sea paralelo á una generatriz del cono asintótico.

El hiperboloide á tres ejes desiguales, admite dos direcciones que le producen en la sección círculos. Estas dos direcciones se confunden en una sola, cuando la superficie sea de revolución.

** Tampoco el paraboloide elíptico es de aplicación frecuente en las artes é industras, ó ya sea en estudios meramente especulativos.

Es susceptible de que sea seccionado por un plano por medio de elipses y parábolas, por cuya propiedad se le designó con el nombre que se le conoce. Admite dos planos principales; estos dos planos se cortan en ángulo recto, pasan por el vértice, y en su intersección dan el eje de la superficie. Esta superficie se convierte en de *revolución*, cuando las secciones principales son parábolas iguales.

Todo plano secante, paralelo al eje, corta á la superficie según una parábola.

Todo plano secante que corte al eje, produce en la superficie una elipse, ó una de sus casos particulares, esto es, un círculo, un punto.

Esta superficie no tiene centro, ó si se quiere, se halla al infinito.

*** El paraboloide hiperbólico es también una superficie reglada, así es que si se le corta por un plano de modo que éste, entre en él según una recta, ha de cortarle en su salida también por medio de otra recta.

Las secciones que puede producir al cortarla por medio de planos, son parábolas é hipérbolas, propiedad por lo cual se originó su nombre.

Además de estos cinco ejemplos de superficies de 2.° grado, pueden también clasificarse como á tales como casos dependientes de ellos.

La esfera, oriunda del elipsoide, cuando los tres ejes son iguales.

El cono, que tenga por base una curva de 2.° grado, como caso particular de los hiperboloides.

El cilindro, teniendo por base una curva de 2.° grado como caso particular de los paraboloides; aunque puede considerarse también como un cono cuyo vértice está en el infinito.

113.—Teoremas fundamentales que facilitan la determinación de las sombras en las superficies de 2.° grado.

1.° **La línea de contacto de un cono circunscrito á una superficie de 2.° grado es siempre plana, y su plano se encuentra paralelo al diametral conjugado con la dirección del diámetro que pasa por el vértice del cono.** —Veamos la (fig. 108, lám. 13), en la cual Σ es la superficie de 2.° grado; aquí un elipsoide; V, un punto exterior del cual se suponen se han trazado una serie de tangentes á las curvas ACE, AC'E', AC''E'' producidas por secciones en la su-

Tiene dos secciones principales, las cuales pasan por el vértice de la superficie, y son respectivamente paralelas á los dos planos directores, seccionándola según parábolas.

Todo plano que sea paralelo á uno de los principales, corta también á la superficie, según una parábola igual á la parábola principal á quien es paralela.

Como sección muy notable y característica de esta superficie puede citarse la que produce un plano conducido por el vértice perpendicularmente á los dos planos directores. Entonces el plano secante es á la vez tangente á la superficie cortando al paraboloide según dos generatrices rectilíneas, que pertenecen cada una de ellas á un sistema distinto. Sin embargo, este plano no será plano principal, puesto que no divide al paraboloide en dos partes simétricas.

Todo plano tangente corta también á la superficie, según dos rectas, que se cortan en el punto de contacto; cada una de ellas pertenece á una generatriz de sistema distinto.

Los planos secantes, paralelos á un plano tangente, producen en la superficie hipérbolas semejantes. Los ejes de estas curvas son proporcionales.

Cada uno de los planos trazados por el vértice, paralelo á uno de los planos directores, corta á la superficie en una sola recta.

La segunda recta que había de producir semejante sección se traslada al infinito.

El empleo de esta superficie es sumamente de importancia en las aplicaciones de la Estereotomía.

Esta superficie no tiene centro.

perficie de los planos que hemos hecho pasar por el diámetro VO, dirigido desde el punto V. Estas tangentes siéndolo á dichas curvas lo serán á la superficie, y, por lo tanto, formarán un cono, cuyo vértice será el V, y cuya base será la línea de contacto, lugar geométrico de todos los puntos de tangencia E, E', E'', etc. Esta curva, es pues necesario probar: 1.° que es plana, y 2.° que es paralelo su plano al diametral OEHJ que es conjugado de la dirección OV.

A este efecto, concibamos el plano diametral EJH conjugado con VO, este plano cortará á dichos planos secantes según una serie de rectas, OE, OE', OE'', que cada una de ellas será conjugada á su vez con la serie de cuerdas de la superficie, trazadas en dirección paralela á la misma VO. Así tendremos que OE y OA, OE' y OA, OE'' y OA, etc., serán pares de diámetros conjugados, referentes á las elipses AEB, AE'B, AE''B, etc.

En este estado, conduzcamos desde el punto V, á una de estas curvas la tangente VC, y obtenido que sea el punto de tangencia C, hagamos por el pasar un plano secante, paralelo al diametral EJH, cual plano cortará á la superficie según la elipse CKG (núm. 112, nota **, pág. 182) semejante á dicha EJH, y además á los planos secantes primitivos, según las rectas OC, OC', OC'', etc., respectivamente paralelas á las OE, OE', OE'' etc., y además proporcionales, pues se trata de elipses homotéticas. Ahora bien; fijémonos ahora que todas las secciones conducidas por el diámetro VO son elipses que tienen un eje común cual es el VO, que en todas ellas precisamente los puntos C, C', C'', etc., corresponden á una misma abscisa OO', y, por lo tanto, según una propiedad analítica *, las subtangentes O'V, tomadas sobre el eje común, serán

* En etecto, la ecuación de la tangente á la elipse en el punto cuyas coordenadas sean x', y', es $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$. Encontremos ahora el punto I (fig. 112), en que esta tangente corta á uno cualquiera de los coordenados, por ejemplo el de las x.

Para conseguirlo habrá que hacer $y = 0$ en la ecuación de la tangente, y así tendremos $x = \frac{a^2}{x'}$; este resultado, que es de fácil construcción, nos dice que es independiente de b; es decir, que describiendo diferentes elipses ABA', ACA', ADA', etc, sobre un mismo eje AA', y razando tangentes á éstas en los puntos razando O, N, M, etcétera, que tienen una misma abscisa, todas estas tangentes cortarán al eje de las x en un mismo punto I.

también comunes, y por lo tanto dichas tangentes serán las generatrices de un cono circunscrito á la superficie de vértice V, y de base paralela al plano diametral EJH.

114. 2.° **La línea de contacto de un cono circunscrito á una esfera es un círculo menor, perpendicular á la recta que une el centro de la esfera con el vértice del cono.**— Este teorema es una consecuencia del anterior (fig. 106) pues según él la sección diametral AB, que ha de ser paralela al plano de la curva de contacto *ab*, sabemos que es conjugada con la dirección VO, más aquí por la regularidad de la esfera, á más de la conjugación, existe la perpendicularidad, y, por lo tanto, seguirá la misma suerte la dirección del plano *ab*. Esta importante propiedad puede también comprobarse fácilmente y de una manera directa con sólo imaginar el giro alrededor de la recta VO, de un círculo máximo ADBC y su tangente V*a* trazada desde el punto V.

115. En la demostración del párrafo 112 hemos supuesto que Σ era un elipsoide, esto es, una de la superficie de 2.° grado dotada de centro; pasemos ahora á generalizarlo, escogiendo al efecto un paraboloide (fig. 109) cual según ya hemos indicado carece de centro. Sea, á este efecto, el punto B el escogido para vértice del cono circunscrito, y conduzcamos por él la recta BO′ paralela al eje ó diámetro principal HO del mismo, más como sabemos que el centro al considerarlo al infinito, los diámetros han de ser paralelos, de aquí que la recta AO′ continua siendo también un diámetro. Hagamos pasar por ella varios planos, ellos cortarán al paraboloide según las curvas parabólicas ACD, AC′D′, AC″D″... etc.

Concíbase ahora el plano tangente en A y luego otro plano paralelo al primero, pasando por un punto C′ producido por la tangencia de una de las secciones parabólicas, por ejemplo, la AC′D′ con la tangente á ella, conducida por el punto exterior B. Entonces este último plano cortará á los planos de estas parábolas, según las rectas IC, IC′, IC″... etcétera, cuyas no serán otras que ordenadas de dichas parábolas, respectivamente paralelas á las AF, AF′, AF″ ... etc. tangentes de dichas curvas en el punto A.

En semejante disposición, vemos ya que se han formado una serie de parábolas que tienen un diámetro común, y á la vez una serie de puntos C,C′,C″ ..... etc., que referidos al cita-

do diámetro, por las ordenadas CI,C′I,C″I..... etc., tienen una misma abscisa AI; además de todas estas propiedades las tangentes en el extremo A son respectivamente paralelas á las ordenadas C,C′,C″ ... etc., luego en todas estas parábolas la subtangente BI, referente á los puntos de contacto C,C′,C″ será común * y, por lo tanto, las tangentes á dichas curvas por todos los indicados puntos, pasarán cuando se las prolongue suficientemente; por el mismo punto B, formando así un cono en que B será el vértice y la curva plana GCC′C″ ... etc. la base, paralela al plano tangente en A la base.

La circunstancia aquí del paralelismo, del plano, de la curva con el tangente en A, sustituye á la condición de que dicho plano de la curva fuese paralelo al diametral conjugado con AO′ del párrafo 112, porque en este nuestro caso el plano diametral á que aludimos está á una distancia infinita.

También en la fig. 108 hubiérase podido acudir á este último paralelismo de plano de curva con el diametral referido, pues tal propiedad subsiste del mismo modo.

116. La curva de contacto de un cilindro circunscrito á una superficie de 2.° grado es siempre plana, y su plano es diametral conjugado de la dirección del cilindro.

Sea á este efecto en la (fig. 108) Σ, la superficie y la recta diametral VO, la dirección del cilindro circunscrito; hagamos pasar por ella varios planos, cuales cortarán á Σ, según las curvas ACB, AC′B, AC″B ..... etc., todas curvas de 2.° grado con el diámetro común AB; dispongamos en esta situación otro plano secante diametral, pero cuya dirección sea conjugada con la de AB; es evidente que este plano secante cortará al plano de las curvas antes producidas, según rectas

---

* (Fig. 111.) La ecuación de la tangente á la parábola, en el punto cuyas coordenadas sean $x'y'$, es $\frac{y}{\frac{1}{2}y'} - \frac{x}{x'} = 1$, si en esta ecuación hacemos $y = o$ se convertirá en $x = -x'$, lo que indica que la tangente corta al eje de las x, en un punto T, colocado en la parte de las x negativas y á una distancia OT igual á la abscisa OP del punto de contacto.

Cual resultado es origen de la siguiente propiedad: La subtangente es igual al doble de abscisa del punto de contacto, así tendremos TP = 2. OP.

Así es que si tenemos varias parábolas referidas á los mismos ejes X, Y y escogemos en cada una de ellas un punto como M, M′, M″ ... etc., que correspondan á una misma abscisa OP todas tendrán, para la respectiva tangente en M, M′, M″, la misma subtangente PT y, por lo tanto, todas dichas tangentes concurrirán en el punto I.

OE,OE′,OE″..... etc., cuyas serán todas diámetros de aquellas secciones, y conjugados con el eje común AB, esto es, dividiendo en dos partes iguales á las cuerdas de la superficie, paralelas á la dirección de AB; así, pues, podremos fácilmente inferir que las tangentes trazadas en cada uno de estos planos y por cada uno de los puntos E,E′,E″..... etc., son todas paralelas á la dirección AB, y forman verdaderamente un cilindro circunscrito á Σ, cuya curva de contacto es la curva plana que pasa por E,E′E″..... etc., la cual por construcciones anteriores su plano es diametral conjugado con la dirección AB de nuestro cilindro.

117. La curva de contacto de un cilindro circunscrito á una esfera es un círculo máximo, cuyo plano es perpendicular á la dirección de dicho cilindro.—Si la superficie de 2.° grado es la esfera, entonces resulta obvio que sea además de conjugado el plano de la curva con la dirección del cilindro, perpendicular también á la referida dirección. Sea para ello, en la fig. 105, la esfera Σ, y DD′ la recta diametral paralela á la dirección que lleve el cilindro; supongamos ahora que el plano del papel, pasando por el centro O de la esfera, produzca el corte meridiano de la misma y que está representado en la figura; conduzcamos, ahora, una tangente AC, á este círculo máximo, paralela á la dirección DD′, haciendo luego girar el círculo y su tangente alrededor de la recta DD′ como á eje, entonces será evidente que el punto A describirá una circunferencia cuyo plano AB será perpendicular al eje de giro DD′, mientras que la tangente AB, en todas las posiciones, continuará siendo tangente á las nuevas posiciones de las curvas meridianas, precisamente en cada uno de los puntos de pasaje que median en el ecuador AB; luego ellas formarán un cilindro de contacto, cuya curva común de cilindro y esfera será un círculo máximo perpendicular al eje DD′ ó dirección del cilindro así formado.

118. Si bien es verdad que en el párrafo 116 hemos conducido la demostración de modo que la superficie de 2.° grado tenía centro, no hay inconveniente, por otra parte, generalizarla, partiendo del supuesto que se trata de un paraboloide, esto es, que no tiene centro ó se le considera cuanto más al infinito. Supongamos, pues, en la fig. 110 que en un paraboloide elíptico se toma en consideración su eje CO y que por él se conduce un plano secante, paralelo á la dirección del cilindro de los rayos luminosos, este plano es evidente que nos dará una parábola tal como ECF; conduzcamos, ahora, á esta curva la tangente AD, paralela á la dirección del cilindro ó la de los rayos luminosos, lo que es igual; tomemos ahora en consideración, el punto de tangencia A, y por él condúzcase un plano diametral, éste es, evidente, que cortará el paraboloide según una parábola BAC, y será tal que dividirá en dos partes iguales á todas las cuerdas de la superficie que sean respectivamente paralelas á la dirección AD, esto es, será un plano diametral conjugado con la dirección del cilindro. Precisamente por esta razón podremos ahora asegurar que si por cada uno de los puntos A′,A″,A‴..... etc , de esta parábola se conducen rectas paralelas á la AD, todas ellas, A′D′,A″D″, A‴D‴.... etc., serán tangentes á la superficie, y, por lo tanto, formarán verdaderamente un cilindro circunscrito al paraboloide, siendo la curva de contacto *plana* y su plano diametral conjugado con la dirección del cilindro, que es lo que se trataba de probar.

Estas dos demostraciones de los núms. 116 y 118 hubiéranse, sin pasar por nuevas figuras, deducido de las figuras núms. 108 y 109 suponiendo en ellas el vértice del cono, que se traslada al infinito, hasta convertirse dicho cono en un cilindro, aprovechando luego las consecuencias que se infieren de tal hipótesis.

119. Sombra de la Esfera.—(*a*) *Caso general.* Lám. 13, fig. 103. Se da la esfera de centro O^v O^h expuesta á los rayos luminosos de dirección R^v R^h si cortamos á la superficie esférica por una serie de planos verticales A-A, A_1-A_1..... etc., que sean paralelos al rayo luminoso, estos cortarán á la esfera según círculos, á los cuales será fácil trazar tangentes al rayo luminoso, y el conjunto de todas estas tangentes formarán un cilindro paralelo á la dirección de la luz, y á la vez tangente á la superficie esférica, y su línea de contacto formada por la unión de los puntos de tangencia, será precisamente la línea divisoria de luz y sombra. La construcción, pues, de este modo de resolver el problema es sumamente fácil, aunque algo engorroso si pretendiéramos proyectar los círculos de sección en el plano vertical, puesto que allí para cada círculo nos veríamos obligados á construir una elipse, operación aunque muy fácil no sería por cierto de rapidez, al

objeto, pues, de orillar esta pequeña dificultad, recurriremos á un nuevo plano vertical de proyección L'T' paralelo al rayo luminoso, y en él claro es que las secciones á que antes nos hemos referido, se proyectarán según su verdadera magnitud, esto es, según círculos: éstos ya se dejan trazar con rapidez.

Cambiemos, pues, de plano vertical y entonces la nueva proyección de la esfera será la que tiene por centro el punto O', así como la del nuevo rayo luminoso será R', ahora la sección circular A-A será el círculo de centro O' y de radio O'A', trácense, pues, en él las tangentes E, E' paralelas á la dirección R'; precísense los puntos de contacto a,α, y éstos proyectados horizontalmente en a', α', pertenecerán ya á la línea de sombra, y con un simple cambio de línea de tierra, pasando de la nueva L'T' á la primitiva LT nos permitirá obtener las proyecciones verticales a_1, α_1 de los puntos en cuestión. No hay más que repetir ahora esta misma operación empleando otros planos secantes para obtener nuevos puntos, más puede aun facilitarse este medio, si se hecha mano del plano A_1-A_1 equidistante del meridiano G'G'' de la distancia que media desde este mismo meridiano al primer plano secante empleado A-A, pues entonces las secciones que ambos á dos producen en la esfera se proyectan en un solo círculo en el plano L'T', pudiendo con ello aprovechar los mismos puntos de tangencia antes indicados en a,α, cuales proyectados ahora horizontalmente van á situarse en proyección horizontal en $a''\alpha''$ y de ellos deducir la definitiva proyección vertical.

En particular, si tenemos en cuenta el plano secante G'G'' que se confunde con el meridiano principal, éste nos dará por sección el círculo máximo que forma el contorno aparente de la esfera en el plano L'T', entonces los puntos de tangencia B y C serán los límites de la curva, visiblemente el más alto y el más bajo, cuales proyectáranse en B',C'. en el plano horizontal, y de éstos deducir los B'',C'' en el plano vertical primitivo por medio del simple cambio de plano vertical.

También son límites los puntos DD' situados sobre el ecuador producidos por la tangencia de la esfera por los planos paralelos á los secantes, pero que en el límite han pasado á ser tangentes; ellos encontrándose sobre el ecuador tendrán sus proyecciones verticales en D'', D'''. Unidos todos estos puntos, darán la línea divisoria de luz y sombra.

Hemos empleado aquí el sistema conocido con el nombre de planos secantes, esto es, sistema general, susceptible su

uso, cualquiera que sea la superficie de que se trate, todo por el objeto de que puedan compararse mejor las ventajas que resultan de dar la preferencia al genérico y particular nacido de las mismas propiedades de la esfera. En efecto, ya de antemano tenemos conocimiento por el teorema del número 117, que la línea divisoria de luz y sombra es plana, es también un círculo máximo, y finalmente que la dirección de su plano es perpendicular al rayo luminoso. Nada, pues, más ventajoso que echar mano de un plano de proyección vertical, en el que venga proyectada directamente la curva en una recta, lo cual es notorio que para que así sea, su plano siendo perpendicular al nuevo de proyección vertical, la curva en él, contenida se confundirá con la misma traza vertical de dicho plano.

La operación será, pues, la más rápida posible, si escogemos el nuevo plano vertical L'T', que sea paralelo al rayo luminoso, de modo que teniendo ya en el referido plano, el rayo R' y la esfera O', bastará trazar por O' el diámetro BC perpendicular á R', y este diámetro ya será de hecho la línea de contacto, ó sea la divisoria de luz y sombra (pasa por O' por ser círculo máximo; es perpendicular á R' porque una recta perpendicular á un plano las proyecciones de la recta son perpendiculares á las trazas del plano, y finalmente el plano de la curva es perpendicular al vertical de proyección L'T' por serlo á una recta R' paralela á ese mismo plano de proyección).

Siendo círculo máximo se proyectará horizontalmente según una elipse cuyo centro estará en O^h, sus ejes son el diámetro DD' proyectado verticalmente en el punto O', y luego el eje menor B'C'; cual proporciona á la vez los puntos B-B', C-C', mas alto y bajo de la curva, lo son, puesto que la tangente en ellos es horizontal, proyectados verticalmente en B, C producidas aquellas tangentes por la intersección del plano de la curva con los planos tangentes en dichos puntos, cuales los tres siendo perpendiculares al plano vertical han de dar en su intersección del primero con cada uno de los otros dos, rectas perpendiculares al plano vertical, esto es, horizontales.

Estos ejes DD', C'B', proyectados verticalmente en D''D''', B''C'', se convertirán en diámetros conjugados y con ellos podremos también trazar la curva.

Mas si con respecto á esa proyección vertical, queremos

del propio modo utilizar la propiedad del número 117 podremos cambiar de plano horizontal y colocar ahora la nueva línea de tierra paralela á R^v, ó si se quiere para aprovechar espacio que se confunda con la misma R^v, entonces la nueva proyección horizontal de la esfera será el círculo cuyo centro es O″, mientras que R″ es la proyección del rayo, y por lo tanto la recta HI que le es perpendicular es la proyección de la curva de contacto; H, I proyectados en H′, I′ nos dan el eje menor de la elipse, mientras que el diámetro que le sea perpendicular dará el eje mayor; con ellos puede trazarse la elipse desde luego.

Pasemos á la sombra arrojada; sin necesidad de determinarla valiéndonos de la serie de puntos de que consta y considerando que ella será el resultado de la intersección de el cilindro circular de contacto con uno de los planos de proyección, no será difícil ver de momento que esta curva será elíptica, y por lo tanto, conocidos solamente sus ejes, podremos trazarla en seguida.

Elipse sobre el plano horizontal.—Los ejes DD′, C′B′, cortándose en ángulo recto y uno de los lados del ángulo $DO^h B'$ siendo horizontal, persistirá este ángulo siendo recto si lo proyectamos oblícuamente en la dirección de la luz sobre el plano horizontal (toda vez que el otro lado $O^h B'$ viene en proyección confundido con la dirección de las proyectantes; si encontramos, pues, auxiliados del rayo $R^h R'$ la sombra del centro $O^h O'$, ésta la encontraremos en el punto ω″ trazando ya por él un ángulo recto en que un lado venga en la dirección del rayo luminoso, mientras que el otro le sea perpendicular, en este último, tómense las distancias ω″δ, ωδ′ iguales cada una de ellas al radio de la esfera, visiblemente δδ′ será el eje menor, puesto que provienen de los puntos límites más lejanos y más próximos respectivamente del plano vertical. y correspondientes al diámetro citado DD′. Por oposición los puntos C, B, siendo los más bajos y más altos, si por ellos hacemos pasar rayos de sombra, ellos situados en el plano vertical meridiano G′G″ tendrán sus trazas horizontales en K′, J′ situados á la distancia mayor posible cada uno por su parte del centro ω″, y por lo tanto, perteneciendo á la cuerda máxima de la elipse, cual es por consecuencia el eje mayor; con estos datos constrúyase la elipse, y aprovéchese de ella la porción MKN por cuyos puntos pasará la otra porción MH″ I″N de la otra elipse que cae arrojada sobre el pla-

no vertical, cuyo se determinará valiéndonos del mismo procedimiento anterior, únicamente que ahora aquí el plano de referencia será el que tiene la línea de tierra en R^v. Las operaciones que expresa la figura son bastantes para comprobar el procedimiento.

120. *(b)* **Caso particular rayo luminoso á 45º.**—Es precisamente este caso particular el que se aplica, permitiendo encontrar las sombras tanto propias como arrojadas con suma brevedad; aprovechando, al efecto, ciertas relaciones que tienen lugar, por las cuales pueden conocerse inmediatamente los ejes de las elipses, tanto de sombra propia, como la de la arrojada, en función del rayo de la esfera.

Mas para facilitar mejor la comprensión del sistema, así como sus beneficiosos resultados, escojamos interinamente el plano de proyección vertical paralelo al rayo luminoso (figura 113), en cuyo caso sabemos por el párrafo n.º 20-3.ª que el ángulo ω, que la proyección vertical R^v del rayo hace con la línea de tierra, es precisamente el que forma la recta con el plano horizontal.

En tal estado el plano de la curva de sombra, siendo perpendicular al rayo luminoso, lo será al plano vertical, y entonces toda ella (n.º 117) se proyectará verticalmente según la recta ó diámetro *ab*, perpendicular al rayo R^v. Sabiendo de antemano que esta línea de sombra es un círculo máximo, ésta se proyectará fácilmente en el plano horizontal según la elipse *a′db′c*, cuyos ejes son conocidos; el mayor *cd*, igual al diámetro de la esfera, el menor *a′b′* dado por la proyección de los puntos *a*, y *b* sobre la traza horizontal del meridiano principal; ahora bien, suponiendo ya dibujadas las sombras propias y arrojadas, tal como se expresan en la figura de su referencia, podemos anotar las siguientes analogías:

1.º $o'b' = oh = ob \times \text{sen}\,\omega = R\ \text{sen}\,\omega$, pero (n.º 20-2.º) $\text{sen}\,\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, y por lo tanto $o'b' = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. De ello se infiere que el *semieje menor de la elipse de sombra propia, es igual al tercio del lado del triángulo equilátero, inscrito en el contorno aparente de la esfera.*

Por lo tanto, para construir prácticamente este eje, tómese en el contorno aparente y á partir de *d* la distancia *dm* = R; únese el punto *m* que así resulte con *c*, y entonces la rec-

ta *mc* cortará en b' al radio principal, siendo éste el extremo del semieje menor. En efecto, de esta construcción resulta que $o'b' = \frac{1}{3}\, cm$, y así es, porque cm es el lado del triángulo equilátero é isósceles inscrito, $o'b' = \frac{cb'}{2}$, pero por otra parte, uniendo o' con m, se formará el triángulo isósceles $o'b'm$, pues $b'o'm = b'mo'$, (pues el triángulo $o'dm$ es equilátero, y por lo tanto el ángulo $mo'b' = 30°$; pero el cmd es recto por inscrito en una semicircunferencia, luego ángulo $b'mo'$ 30°); luego se infiere que $o'b' = b'm$, y por lo tanto $o'b'$ igual al $\frac{1}{3}$ del lado mc.

En cuanto á la elipse de sombra arrojada, puede observarse que su eje menor $c'd'$ es igual al diámetro de la esfera, y en dirección perpendicular á la proyección R^h del rayo de luz, y en cuanto á al semieje mayor $O''\beta$, resulta ser la altura de un triángulo equilátero cuyo lado sea el eje menor, ó sea el diámetro de la esfera. En efecto $O''\beta = ek = \frac{et}{\text{sen}\ \omega} =$

$$\frac{R}{\text{sen}\ \omega} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = R\sqrt{3}$$

Por lo tanto, considerando la $c'd'$ como base del triángulo equilátero $c'\beta d'$, el punto vértice β dará el extremo del eje mayor.

También puede obtenerse β colocando á partir del centro O'' tres veces la distancia ó magnitud del eje menor $o'b'$ de la elipse de sombra propia.

121. Mediante la explicación procedente, se comprenderá en seguida el medio rápido de resolución para cuando el rayo luminoso tenga sus proyecciones formando ángulos de 45° con la línea de tierra (fig. 104).

En efecto, para ello orientemos de tal manera cada una de las proyecciones de modo á referir este caso al anterior; así para el plano horizontal supondremos que la proyección horizontal R^h del rayo sea la de la línea de tierra, y con esto trácese en seguida ab perpendicular á ella, y será el eje mayor de la elipse del plano horizontal; para el eje menor tómese Oc igual á la tercera parte del lado del triángulo equiláte-

ro inscrito en la proyección horizontal de la esfera, valiéndonos para ello de la recta da, dispuesta como se ha indicado en el caso anterior.

Para la sombra arrojada, una vez obtenida la sombra ω del centro, trácese por él la hg perpendicular al rayo luminoso (aquí línea de tierra que pasa por la proyección horizontal del centro de la esfera), tomando á partir de ω hacia arriba y hacia abajo la distancia ωh y ωg igual al radio de la esfera; hg, será el eje menor, y finalmente construyendo sobre él dos triángulos equiláteros uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda, obtendremos los puntos e y f, y con ellos el eje mayor de elipse, sombra arrojada sobre el plano horizontal, aprovechando de ella hasta alcanzar los puntos m, n de la línea de la tierra, pues á partir de ellos la sombra cae arrojada sobre el plano vertical.

En dicho plano vertical, es ahora cuando se han de reproducir estas operaciones, tomando como á línea de tierra la R^v, esto es la proyección vertical del rayo que pasa por el centro de la esfera, así ij, perpendicular á R^v será el eje mayor, y tomando $o'l = Oc$, tendremos el eje menor de la elipse de sombra propia. El punto ω' es la sombra del centro sobre el plano vertical, la $rq = ij$, conducida perpendicularmente á R^v, será el eje menor de la elipse de sombra arrojada, mientras que el triángulo equilátero qpr dará el eje mayor. Esta elipse se aprovechará no más hasta encontrar los mismos puntos m y n anteriormente mencionados.

121. (*c*) **Luz artificial** (fig. 107).—Cuando se trata de la sombra de la esfera iluminada por un foco luminoso, situado á distancia finita, entonces puede aplicarse exclusivamente el teorema del párrafo 114, pues facilita la construcción de la curva de sombra; y en efecto, conociendo la propiedad de ser esta curva plana, ser un círculo menor, y luego conociendo también la dirección del plano, bien podemos comprender que muy prontamente podrán hacerse las construcciones una vez colocados los datos en circunstancias favorables para poner en práctica dicho teorema.

Sea, pues, el foco luminoso dado en F-F', y O-o' el centro de la esfera, con el contorno aparente de la misma.

Sabiendo que la curva es plana, lo más expedito es escoger convenientemente los planos de proyección, de modo que aquélla se proyecte según una recta, esto es, confundida con

la traza vertical del plano que la contiene; más este plano sabemos ya de antemano que es perpendicular á la recta que une F con O; por lo tanto, hagamos un cambio de plano vertical, haciendo que el nuevo sea el proyectante vertical que pasa por FO; en este supuesto, la nueva proyección vertical de la esfera pasará en la que tiene el centro en O″, mientras que el foco se situará en el punto F″, ahora la recta eje del cono envolvente de la esfera será la F″O″, y por lo tanto, estando ella, en este plano en verdadera magnitud, no habrá más que conducir por F″ las tangentes F″*a*′, F″*b*′ al contorno aparente, y la recta *a*′*b*′, producida por la unión de los puntos de contacto, satisfará á la cuestión, pues ella representa un plano perpendicular al plano vertical, y á la vez á la recta F″O″, representando por lo mismo (n.° 114) el círculo mínimo que se refiere á la curva de contacto del cono de vértice F″, esto es, á la línea de sombra propia. Siendo, pues, un círculo en el espacio, se proyectará horizontal y verticalmente según elipses, cuyas podrán trazarse en el momento; conocidos que sean sus ejes. Ya desde luego los puntos extremos *a*′, *b*′, siendo los más alto y bajo de la curva, y situados en el meridiano principal FO, se proyectarán en *a* y *b*, y por lo tanto *ab* será el eje menor de la elipse proyección horizontal; en cuanto al eje mayor, visiblemente es horizontal y se proyecta en el punto *c*′, medio de *a*′*b*′; ahora en cuanto á su magnitud, se obtendrá, observando que si se traza por *c*′ un plano secante horizontal *dd*′, éste cortará á la esfera según un círculo, que se proyectará horizontalmente en verdadera magnitud, cortando á la vez al plano del círculo *a*′*b*′ según una recta, que será cuerda de la esfera, cuyos puntos extremos, confundidos en uno solo en *c*′, serán con evidencia los extremos del eje mayor; así, pues, la intersección proyectada en *c*′*c*″, con la proyección horizontal del círculo mínimo *dd*′, nos proporcionará el eje mayor *c*′ *c*″. Las tangentes al ecuador F*e*-F*e*′; nos acentuarán mejor los puntos *ee*′, en que la curva pasa de vista á oculta.

Estos ejes, proyectados ahora verticalmente en el plano, cuya línea de tierra es LT, se convertirían en diámetros conjugados, y con ellos podríamos trazar la elipse de la proyección vertical. Mas es preferible poner otra vez en práctica el teorema del n.° 114, empleando ahora un nuevo plano horizontal, cuya línea de tierra sea la que se confunda con la recta O′F′, entonces la proyección horizontal de la esfera pasará

á la que tiene el centro en O‴, mientras que el foco vendrá en F‴, *f*′*g*′ será la línea de sombra, y de ella se deducirán los ejes *fg*, *h*″*h* de la elipse de la proyección vertical, del propio modo como hemos expresado, al tratar de la proyección horizontal; también las tangentes trazadas desde F′ al contorno aparente, nos proporcionarán los puntos en que la curva de sombra pasa de vista á oculta, en dicho plano vertical.

Pasemos ahora á determinar la sombra arrojada; está esta originada por la intersección del cono de sombra con el plano horizontal, será pues una elipse, puesto que en nuestro caso este plano secante forma con el plano de la base del cono, un ángulo menor que el correspondiente á las generatrices del cono, con el plano de la referida base; cortará pues á todas las generatrices y será una curva cerrada: una elipse; determinados, pues, los ejes de ésta, ella quedará determinada.

Observemos, ante todo, que los puntos *aa*′, *b*′*b*, son los más alto y más bajo, esto es, tienen la tangente horizontal, mientras que los rayos luminosos que por ellos pasan, producen rayos de sombra, contenidos en el plano vertical FO, sus sombras estarán, pues, contenidas en la recta FO prolongada y vendrán á situarse en *k* y *l*, en la máxima separación en que dos generatrices del cono, pueden cortar al plano horizontal, además la tangente á la curva en *k* y en *l*, ha de ser perpendicular á la recta *kl* (pues las tangentes en *a* y en *b* son horizontales, mientras que por otra parte *ab* está en el mismo plano proyectante que FO), luego la recta *kl* es el eje mayor, para el menor, bastará encontrar el punto ω medio de *kl*, trazar por él una perpendicular á este eje, y venir á buscar la magnitud del eje menor, y para ello conduzcamos por ω un plano AB, paralelo á la base *a*′*b*′, este plano AB cortará al cono según una sección circular de centro *p*, y que rebatida viene en la circunferencia ACB; más si además de esta sección nos fijamos en la que produce al cono, el plano horizontal *kl*, no dificultaremos en observar como ambos planos se cortan según una cuerda común del cono, proyectada, según el punto ω, y que rebatido con la sección circular, viene su mitad en ω*m*, luego *m* rebatido nos dá, en ω*m*, la magnitud del diámetro mínimo de la elipse de sombra, y podremos trasladarlo respectivamente en ω*n* y ω*n*′, construyendo ya con ello la elipse en cuestión.

Los rayos luminosos límites F*e*′, F*e*, serán sus proyeccio-

nes tangente á la elipse de sombra arrojada en E y E', de modo que, para precisar estos puntos notables que contribuyen á dar más exactitud al resultado, observaremos que si se traza con centro ω una semicircunferencia *k*GN, ella y la elipse *k*E'*n*, teniendo un eje común ω*k*, tendrán subtangentes comunes, los puntos G, E' de estas dos curvas que correspondan á una misma abscisa ω H; por tanto, trácese desde F las tangentes FG y su simetría FG', los puntos de contacto unidos darán la GG', cuya, cortando á la elipse de sombra precisará los puntos de tangencia E', E". Sabido que también podríamos trazar las tangentes FE', FE", sin necesidad de la curva elíptica, y con solo tener sus ejes, entonces la intersección directa de las FE', FE" con la GG', dará los puntos E', E". La cuerda E', E", visiblemente correspondería á la sombra arrojada de la cuerda *ee'*.

ESFERA HUECA

123. Nicho esférico.—Teorema fundamental.—*Cuando un cilindro penetra en una superficie esférica por medio de una curva plana, la curva de salida es también plana é igual y simétrica á la primera. Estas dos curvas son dos círculos; además el plano de esta curva de salida es perpendicular á otro plano paralelo á la dirección del cilindro y conducido perpendicularmente á la curva de entrada.* (Lám. 14, fig. 114). Para convencernos de esta verdad, escojamos un plano de operaciones pasando por el centro O de la esfera; perpendicular al plano de la curva de entrada y paralelo á las generatrices del cilindro; en este plano es evidente que la curva de entrada vendrá proyectada, según una cuerda *ab*, mientras que el corte de dicho plano con el cilindro serán dos generatrices límites MN, *mn*, cuales, entrando en la esfera por los puntos *a*, *b*, saldrán hacia la parte opuesta por *a' b'*, toda vez que el plano auxiliar á de cortar por precisión á la esfera, según un círculo máximo, pasando por los cuatro puntos *a*, *b*, *a'*, *b'*, concibamos ahora todas las generatrices del cilindro que se apoyan alrededor del arco circular *ab*, que constituye la curva de entrada; es visible que consideradas todas ellas dentro de los límites del interior de la esfera, vienen á constituir una serie de cuerdas de la misma, todas paralelas entre sí y como á tales sucederá que, si por el punto O centro, conducimos un plano vertical VD

perpendicular á las mismas, sucederá como que éste las cortará en dos partes iguales en los segmentos respectivos, limitados en el interior de la esfera; por lo tanto, tendremos $am = a'm$; $bp = b'p$; y otra cuerda cualquiera de las mentadas tal como la que produce la generatriz Q*q* que pasa por el punto *c*, dará igualmente $cn = c'n$; resultando, que si los tres puntos *a*, *c*, *b*, están en línea recta, los tres de salida *a'*, *c'*, *b*, lo estarán igualmente, encontrándose en un plano vertical é igualmente inclinado para con respecto al eje VD que el referente al plano *ab*; concurriendo por lo tanto las trazas de estos dos planos en el mismo punto V del eje mentado VD.

Como lo dicho para con respecto á la generatriz Q*q*, puede reproducirse para otra cualquiera del cilindro en cuestión, claro es que así podremos inferir que la curva de salida es plana é igual á la de entrada *ab*, á la par que perpendicular al plano del círculo máximo que es paralelo al cilindro, y que en resumen los planos de las curvas de entrada y de salida, son á la vez perpendiculares á este plano de operaciones paralelas á dicho cilindro de los rayos luminosos.

124. De este teorema se infiere (figura 115), que si la curva de entrada es un círculo máximo *ab*, la curva de salida *a'b'* lo será también, los dos simétricos para con respecto al eje CD perpendicular á la dirección del cilindro; así como también los dos perpendiculares al plano del círculo máximo paralelo al cilindro y pasando por la cuerda *ab* de la esfera.

125. Auxiliados ahora con el conocimiento de este último teorema, nos será fácil llevar á cabo la resolución de la sombra del nicho esférico, objeto de la figura 116. El nicho esférico lo compone un cuarto de esfera A*a* K-A" *m* K', el cual es tangente á un cilindro vertical alrededor de la línea ecuatorial, y así, pues, este cilindro tiene por base una semicircunferencia igual al ecuador A*a*K y por altura una magnitud cualquiera, tal como A'A"; ahora el rayo luminoso, siendo R^v-R^h, se desea encontrar la sombra producida en el interior de este cuerpo, formado por ambas superficies, cilindro y esfera. En primer lugar, aparece ya de momento y á simple vista, la arista A-A'A" línea divisoria de luz y sombra; el rayo de sombra resbalando por ella, engendra un plano de sombra vertical, cuya traza horizontal en la plataforma del

nicho, es la recta Aa, verdaderamente sombra arrojada sobre esta plataforma, de un trecho de aquella arista; más en el momento de llegar en el punto a, la sombra es recibida por la superficie cóncava del cilindro, siendo ella la vertical $a'a''$, cuyo último punto a'' tiene por originario el último punto A″ de la arista de partida. Ello se comprende perfectamente, puesto que la sombra $a'a''$ no es más que el resultado; de venir cortado el cilindro del nicho por el plano vertical de sombra, y como quiera que dicho plano es paralelo á la dirección del cilindro, forzosamente le ha de cortar por medio de una generatriz.

Mas al llegar en A″, el rayo de sombra se apoya sobre la semicircunferencia de embocadura del nicho, engendrando en el movimiento un cilíndrico oblícuo, el cual, cortando al cilindro recto del nicho, produce una línea de sombra a'' $\delta' d$, es, pues, sombra arrojada de una parte del círculo del paramento, precisamente la que corresponde al trecho A″△′D. Un punto cualquiera es fácil encontrarlo; escogiendo al efecto el punto originario que se quiera, △-△′, trazando por él un rayo luminoso, el cual cortará al cilindro recto en el punto δ-δ', y así los demás. Téngase en cuenta que esta curva y la vertical $a'a''$ han de ser tangentes en el punto a'' toda vez que la tangente á la curva en dicho punto ha de provenir de la intersección de dos planos tangentes, el uno al cilindro recto, (cual es vertical $\alpha\alpha'$) y el otro al cilindro oblícuo, cual es el Aa, también vertical por consiguiente esta intersección se confunde aquí con la misma sombra antes encontrada en $a'a''$.

Se comprende que la curva de que estamos tratando habrá de terminar en el punto d, en donde corta al círculo ecuatorial A″K′, pues á partir de él, el cilindro de sombra cae de lleno sobre la superficie esférica, dándonos una sombra arrojada d y Eqm, cuya línea tiene por originaria la del trecho de arco circular DY″E‴m.

Para encontrar puntos de esta curva estamos ya en el caso por ser el medio más breve, de aplicar la segunda parte del teorema del párrafo 123; con ellos sabemos que en el espacio esta sombra arrojada será un círculo máximo, aunque proyectado según una elipse en la figura 116; sus ejes, pues, nos bastarán. Con arreglo á dicho teorema, escojamos al efecto un plano auxiliar L″T″, que sea perpendicular á la cara de fachada del nicho, á la vez que paralelo á la dirección de la luz (este plano, en rigor, ha de ser el C′O′ pasando por el centro de la esfera, pero que nosotros, al objeto de hacer

más claras las operaciones, lo trasladamos paralelamente á su mismo en L″T″), en esta disposición rebatamos este plano en el papel que dibujamos, trazando el corte C″$g\pi$ que ha producido en la esfera, al mismo tiempo que el rayo luminoso referido en el mismo plano en R′ (este rayo es el que se proyecta en C′O′-CC$_2$, al efectuar el rebatimiento C′ que se proyecta en C″, permanece en esta última posición inmóvil, mientras que O′-C$_2$ se traslada en O″, y al efectuar el rebatimiento en C$_1$ á la distancia O″C$_1$=OC$_2$; por lo tanto, la unión de C$_1$, C″ dará la nueva proyección del rayo R′), la combinación de la semicircunferencia C″$g\pi$ con el rayo luminoso R′, nos da inmediatamente el punto E$_1$, y éste, recordando el teorema indicado, es ya en este plano de operaciones el punto de salida del rayo que pasa por C″; pero sabemos también que en este plano la curva de salida, siendo un círculo máximo habrá de pasar forzosamente por el O″, luego se infiere, que habiendo de ser el plano de esta curva perpendicular á esta auxiliar de operaciones y habiendo de pasar á la vez por E$_1$, claro es que podemos dar por cierto de como la recta que une los puntos O″, E$_1$, es la traza del plano de la curva sobre nuestro auxiliar, y que en dicha traza se proyecta la curva entera, confundiéndose ambas á dos. De ella puédense inferir ya directamente los ejes de la proyección vertical, uno de ellos, el mayor, se proyecta en el plano auxiliar en el solo punto O″ y en el plano vertical en mn, pasando por el centro O′ é igual en magnitud al diámetro de la esfera; mientras que el menor se dibujará en $\gamma c'$ en dirección perpendicular á mn y proyectando al efecto en esta recta el punto límite E$_1$ en c', trasladando en seguida simétricamente el semieje c'O′ en O′γ; con dichos ejes trácese pues la elipse $m\gamma nc'$, guardando de ella únicamente la parte aprovechable en el trecho que media desde m á d.

Al resolver esta última sombra, hemos querido, como era lógico, trazarla echando mano exclusivamente de las propiedades innatas de la superficie, pues ya se ha dicho más repetidas veces que así se logra más exactitud y rapidez, más claro es; que eso no obsta, aún para hacer ver mejor la bondad de este último sistema, el que ensayemos en poner en práctica el procedimiento general, y así tendremos lugar á la comprobación de ambos: en rigor veremos que este segundo nos viene á corroborar el primero, demostrándonos precisamente aquellas mismas propiedades.

Consiste este segundo sistema en cortar á la esfera por medio de una serie de planos, paralelos al rayo luminoso, á la vez que perpendiculares al plano de proyección vertical; estos planos son los que tienen por traza las rectas $C'c'$,Dd, $E'''E$ ..... etc.; ellos cortan á la esfera según círculos, al cilindro de sombra según rayos luminosos, en cada plano secante se combinará, ahora, círculo y recta, cuales al cortarse por segunda vez darán con evidencia el punto de sombra. La cuestión es, pues, escoger un plano de proyección auxiliar, paralelo á dichos secantes, puesto que en él las referencias de todos aquellos y lo que en sí contengan vendrán en verdadera magnitud, y las operaciones serán expeditas.

Trácese este plano auxiliar en $L''T''$ y después de proyectados en él los mentados planos secantes, rebatámoslos alrededor de $L''T''$ y los resultados vendrán dispuestos del siguiente modo: el plano $O'C'$, y que viene en $O''C''$, nos da rebatido un círculo máximo de la esfera $C''g\pi$; y el rayo luminoso que pasa por C' se rebatirá en $C''C_1$, con sólo tomar la distancia $O''C_1=OC_2$, y uniendo C'' con C_1 dará la dirección del rayo de luz R', el cual corta en E_1 al arco circular; este punto es, pues, el de sombra, referido directamente en el lugar que le corresponde, esto es, en c' sobre el rayo luminoso que pasa por C'. Del propio modo, el plano secante que pasa por E''', trasladado á la vez que rebatido produce en la sección el círculo mínimo $E'E''\varepsilon''$ así como también el rayo que parte de E' paralelo á la dirección general R', rayo y círculo se cortan ahora en el punto E'', este es también un punto de sombra arrojada y se trasladará á su debido lugar en E; y así de este modo iríamos repitiendo operaciones hasta que llegaría el momento en que el plano secante se habría convertido en tangente, esto es, cuando la cuerda habiéndose anulado habría pasado á ser tangente de la esfera, y este punto cual se confunde en O'' pero que en su posición verdadera está en m, deducido por la tangencia al arco de embocadura con una recta paralela al rayo R^v, será definitivamente el último punto de la curva, esto es, aquel en el cual, se confundirán los puntos de entrada y de salida del rayo luminoso, uniendo, pues, sucesivamente todos esos puntos se obtendrá la curva $mqEydc'$, aunque si bien es verdad quedará no más aprovechable desde d hasta m habiendo trazado la parte excedente para mayor exactitud.

Analicemos este segundo procedimiento y nos será facil descubrir, desde luego, que los puntos de sombra encontrados

en el plano auxiliar en E_1,E'',O'' se halla situado precisamente sobre una misma recta. En efecto, para el punto E_1 nos hemos visto obligados á construir el triángulo $C''E_1O''$, este es, isósceles, porque $C''O''=O''E_1$ por radios de un mismo círculo. Para el punto E' también tenemos otro triángulo isósceles $E'O''E''$ por la misma razón que la anterior; pero estos dos triángulos son semejantes, puesto que los lados $E'E''$, $C''E_1$ son paralelos, y los $O''C''$, $O''E'$ se superponen por construcción, luego los ángulos en C'' y E'' son iguales, y encontrándose ambos triángulos isósceles, los ángulos en E',E'' han de ser también iguales y, por lo tanto, si hay supersposición en los lados análogos $C''O''$, $E'O''$, igualmente existirá ésta con los lados $O''E_1$,$O''E''$ ya que ambos á dos parten también del mismo punto O por construcción. De ello podemos inferir que la curva de sombra arrojada es plana, ya que en este plano auxiliar todos los puntos de ella se hallan situados sobre una sola recta: por precisión esta recta ha de representar la traza del plano de la curva sobre el plano auxiliar de referencia. En segundo lugar dicha traza pasa por el centro O'' y esto indica también de por sí que la curva ha de ser un círculo máximo de la esfera, y por lo tanto proyectado sobre el plano de proyección vertical en una elipse.

He aquí, pues, que estos dos sistemas se avienen perfectamente, corroborando el análisis del segundo la síntesis del primero.

Para el mejor trazado de la curva podríamos proponernos encontrar las tangentes en sus distintos puntos, por ejemplo en el E, y al efecto habríamos de combinar el plano de la curva con el plano tangente á una de las superficies, esta operación es sumamente fácil; así, escogiendo el plano de operaciones el del paramento, la traza del plano de la curva es la recta $O'X$, mientras que la traza del plano tangente al cilindro es la tangente en E''' al círculo de embocadura; ahora estas dos rectas se cortan en el punto Z, y éste perteneciendo á la intersección de estos planos, claro es que unido con E, que también pertenece á ella, nos dará la tangente EZ pedida.

Obsérvase también que la curva últimamente trazada en mEd ha de acordar con la curva $d\delta'a''$ en el punto d situado sobre el ecuador de la esfera; esto es, han de tener en dicho punto una tangente común. En efecto, la curva $a''d$, siendo intersección de dos cilindros, uno el vertical del nicho y el

otro formado por los rayos de sombra, la tangente en el punto *d* ha de resultar de la intersección del plano tangente en este punto, $f\varphi$ al cilindro recto con el plano tangente, DD_1 al cilindro oblícuo; pero este mismo punto considerado sobre la esfera es tal que el plano tangente á la esfera que por él pasa es el mismo plano vertical $f\varphi$ que lo era al cilindro recto, y como quiera que el otro plano tangente considerado al cilindro oblícuo, á lo largo de la generatriz *d*D, subsiste el mismo, ya se considere la curva *da* en el cilindro recto, ya se considere la curva *m*E*d* en la esfera, de aquí se infiere que los dos planos tangentes que hay que combinar para hallar la tangente en el punto *d* á la curva *da*' son exactamente los mismos, que combinados darían la tangente en el mismo punto *d* á la curva elíptica *m*E*d* de la esfera; luego las tangentes á estas dos curvas, en el punto *d*, se confundirán en una sola, por lo cual las dos curvas forzosamente se han de acordar teniendo una tangente común.

En virtud de lo que se acaba de expresar, puede haberse comprendido la importancia que tiene, para el buen trazado de la curva, el conocer de antemano el punto *d*, en donde se verifica el acuerdo, y á este objeto, argüiremos del siguiente modo: suponiendo ser conocida la situación de este punto *d* sobre el ecuador, es claro que estando situado en el plano de la curva y en el plano del ecuador encontrárase situado en la recta intersección de estos dos planos, esta recta con evidencia es la O*f* en el plano horizontal, mientras que en el plano auxiliar L″T″, viene confundida con la misma traza $O''E_1$ del plano de la curva; de tener pues fijada la posición de esta recta OM′, sería evidente, que su punto *f* de intersección con la línea del ecuador, sería precisamente, el que proyectado en *d*, satisfaría á la cuestión.

Fijemos, pues, esta recta, bastándonos para ello dos puntos, uno de ellos ya lo tenemos, es el O, y otro podremos encontrarlo relacionándolo con otra recta cualquiera que esté contenida en el plano del ecuador, por ejemplo la tangente al ecuador en el punto K, toda vez que ella encontrándose en el mismo ecuador cortará á la recta incógnita en el punto M′ y éste unido con O dará por resultado la recta en cuestión.

Ahora bien, la tangente aludida KM′ se proyecta verticalmente, en el punto K′, mientras que en el plano auxiliar L″T″, se proyectará en su verdadera magnitud en la perpendicular en L″T″, partiendo del punto K″, más como el punto incógnito

ha de encontrarse en la recta $O''E_1$ y en dicha perpendicular referida, que parte de K″; de aquí, que su intersección M, sea el que buscamos; ya encontrado no hay más que colocarlo en su verdadero sitio, y para ello tómese la distancia K″M, y colóquese sobre la perpendicular que parte de K, para con respecto al paramento AK, de K á M′, únese M′ con O, y esta recta resultante OM, cortando á la línea ecuatorial en el punto *f*, satisfará á la cuestión proyectándolo verticalmente en *d*. Muchas veces es incómodo el uso de la recta auxiliar KM′ en razón que el punto de intersección M entre la O″E″ y la K″K′, no alcanza los límites del dibujo, ó cuando más lo hace en sitio incómodo, ú ocupado por medio de otras construcciones; en semejante caso se corta fácilmente semejante deficiencia, escogiendo otra recta, situada en el mismo plano del ecuador, pero situada de modo que su encuentro con el plano de la curva sea accesible en los límites del dibujo; aquí una de las más á propósito para cumplir esta propiedad es la tangente al ecuador en el punto β, esto es la paralela á la línea de tierra, esta tangente proyectada en el plano L″T″, en $g\varphi_1$ la cual corta al plano de la curva en el punto F, ahora F se proyecta verticalmente en F′ y en el plano horizontal definitivo en F″; luego OF″ es la recta pedida y su intersección con la línea ecuatorial nos da el punto en cuestión *f*, trasladado en *d*.

Finalmente la curva *mq*E*yd* podría proyectarse horizontalmente en $m'q'E'_1f$, trazando por cada altura de las mismas las paralelas de la esfera en PE,Q*q* ..... etc., proyectándolos horizontalmente, cuales aparecerán en su verdadera magnitud, partiendo de P′Q′ ..... etc., y en las circunferencias que los representan, van á proyectarse los distintos puntos, en q',E'_1 ..... etc.

126. Variaciones en la sombra del nicho esférico.— La sombra del nicho esférico aparece en disposición y aspectos diferentes, según sea la inclinación del rayo luminoso, y es de verdadera utilidad conocer los tres tipos generales de que es susceptible, para que así no pueda causar extrañeza al encontrar el principiante, dos de estas disposiciones (figs. 120 y 121) tan completamente distintas del de la fig. 119 que es la que generalmente tiene lugar en razón de la elección del rayo, que siempre se aproxima más ó menos, con el que las proyecciones forman ángulos de 45° con la línea de tierra.

Veamos, pues, estas tres formas principales en que estriban: La disposición primera, que es la que acabamos de estudiar en el párrafo anterior, es la que aparece en los dibujos con más frecuencia, fig. 119, en ella el rayo luminoso al ser referido en el plano auxiliar de operaciones y trazado según hemos visto por el punto extremo β, corta á la sección circular en un punto *b*, correspondiendo entonces el arco β*cb* á ser mayor de un cuadrante; el plano de la curva aparece en *bb'*, siendo lo verdaderamente utilizable la parte O*b'* y con ello el punto *b'* se proyecta en B para darnos el vértice del eje menor de la elipse hacia la derecha del centro O, cuyo hecho nos dá por consecuencia que la curva elíptica AB dirija su concavidad hacia la parte obscura.

Más si nos fijamos en la fig. 120, en ella se encuentra de tal modo inclinado el rayo luminoso, que al trazarle en el plano auxiliar por el extremo β, el punto *b* de intersección con el círculo máximo, nos aparece el dicho punto en *b*, hacia la izquierda del punto O, siendo β*b* menor de un cuadrante; el resultado de semejante situación es el proyectarse *b* en B á la izquierda del punto O, y este punto, que es el vértice de la elipse situado en uno de los extremos del eje menor, así como en la única parte aprovechable de la elipse según nos lo indica su plano en *b*O', nos hará comprender perfectamente, como ahora la curva de sombra AB será convexa hacia la parte obscura ó si se quiere cóncava, hacia la parte iluminada.

Por último, se comprende como existiendo estas dos disposiciones habrá de existir forzosamente una de transición á la que corresponda un rayo luminoso especial, por el que se haga el pasaje de la curva de cóncava á convexa y viceversa, y en efecto, este caso lo demuestra la fig. 121, en donde el rayo luminoso que pasa por el punto extremo β, corta al círculo máximo de la esfera, precisamente en el mismo punto C, siendo ahora un cuadrante el arco βC *interceptado*, entonces la línea de sombra se proyecta, no ya según una elipse, sino según una recta BO, ya que al proyectar el vértice C de la elipse de los anteriores casos, éste ahora no cae como antes ni á derecha ni izquierda del punto O, y si confundiéndose con el mismo, entonces todo el plano OBCO' es de perfil y perpendicular á la línea de tierra L'T'.

127. *(b)* **Sombra del nicho esférico: foco.**—El ejercicio que expresa dicho enunciando está basado en la siguiente propiedad:

Cuando un cono penetra en una esfera por medio de una curva plana, un círculo, la curva de salida será igualmente plana, esto es un círculo por tratarse de la esfera.

Adoptemos para la demostración en la fig. 117 un plano de operaciones que pase por el centro de la esfera O, así como por el vértice V del cono, y al mismo tiempo que sea perpendicular al plano *ab* de la curva de entrada; con semejante disposición, proyectándose en este plano, según una recta *ab* la curva de entrada, y cortando al mismo plano á la esfera según un círculo máximo de centro O, y al cono según las dos generatrices que pasan por *a* y por *b*; resultará; que estas V*a* V*b*, suficientemente prolongadas; volverán á cortar á la esfera en los puntos A y B; bastando luego demostrar que toda la curva de salida se proyecta según la recta AB.

En efecto, escojamos un punto cualquiera C de AB y demostraremos que este punto pertenece á la curva de salida, ó sea á un círculo vertical cuyo diámetro horizontal es AB; pues lo demostrado para él podrá aplicarse para tantos otros como queramos. A este fin, conduzcamos por dicho punto C un plano *a'b'* paralelo á la base del cono; rebatamos la sección en él producida, siendo la charnela la misma *a'b'*, entonces en el rebatimento tendremos la sección circular *a'*C'*b'*, y el punto C se rebatirá en C' con la ordenada C'C; esta última sabemos que estará con los segmentos del diámetro en la siguiente relación.

$\overline{CC'}^2 = a'C \times Cb'$. Mas por otra parte, si comparamos los triángulos *a'*AC, BC*b'*, veremos que son semejantes, pues tienen común el ángulo en C, é iguales los ángulos en *a'* y B por tener la misma medida, cual es la mitad del arco A*ab*; así, pues, con sus elementos se podrá formar proporción y darán $AC : Cb' :: a'C : BC$, de donde $AC \times BC = Cb' \times a'C = \overline{CC'}^2$ cuya última relación demuestra que la ordenada rebatida en CC', pertenece al círculo vertical, descrito sobre AB como á diámetro; ahora bien, tenemos con ello que el plano vertical levantado por AB corta á la esfera según un círculo menor, en el cual el punto C, que está en el cono, se encuen-

tra también en él, y por lo tanto en la esfera, luego inferimos que el punto C está en el cono y en la esfera, y por lo mismo forma parte de su intersección, y como lo mismo reproduciríamos para otro punto cualquiera, de ahí se infiere que la curva de salida AB será circular, proyectándose según la traza (sobre el plano de operaciones escogido) de su plano, el cual se encuentra perpendicular al plano conducido por el centro de la esfera por el vértice del cono, y perpendicular á la curva de entrada.

Si bien recordamos, veremos que el círculo obtenido últimamente en AB, es precisamente la sección del cono llamada antiparalela, cuando dicho cono es como en este caso circular, pues cumple el requisito indispensable de ser perpendicular al plano principal, cuyo es el que pasa por el vértice, V y por el centro C de la base circular, y es además perpendicular á dicha base; que es precisamente el plano que hemos llamado de operaciones.

Además, en la sección antiparalela, ésta forma sobre el plano principal un triángulo AVB semejante pero no paralelo al *a*V*b*, cuyo requisito tambien queda cumplido, pues acabamos de ver la igualdad de los ángulos V*ab*, VBA.

128. *(c)* **Bóveda esférica con lucernario.**—La determinación de la sombra en una bóveda esférica, abierta por la parte superior para dejar paso á la luz, es un estudio importantísimo que no puede dejarse de ver por la frecuencia con que suelen aparecer en los dibujos de arquitectura, en donde precisa dar un corte en el sentido transversal ó longitudinal, según sea, en el alzada de un edificio, en donde figura una bóveda de semejante naturaleza.

Mas aquí en este nuestro caso para que el estudio sea más completo, supondremos en la planta, que la bóveda sea vista por la parte exterior, mientras que en el alzado ó corte, la vista será en el interior de la bóveda; sea, pues, con ello la figura 118, en donde OO′ es el centro de la esfera interior, cuyo meridiano principal L′T′ se proyecta en verdadera magnitud en corte, según ABCD, aunque interrumpido en la parte superior, para dar lugar á la abertura BC antes indicada, cual la constituye un cilindro recto de base, la circunferencia B′B_1C′, cuya altura la disigna las dos generatrices de corte BB″, CC″.

En cuanto á la esfera exterior, ésta tiene su centro ω-O′, algo más bajo que el de la esfera de intrados, al objeto de que su meridiano ν′μ permita dar más grueso á la bóveda hacia la parte de arranque, con preferencia á la parte culminante, todo con el objeto de aumentar la resistencia de la construcción, este también es el motivo, por el que se introduce el plano horizontal *lv*′ limitado exteriormente por el cilindro vertical, engendrado por la revolución de la generatriz *l*L, y finalmente, μμ′ es la generatriz que al girar alrededor del eje de la bóveda, engendra el cilindro del lucernario.

Pasemos ahora á buscar la sombra que se producen en la bóveda dada con semejante disposición, y siendo $R^v R^h$ la dirección del rayo luminoso, empezando por la parte de intrados, ó sea el corte. En primer lugar, fijémonos en el cilindro del lucernario en donde el rayo luminoso, rasa por el círculo horizontal superior en el trecho que media desde B′ hasta I, y al rasar lo hace de tal modo, que para cada punto de entrada en el cilindro, tales como B′, H′... etc., le corresponde otro punto de salida B_1, H″... cuyos son la sombra arrojada respectivos de los primeros sobre el mismo cilindro, cuales proyectadas en alzada sobre las proyecciones respectivas de los rayos luminosos que les concierne vendrán á colocarse en B^v, H‴, y, finalmente hasta llegar al punto I′ que corresponde al I de la proyección horizontal, y en donde el rayo luminoso de secante se ha convertido en tangente al cilindro, puesto que en él, los puntos de entrada y salida se confunden en uno sólo; en resumen, la curva I′H‴B^v es la sombra arrojada sobre el cilindro interior del lucernario, del arco circular horizontal IH′B.

El rayo luminoso, partiendo luego de B″, recorre la generatriz de corte B″B; engendra así un plano vertical, cuyo, corta al intrados del lucernario según la recta B^v*d*″, y eso indica ser esta la sombra arrojada del trecho de generatriz B″D; así es, que el rayo luminoso al llegar á la posición última D*d*″, continua su camino en el espacio hasta el momento en que se detiene, al encontrar la esfera de intrados en el punto *d*′, y en este estado se comprende fácilmente, que el resto del plano de sombra cuya directriz es la vertical DB, cortará á la esfera, según un arco de círculo, el cual vendrá proyectado verticalmente en la línea elíptica, *d*′β′*b*‴, y en proyección horizontal por la simple recta d_1b'', trazada en dirección del rayo luminoso, y partiendo del punto B′. Un punto

cualquiera de esta curva tal como por ejemplo el dd_1, se encontrará del siguiente modo; el plano vertical B'b conducido por B' en dirección paralela á la luz, corta á la esfera según un círculo mínimo, el cual se proyectará en verdadera magnitud escogiendo un nuevo plano de proyección vertical L''T'' paralelo al rayo de luz, este círculo es el de centro O'' y de radio O''b' (b' es la proyección vertical del punto b, donde el ecuador es cortado por el plano secante antedicho). Mas en este nuevo plano de proyección, el rayo viene referido en R', debido á un simple cambio de plano vertical hecho con respecto al rayo luminoso que parte del punto X-X', según es de ver en las construcciones indicadas en la lámina. También la vertical B'''B$^{\text{IV}}$ es la nueva proyección de la generatriz BB'', y en ella figura el punto D', que es referencia del punto D primitivo, y claro está que de este D' parte ahora el rayo luminoso paralelo á R', cuyo prolongado suficientemente corta á la sección circular en el punto d; éste es, pues, el punto de sombra sobre la esfera que obedece al punto originario D'; ahora d se proyecta horizontalmente en d_1, y de éste por un cambio de plano en d' sobre la proyección vertical del rayo luminoso que le corresponde. Lo dicho para d' lo repetiríamos ahora para β' y b''' como consta en las operaciones

A partir de la posición Bb''' el rayo resbala por el meridiano BEXQA, describiendo un cilindro circular, el cual cortará al intrados de la esfera según un círculo máximo, proyectado según la elipse KMb'''E'P', pero en este último punto P', los rayos luminosos dejan de cortar la esfera, y empiezan haciéndolo con respecto al plano horizontal produciendo la curva Pπ Q'''A', la cual línea se deduce inmediatamente uniendo las trazas horizontales de los rayos luminosos; y en cuanto á la primera, si bien se considera es la misma que hemos visto al hablar del nicho esférico, y por lo tanto por medio de los ejes de la elipse que uno de ellos está inmediatamente dado por el radio OK, perpendicular á la proyección vertical del rayo luminoso se podrá determinar inmediatamente, pues además se tienen ya de hecho conocidos el punto K, límite, al b''' por una de las operaciones anteriores y luego el P' intersección de la línea del ecuador con la curva A'Q'''π, etc.

También hubiéramos podido encontrar cada uno de estos puntos por el procedimiento anterior, acudiendo al plano vertical de operaciones L''T'' como así se ha verificado, conforme es de ver en el cotejo de operaciones.

Sin embargo, esta curva elíptica se comprende que en este nuestro caso ha de encontrarse interrumpida desde b''' hasta M, en virtud del hueco del lucernario que produce también una interrupción en la bóveda. Esta es precisamente la razón, por que el rayo luminoso al partir del punto d'' puede seguir también resbalando por el arco circular d''C-B$_1$J$_1$C', y efectivamente así lo hace, y el cilindro que en conjunto constituye corta á la esfera según el arco circular, pero proyectada según la elipse d'J'M, y todos estos puntos se encontrarán valiéndonos del plano L''T'' y repitiendo operaciones análogas á las que efectuamos por el punto d'.

Podríamos aun más precisar esta curva si quisiéramos, valiéndonos de sus diámetros conjugados, para lo cual podríamos suponer utilizable como base circular del cilindro luminoso todo el círculo proyectado en BC, en cuyo caso los puntos que corresponderían á los C y B tendrían los rayos luminosos tangentes á dicha curva, de modo que así la cuerda que uniría los puntos de contacto, sería uno de los diámetros, mientras que el otro, pasaría por el centro de esta cuerda en dirección paralela á las tangentes antes mentadas, indicándonos á la vez al encontrar el círculo director, los puntos originarios á los de sombra, concernientes á los extremos de este diámetro.

Resta hablar de la sombra de la parte de extrados y esta es sumamente fácil; en primer lugar por encontrarnos con la sombra de la esfera vista en el número 118; ella es un círculo máximo que se proyecta según la elipse αPδ cuyos ejes son el uno el diámetro de la esfera O'α perpendicular al rayo luminoso; el otro O'P$_1$ proyección horizontal del radio ω'P', el cual como sabemos representa la traza vertical del plano que contiene á la curva, cuya traza vertical está dirigida perpendicularmente al rayo luminoso R', y no nos extendemos sobre la formación de esta última porque sería repetición de lo dicho en el párrafo n.° 118; únicamente si habremos de observar, que la sombra de las generatrices verticales μ_1, R del cilindro exterior produciendo sombra sobre la esfera, según dos arcos de círculo, proyectados horizontalmente en las rectas μ_1U, RV, modificarán parte de aquella sombra, cubriéndola en el trecho que media desde U á V. Por otra parte también nos fijaremos que el plano horizontal de asiento lv', limita la esfera exterior según el paralelo $\nu\gamma\lambda m$, y así claro es que el trecho de elipse de sombra propia $\alpha\gamma$ no puede aparecer en el

dibujo; más en cambio dicho plano horizontal recibe la curva de sombra arrojada $\gamma\varphi''\psi''$, cuya originaria es la $\gamma\psi'$, encontrándose aquélla fácilmente por medio de las trazas sobre el plano horizontal lv' de los distintos rayos luminosos que parten de aquellos puntos. Finalmente, la curva *mqn* es la sombra arrojada del trozo de arco S△ sobre el plano horizontal de asiento de la bóveda exterior; su determinación es fácil y queda indicada por las operaciones que constan en la lámina.

129. *(d)* **Casquete esférico.**—Es muy frecuente la aplicación de este caso en los detalles de arquitectura, por ejemplo, cuando de hallar la sombra se trata, del interior de una hornacina, que constituye un medallón de ornato en el paramento de un muro, ó también del interior de la taza de una pila de agua bendita ó pila bautismal (fig. B). Sea á este efecto un semicubo (figura 123, lám. 15), cuya base sea el cuadrado MM'N'N y cuya altura la 1-3, y en su interior la semiesfera F'CBDA en proyección horizontal, mientras que en alzado está representada por el semicírculo FEP'Q, considerándolo en un corte transversal dado por el plano vertical 1'-2' al objeto de aumentar la complicación de sombra. El rayo luminoso inclinado á 45°.

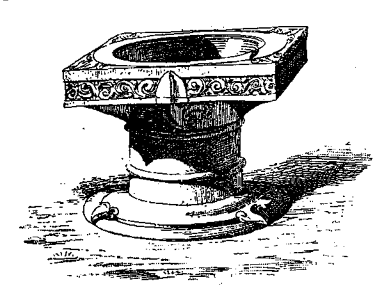


Fig. B

Proyección horizontal: La sombra será aquí en el espacio (n.° 24) un círculo máximo, pero proyectado según una elipse AC''B, cuyos ejes son muy fáciles de conocer. En efecto, el cilindro de los rayos luminosos entra en la esfera por el arco de círculo ACB, toda vez que en los puntos A y B el rayo luminoso es tangente á la esfera, y entonces los puntos de entrada y de salida se confunden en uno solo; de aquí es que siendo estos puntos diametralmente opuestos y simétricos para con respecto al radio R^h representarán en aquella dirección diametral, los más separados de la curva, esto es, que siéndolos darán la cuerda mayor de la elipse de sombra, y por lo tanto AB será el eje mayor; el menor se dirigirá,

pues, según la dirección del rayo R^h, se infiere, pues, la sombra que arroja el punto C en C'', será el más apartado de la curva, ó dicho de otro modo será de todos los puntos de la curva el que esté más separado de su punto de entrada originario, propiedad que lleva consigo de que la cuerda de la elipse que parta de C'' en la dirección de R^h sea la mayor que pueda trazarse considerando los distintos puntos de la curva, luego C''O será el eje menor.

Encontremos, pues, este punto C'' y á este objeto rebatamos el plano meridiano vertical que pasa por R^h sobre el plano de figura, y alrededor del eje CD; en este movimiento la sección circular se rebatirá en CBD, mientras que el rayo luminoso R^h, vendrá á colocarse en R', pasando por C que es fijo, y formará con R^h el ángulo ω (n.° 20-2.°); círculo y rayo, estando en un mismo plano, se cortan ahora en C', y éste es rebatido el punto buscado, el cual se traslada en C'' en su verdadera situación. Así, pues, con los ejes AB, OC'' trácese ahora la elipse de sombra.

Pero lo notable que resulta de haber empleado el rayo á 45°, es que el eje OC'' puede encontrarse inmediatamente sin pasar por rebatimiento ni operación alguna, toda vez que OC'' es igual al tercio del radio de la esfera, y así conocido el radio por el dato divídase en tres partes iguales colocando la tercera parte en OC''. En efecto, analicemos la figura y podremos deducir fácilmente que en el triángulo OC'C'' se tiene

$$OC'' = OC' \times \cos C''OC' = R \times \cos 2\omega\,{}^{*} = R \times \frac{1}{3}$$

Proyección vertical: ésta ya hemos dicho que la considerábamos como un corte hecho según 1'-2', al objeto de aumentar el estudio de las sombras, y apreciar algunos hechos que aparecen en el problema práctico.

En primer lugar, observemos, que si la circunferencia de paramento fuese completa, obtendríamos de momento su sombra en el interior de la esfera según la elipse EF''R, encontrada como en la proyección horizontal, y siendo aquí como

---

* El ángulo $DCC' = \omega$ tiene por medida la mitad del arco DC' que sus lados abrazan, pero el ángulo central DOC' tiene por medida todo al arco DC' antedicho; luego DOC, doble de DCC' tiene por medida 2ω.

Además, en el n.° 20, 2.° establecimos que $\cos \omega = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; y luego que $\cos 2\omega = \frac{1}{3}$

allí el semieje menor $O'G = \frac{1}{3}$ R; más como realmente no existe más en la embocadura, que la mitad de la circunferencia terminando ésta en F, de aquí que este punto F, será el originario que nos dará el último punto de sombra de la mencionada elipse; este punto pues, será F″, y vendrá obtenido por el encuentro del rayo luminoso de F, con el arco mentado EGR; con arreglo á ello, de la elipse en cuestión quedará tan sólo aprovechable el trecho EF″. Este punto F″, se puede si se quiere precisarlo aun más, teniendo en cuenta que $\omega F'' = \frac{\omega H}{3}$; esta relación proviene de que ER es un eje común de la elipse EGR y de la circunferencia EQR, y por lo tanto las ordenadas correspondientes á curvas que obedezcan á abscisas comunes, guardarán todas una misma relación, y como aquí esta relación es el tercio, pues que hemos visto que $O'G = \frac{1}{3} O'G'$, resulta comprobada semejante propiedad para las ordenadas ωF″ y ωH.

Sigue luego el rayo, rasando por el ecuador de la esfera en el trecho F′A,-FA′, produciendo en la sombra arrojada el arco elíptico A′F″, del cual, según hemos dicho, tenemos de momento el punto F″ cuyo originario es F, y además la tangente á la curva en este punto F″ (porque el plano tangente al cilindro oblícuo de los rayos luminosos en el punto F, á lo largo de la generatriz EF″ es perpendicular al plano vertical, y por lo tanto la tangente en cuestión se confunde con el rayo luminoso, ó lo que es lo mismo con la traza vertical del plano tangente).

Mas por otra parte, dicha curva de sombra es simplemente la proyección vertical de la obtenida en el plano horizontal en la elipse AC″B, aunque si bien restringida en el plano vertical, en razón del corte, al solo trecho A′F″; pero que para la mejor exactitud convendrá proyectarla como auxiliar, toda ella en A′C′P′B′; los puntos A y B se proyectan directamente sobre la traza vertical del plano del ecuador en A′ y B′, el punto más bajo C″ se proyecta en C′ sobre la proyección vertical del rayo que parte de A′; P se proyecta en P′ sobre el corte y allí se efectuará la tangencia aparente entre la elipse de sombra y la circunferencia de corte; el punto F″ ya hemos dicho que lo obteníamos directamente y las ventajas que de él sacábamos.

Podemos aun precisar más esta elipse con sólo tener en cuenta que O′C′ y A′B′ son respectivamente diámetros conjugados, y por lo tanto las tangentes en los puntos extremos A′, B′, serán respectivamente A′-1, B′-1, paralelas á O′C′, guardando una inclinación tal, que podrán considerarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, en que el cateto á la base, sea igual á uno y el otro cateto; el vertical, sea igual á cuatro, y así podrán trazarse estas tangentes desde luego. Para convencernos de tamaña propiedad, consultemos las relaciones que se desprenden de la figura, todo consecuencia de haber adoptado el rayo luminoso á 45°.

Anteriormente ya hemos visto que $OC' = \frac{OD}{3}$, y por lo tanto también se obtendrá $O'I = \frac{O'B'}{3} = \frac{O'A'}{3}$; así, pues, podemos inferir que si O′I es la tercera parte de O′A′, claro está que vendrá á ser la cuarta parte de A′O′ + O′I, más A′I es igual IC′, toda vez que A′C′ tiene una inclinación á 45°; luego infiérese finalmente que O′I es la cuarta parte de IC′, con lo cual resulta que la hipotenusa O′C′ del triángulo O′IC′ está inclinada de la relación de 1 por 4; luego lo mismo sucederá con las tangentes A′-1, B′-1′ á los puntos extremos del diámetro A′B′ que es respéctivamente conjugado con el O′C′.

130. *(e)* **Sección en un tubo cilíndrico terminado por una semiesfera.**—Este caso es también aplicable á la bóveda en rincón de horno, reforzada por medio de un arco toral en la unión de la bóveda esférica con el cañón seguido (lám. 15, fig. 124). XZY es el meridiano de la esfera en corte, el resalto XF′F″G es el grueso del arco de refuerzo; éste lo constituye un cilindro circular cuya altura es dicho grueso F′F″ y cuyas bases circulares se proyectan de perfil en F′φ, F″φ′; finalmente, H,-H′ son las generatrices más alta y más baja que produce el corte en el tubo cilíndrico. Las líneas exteriores UX′Z′Y′U′ manifiestan lo exterior de las paredes al ser cortadas por el plano de sección; y así dibújase el grueso de esfera y cilindro.

Apuntaremos ahora brevemente las operaciones parciales, para ir encontrando las sombras de los distintos detalles, por ser ellas repetición, de lo ya hecho en otras cuestiones en particular estudiadas.

Así, haciéndonos cargo de la fig. 124, podemos observar que si por un momento hacemos abstracción del arco de refuerzo, proyectado entre XY y GA, limitándonos á la figura que queda, veremos que en su forma, dibujo y contorno tendremos un *nicho esférico*, aunque colocado horizontalmente; más eso no importa bajo el punto de vista del problema de sombra, el cual fácilmente se comprende que ha de resolverse del mismo modo.

Así, pues, y empleándose el rayo luminoso á 45°, encuéntrese la línea divisoria de luz y sombra *abcdh*, y ello brevemente sin pasar por las operaciones de detalle y explicaciones del n.° 123. En efecto, con el rayo á 45° sabemos ya que la sombra de la esfera es la elipse $a\pi$, aunque aprovechada solamente en el trecho *ab*; esta elipse tiene por eje mayor *ao* (obedeciendo el extremo *a* del diámetro de la esfera á la tangencia del meridiano principal con el rayo de luz) y por eje menor $O\pi = \frac{aO}{3}$, (n.° 121).

El rayo luminoso que parte de X, corta á la generatriz media en el punto *d*, entonces la recta *gh*, paralela á GH, será la sombra arrojada de esta última; ahora sabiendo que la sombra del arco B'X ha de ser tangente á la elipse *ab* y á la recta *dh* (n.° 123), trácese ya de primera intención la curva *bced*, de modo que cumpla con aquel requisito, y el resultado obtenido será lo suficiente exacto para que lo admitamos ya sin ulterior operación.

Ahora, esta sombra, vendrá modificada por la que arrojará, teniendo ya en cuenta el arco de refuerzo. En primer lugar observemos, que á partir del punto *b*, el rayo luminoso yendo de B' hacia I, cortará al plano de perfil XY, y en él, arrojará su sombra; veamos el modo de encontrar, la de un punto de dicha curva, y sea la del M, su rayo luminoso, corta en *m* al plano en cuestión XY, falta sólo hacernos buen cargo de la disposición de este punto *m*. Para ello concíbase momentáneamente que se rebate el plano de perfil XY, alrededor de esta recta, hasta rebatirse en nuestro plano del papel; entonces el ecuador de la esfera, que se confundia con XY, se situará confundido ahora con el círculo máximo XZY á la par que la circunferencia concéntrica F'K''φ, será el rebatimiento de la del arco de refuerzo proyectada en F'φ; en cuanto al rayo luminoso referido á este rebatimiento, se comprende fácilmente que su dirección será la *a*O, perpendicular á la JP

admitida en la primitiva proyección (téngase en cuenta que se trata del rayo á 45°).

En este rebatimiento, el punto *m* ha girado perpendicularmente á la charnela, y se ha colocado en un punto de la *m*M'', pero el rayo M*m*, proyectado en XY es M'*m*, y una vez efectuado el movimiento de giro vendrá á colocarse en la dirección paralela á *a*O, partiendo de M' que es fijo; luego la intersección de esta recta ó rayo luminoso rebatido con la horizontal que parte de *m*, dará el punto M''. Obsérvese ahora que M'' se hubiera encontrado del mismo modo por el cruce de la horizontal *m*M'', con la vertical MM'', pues MM''*m*M' forma un cuadrado, por ser inclinadas á 45° sus diagonales. Repitiendo esta operación para tantos puntos como se quieran, llegaremos á obtener la curva XK''QM''B.

De esta curva encontrada, queda ahora tan sólo aprovechable los trechos B*i*', K''X, comprendidos en el círculo que forma la base del cilindro del refuerzo; en cuanto á la parte B*i*', colocada en su debida posición, se colocará en *bi*, punto *i* que obedece al originario I, pues á partir del rayo luminoso I*i*, la sombra del trecho siguiente ID cae arrojada sobre el cilindro cóncavo del arco de refuerzo en la curva *ij*. Veamos de encontrar un punto de esta curva, y sea por ejemplo la sombra arrojada del punto originario L', sobre el intrados cilíndrico del refuerzo. Este punto se proyecta en L en la charnela que vamos hacer servir como anteriormente para análogo rabatimiento que allí; el intrados del cilindro del refuerzo se rebate en la circunferencia F'K''φ; ahora el rayo luminoso rebatido es LL'', puesto que L, es inmóvil en el giro, y así la intersección L'' del rayo con la mentada circusferencia, nos da en el rebatimiento el punto de sombra que, trasladado hacia su verdadera posición, irá á establecerse en *l*; así podríamos, ir encontrando puntos, y de la curva que obtendríamos sólo se aprovecharía el trecho *ij*, que interesa al arco de refuerzo; así, pues, al llegar el rayo luminoso en *j*, prosigue su movimiento en el espacio y corta en *c* al cilindro del tubo, siguiendo luego la sombra antes encontrada en el trecho *ce*.

Pero al llegar el rayo en el punto E, pasa al mismo tiempo por el punto K, así es que, desde E á X todas las posiciones que toma el rayo luminoso, corta al plano de perfil XY, produciendo sobre este, la sombra arrojada de dicho trecho EX, proyectado según XK pero rebatida según la curva XK'',

que ya más antes se ha encontrado; de este modo queda un pequeño trecho de arco proyectado según KF′, rebatido en K″F′, el cual sirve de directriz al rayo luminoso, arrojando sombra sobre el cilindro interior del tubo, en la extensión que muestra la línea *ef*. En esta curva el punto de partida *e* ya anteriormente lo hemos encontrado, en cuanto al punto *f*, sombra de F′, esta se hallará al encontrar el rayo luminoso que parte de F′ á la semicircunferencia F″*f*φ, y si quisiéramos un punto intermedio entre *e* y *f*, bastaría escoger el punto originario, entre K y F′ trazar por él hacia la izquierda un rayo rebatido y hacia la derecha un rayo directo, el primero cortaría á la semicircunferencia XZY en un punto, y este traslado por medio de una línea horizontal, en el rayo directo daría el punto definitivo.

Sigue luego el rayo, rasando por la horizontal F′F″, y nos da en su sombra arrojada la *ff′* horizontal; ahora, á partir de F″ el rayo sube por la vertical de corte F″G, y con ello engendra un plano vertical de sombra, al cual produce la sombra arrojada en el cilindro del tubo en el arco de círculo *gf′*, que forma parte de la semicircunferencia G*gf′*A. Esta circunferencia sería precisamente la sombra arrojada sobre el mencionado cilindro, de todo el diámetro vertical GA, en el caso de que no hubiera ninguna interrupción desde F″ á φ′ y es que en este caso, como todo el plano de sombra que rasaría por la recta entera y vertical GA, está inclinado de 45° para con respecto al plano de proyección vertical; aquel, si bien corta al cilindro según una elipse; sin embargo, esta se proyecta según un círculo, en razón de que la sombra de G, proyectándose en *g*, los catetos Gω, *g*ω del triángulo rectángulo Gω*g* son iguales, y por lo tanto, representando ellos los diámetros de la elipse de sombra, ella degenerará en un círculo en dicha proyección; así, pues, de este círculo se conservarán no más los pequeños segmentos *gf′*, que como hemos dicho es correspondiente á la sombra arrojada GF″, y luego la parte AC, sombra arrojada de Aφ′.

Termina ahora la parte superior de sombra por la línea *gh*, sombra arrojada de la generatriz GH.

Mas falta aún á determinar la sombra arrojada C*c* del arco circular proyectado, según la recta F″φ′, sobre el cilindro del cañón ó tubo, como se quiera. De momento, el punto C ya es el origen de esta curva, puesto que obedece á la sombra arrojada del punto de arranque φ′, mas para otro

punto cualquiera como *n′*, obraremos del siguiente modo, condúzcase por *n′* un rayo luminoso, búsquese la intersección N′ con el cilindro, y para encontrarlo fácilmente echaremos mano de la sección recta del propio cilindro. Para ello, imaginemos que el plano de operaciones, cual se escoge el GA se traslada en XY, y luego se rebate junto con el arco del anillo y con la sección recta aludida, sobre el plano de figura alrededor de la charnela XY; con ello, el arco del anillo se situará en la semicircunferencia F′K″φ, mientras que la sección recta del cilindro mayor vendrá confundida con el semicírculo XZY.

No será difícil también de ver que el rayo luminoso ya referido, á la par que rebatido en este plano auxiliar, tomará una dirección tal como la *a*O, también á 45°, pero opuesta ó en sentido perpendicular del rayo luminoso del dato. Mediante semejantes operaciones, veremos ahora que el punto *n′* se rebate en *n*, por él pasa un rayo luminoso *n*N, éste corta en N á la sección recta del cilindro, y por lo tanto, él es el punto que buscamos, el cual puede referirse en seguida en su sitio N′. Así, pues, repitiendo esta operación tantas cuantas veces se desee, llegaremos á obtener la curva CN′*c*, advirtiendo que el último punto *c* se tenía por el rayo luminoso que pasaba por J y cortaba á la curva ya encontrada *bce*.

131. *(f)* **Otro ejemplo análogo**—En este caso (fig. 225), el arco de refuerzo precede á la esfera arrojando sombra sobre ella, lo cual complica algún tanto la cuestión.

1.° Determínese en primer lugar la sombra β*c*, del intrados del arco, valiéndonos de sus tangentes en los puntos extremos β, *c*, cuyas tangentes βγ, B*z*, se determinarán, conforme expresamos en el (n.° 79), al hablar de la sombra del cañón seguido.

2.° Hállese luego la sombra *bh* del intrados de la esfera, ella sabemos por el (n.° 121), que se proyecta según una elipse cuyos semiejes, el mayor O*b*, en dirección perpendicular al rayo; é igual al radio de la esfera, y el menor $Od = \frac{1}{3} Ob$, de esta elipse se reservará tan solo el trecho *bh*, siendo el punto *h*, originado por el rayo luminoso que parte del punto C.

3.° Luego la sombra de la vertical CA, será el arco elíptico *h*θ, para encontrarlo, supongamos que exista sin interrup-

ción la vertical C*e*, diámetro del meridiano de la esfera; tratando luego de encontrar su sombra arrojada sobre dicha superficie; al efecto, observemos que los rayos que resbalen por esta recta, forman un plano de sombra vertical é inclinado á 45°, para con respecto al plano homónimo de proyección, entonces este plano cortará á la esfera, según un círculo máximo, partiendo de los extremos C y *e*, que unidos constituyen el diámetro, más en virtud de la disposición del plano de sombra, este cortará al plano horizontal que pasa por O, según una horizontal inclinada, á 45°, y que si rebatimos en el plano de figura tomando como á charnela la mencionada horizontal que pasa por O, ella vendrá á tomar la disposición *ob*, cual corta al ecuador, también rebatido y confundido con CL*e*, en el punto *b*, que colocado á su debida posición, irá á colocarse en *b'*; O*b'*, será pues, el eje menor de la elipse en cuestión. De lo expuesto se deduce, que como ya anteriormente habíamos encontrado el punto *b* al trazar la curva *bd*; bastará, por lo tanto, referir el punto *b* en *b'*, sobre la horizontal OO' prolongada, y tendremos así, de momento, el eje menor de esta elipse C*b'e*, de la cual se aprovechará tan solo el trecho *h*θ, limitado en el punto θ, por el rayo luminoso que parte del punto A.

4.° El rayo luminoso rasa por la horizontal BA, engendrando un plano, el cual corta á la esfera según la línea circular, pero proyectada según el arco de elipse θ*i*. Para encontrarla, observemos ante todo, que dicho plano que pasa por la AB, es paralelo á la disposición análoga del que sitúa paralelo á la línea de tierra, y además está inclinado á 45°, para con respecto á los dos planos de proyección. Así es, que si por un momento recurrimos al plano de perfil C*e* y lo rebatimos sobre el plano de figura alrededor de la recta C*e* (diámetro de la sección circular que produce el plano de perfil) como á charnela, tendremos que la sección ó meridiano principal C*e* se rebatirá, confundiéndose con el semicírculo CQ*e*, el punto A representará la proyección de la recta AB sobre el plano de perfil rebatido, y por último, conduciendo por A la recta AL inclinada á 45°, ella será rebatida; la traza del plano de sombra sobre dicho plano de perfil. Ahora bien, en semejante disposición se descubre en seguida que la parte comprendida de traza L"L, en el segmento circular L"QL, en la proyección del círculo, producido por el corte á la esfera por el mencionado plano de sombra,

de modo, que tomando la mitad *m* de esta recta y refiriéndolo en *k* para trazar por él la *kj*, ella será en proyección el eje mayor de la elipse, cuya magnitud *kj* será, como es evidente de por sí, igual á *m*L', igual á la mitad del diámetro total L"L; en cuanto al eje menor *k*L', se obtendrá proyectando el punto extremo L en L'; trácese pues la elipse L', *y*, valiéndonos de dichos dos ejes, teniendo en cuenta de que si la completáramos, esta curva pasaría por el punto A', siendo tangente al arco circular CL*e*; el punto A' es, como indica la figura, la intersección con la esfera de la recta BA suficientemente prolongada. De ello se desprende que la elipse encontrada, será la sombra sobre la esfera de su cuerda BA' y de ella, habremos no más de conservar el pequeño trecho que concierne á la BA cual es la *i*θ.

5.° Apoyándose luego el rayo sobre el arco anterior B*o'* en el trecho B*v* (el punto *v* está definido por el rayo luminoso que pasa por el punto *c*), irá encontrando sucesivamente á la esfera, en todas las posiciones en que le consideremos en este trecho, dándonos la curva *in*, de todos modos, el punto de partida se tiene, en el encontrado en *i*, para otro cualquiera, nos conduciremos del siguiente modo; escójase, por ejemplo, una generatriz tal como β*p* del cilindro de refuerzo, búsquese de ella su sombra sobre el intrados de la esfera, conduciéndonos para ello lo mismo que hemos hecho para con la recta AB, únicamente que aquí, como la proyección β*p* sobre el plano de perfil, no está en la misma charnela como sucedía con A en la recta AB, tendremos necesidad de dibujar en el rebatimiento el arco AG*f*, que constituye la sección recta del cilindro del refuerzo. Mas ya en esta disposición la generatriz β*p*, viene á proyectarse en el rebatimiento según el punto *p'*, y por él, partirá la traza QQ' del plano de sombra, proyectándose según ella todo el círculo de sección. La horizontal *pp'*=*p'*Q trazada desde *p'*, dará el eje mayor de la elipse, mientras que la proyección de Q en *q* dará en *qp* el eje menor; ahora esta elipse, viniendo á ser cortada por el rayo luminoso que parte del punto β, dará en γ, la sombra de dicho punto β; y como igual operación reproduciríamos para otro cualquier punto escogido en el arco proyectado según la recta BO', se inferirá de aquí que uniendo dichos puntos llegaremos á obtener la curva *rni*, de la cual aprovecharemos tan solo el trecho *ni*, dado el punto último *n*, por el rayo que parte de *c* y de *v*.

6.° Sombra del arco que se proyecta según cf sobre el intrados de la esfera, dando por resultado la línea de sombra arrojada $ng'f'$.

El procedimiento para encontrarlo es idéntico á los expuestos para las líneas anteriores ni, $i\theta$; así, sea encontrar la sombra del punto g; hagamos pasar por él la generatriz gg, del cilindro del refuerzo, hállese la sombra de la horizontal g, g_1, prolongada sobre lo interno de la esfera; á este efecto, hagamos el rebatimiento, análogamente á los efectuados últimamente con él, gg_1, se colocará proyectada en el punto G, por el cual pasará de canto el plano de sombra HH', de él inferiremos los ejes de la elipse $H_1g'J$ que una vez trazada vendrá cortada por el rayo que parte de g, dándonos el punto de sombra g'; repítase análoga operación para otros puntos. Obsérvese, sin embargo, que el f' se obtiene directamente por la intersección del rayo que parte de f con la elipse eQC, sombra á su vez de la recta Ce charnela de los rebatimientos; además también se obtiene sin ulterior construcción el punto n situado sobre la curva vi, pues ya se ha dicho que en dicho punto el rayo rasa en v sobre el arco exterior, y en c del arco interior.

132. *(g)* **Interno de una bóveda vaida** (fig. 2?6).—Es la bóveda vaída el resto de la semiesfera cuando se la corta por cuatro planos verticales, cuyas trazas horizontales forman un cuadrado inscrito en el ecuador de la misma. Así en la figura 126' la circunferencia ABDC representa el ecuador, y se le inscribe el cuadrado ACDB, levantando por cada uno de los lados AC, CD, DB, BA un plano vertical, cada uno de ellos cortará á la esfera según un círculo mínimo, todos cuatro iguales, proyectándose dos de ellos de frente A'XB' (figura 126) y los otros dos de perfil, uno en A'b y el otro simétrico en B'f, haciendo abstracción de estos cuatro segmentos esféricos, lo que queda de la bóveda es la que se denomina *vaida*. Ahora el interno de estos cortes puede dejarse completamente hueco, formando un arco circular, que permita el paso ó acceso en lo interno del recinto cubierto por la bóveda, pero en este caso se refuerzan estos arcos dándoles bastante grueso, tal como indican los resaltos $2'A_1A$ situados iguales en cada uno de los arranques, y esta es la disposición adoptada en nuestra figura para uno de los arcos de frente y en los dos laterales, mientras que otras veces, conforme se vé

en el segundo arco de frente, se deja subsistir el plano que ha efectuado el corte, y entonces está terminado ó cerrado el arco por un muro; es el que se llama muro formero.

La fig. 126 es un corte dado á la bóveda por la línea LT de la planta, concluyendo dicha figura de dar idea completa de todos los detalles pertinentes al dato. Ahora lo que nos vamos á proponer es en primer lugar determinar la sombra en el corte, y segundo, independiente de ella, determinar la sombra en la planta suponiendo que el observador, situado á una distancia infinita sobre el plano horizontal, vé á la bóveda invertida, esto es, como si ella descansara en el plano horizontal por el punto de tangencia Z, el más alto; hablando vulgarmente, la bóveda para esta sombra la consideraremos boca arriba. El rayo que se emplea es como en los casos anteriores, el especial de 45°, con el cual, y teniendo en consideración los antecedentes que ya tenemos relativos á algunas cuestiones vistas hasta aquí y que constituyen detalles cuando se trata como aquí de problema de conjunto, nos permitirá tan sólo apuntar las operaciones, resolución la más rápida posible y procedimientos expeditos.

1.° Sombras en el corte (fig. 126). En él encontramos en primer lugar los arcos torales, y éstos los podemos considerar cada uno como un cañón seguido de poco grueso; por lo tanto, tratando su sombra conforme vimos en el (n.° 79), se encontrarán las curvas GH, G'H', teniendo el primero las operaciones indicadas para las tangentes en sus puntos extremos.

Luego descubrimos la sombra interna de la esfera en la curva fe'; encuéntrese, pues, conforme al (n.° 121) por medio de la elipse $fe'g$, cuyos semiejes son: O'f radio de la esfera, y el semieje menor $O'g = \frac{1}{3}$ O'f, aprovechando luego de dicha curva el trecho que media desde s á e', en donde ya no hay esfera, y empieza el paramento del toral.

Para con respecto al arco toral de la izquierda, él arroja sombra sobre el plano del formero, y así nos encontramos exactamente en las mismas condiciones que en el problema del párrafo (n.° 82) al hablar de la sombra de una arcada en corte sobre un plano vertical; aplíquese, pues, lo allí expuesto y se obtendrán dos elipses de las cuales se aprovecharán no más que los trechos φh, $h1'$; además aparecerá, según ya indicamos la horizontal $1'a'$ y la vertical $a'b'$, sombras

arrojadas respectivas; la primera de 1 A″ y la segunda de A″*b*.

A partir del punto *b*, el rayo rasa por el meridiano principal y de corte de la esfera, más éste siendo paralelo al plano del formero su sombra se arrojará en él según otro círculo igual asimismo; encontraremos, pues, la sombra del centro (n.º 20-2.º) en O‴, y echando mano del mismo radio trácese la circunferencia *b′c′*; más á partir de *c′* la sombra cae sobre el paramento del arco toral, cuyo está más saliente que el paramento del formero; encuéntrese, pues, para este plano la sombra del centro O″, y siempre empleando el mismo radio de la esfera descríbase el trecho de arco circular *d′e′*, teniendo en cuenta que el punto *e′* ha de coincidir con el último encontrado de la curva de sombra de la esfera.

2.º **Sombras en la planta.**—En primer lugar observaremos, que al adoptar el rayo á 45°, resulta ya desde luego, que la sombra en la planta, ha de ser simétrica para con respecto á la diagonal CB, que vendrá á constituir un verdadero eje de simetría, y por lo tanto, dibujándola solamente de un lado será bastante para que podamos en seguida trasladarla hacia al otro.

Para los arcos torales encuéntrese sus sombras JK, J′K′, J″K″, conforme al (n.º 79), pues son sombras de cañones seguidos de grueso reducido.

Concibamos ahora, que el rayo luminoso empiece resbalando por la recta CL, el plano de sombra que se formará, cortará á la esfera según un arco elíptico C′L′, el cual formará parte de la elipse que pasa por los puntos D, Y′ y C′. En efecto, se supone por un momento que la recta ó cuerda CD no se halla interrumpida como lo está realmente en el espacio en el trecho que media desde L á V; en este caso los puntos extremos C y D claro es que situados también en el borde de la esfera su sombra arrojada estará en la que concierna á la de la esfera, y entonces sabemos (n.º 129) que partirá del punto D, situado en la tangencia del rayo á 45°, mientras que por otra el punto más lejano de la sombra lo daría el C en C′, siendo OC′ el semieje menor de la elipse de sombra, y tal que $OC' = \frac{1}{3}$ OC.

Por otra parte, la sombra arrojada del punto medio de la cuerda Y vendrá en Y′, toda vez que el rayo de sombra que parte de Y es en proyección horizontal la diagonal del cuadrado cuyos lados son Y′D, Y′D, de modo que el rayo del espacio, viene á cortar á la esfera, precisamente en el punto culminante, del arco de paramento interior del toral, punto que es límite de la esfera en semejante sitio, pero que en proyección se proyecta en Y′ en el eje transversal de la bóveda. Semejante propiedad puede comprobarse en el corte, trazando dicho rayo de sombra por el punto O′ (proyección vertical de Y), y viendo como ésta cortará en *f* á la bóveda; punto *f*, que se encuentra al mismo nivel de X.

Cuando el rayo luminoso rasa por la arista ML, engendra un plano de sombra perpendicular al plano vertical, que se levanta sobre el eje F′Y′, si suponemos, pues, momentáneamente que este plano se rebate alrededor de dicho eje y hacia la parte inferior, tendremos que la sección meridiana que pasa por F′Y′ se rebatirá confundida con la circunferencia del ecuador F′CDBA, al paso que toda la recta ML, considerada indefinida, se proyectará según el punto π, mientras que el indicado plano de sombra vendrá expresado en la recta $\pi\delta$ que parte de π, é inclinada de 45° para con respecto á F′Y′, ésta será, pues, la traza del plano de sombra, y todo lo en el contenido se proyectará en dicha traza; ahora bien, el punto δ, donde dicha recta corta al meridiano rebatido será el más bajo de la curva, por lo cual la tangente á ella será horizontal; así es que colocando estos elementos en su debido lugar, el punto δ vendrá en N, y en él, atención hecha á la disposición convenida de la planta general, la tangente será vertical; así, pues, de la curva que buscamos, tenemos el punto de partida L′ y á más el punto N con la tangente á la misma, tenemos, pues, datos bastantes para trazar el trecho de elipse L′N, aunque ahora se limitará en el punto M′, proporcionado por el encuentro de la misma con el rayo que parte de punto M; aprovechándose con ello únicamente el pequeño trecho L′M′.

Ahora el rayo recorre todo el trecho de arco que media desde M á P, por cuyo último punto pasa el rayo del punto K, toda vez que P arroja sombra sobre K; pero no por esto deja de proseguir su marcha en el espacio, así se engendra un nuevo cilindro paralelo á los rayos luminosos, el cual, cortando á la esfera según la curva M′P′τ... etc., nos dará la sombra arrojada M′P′ del arco proyectado según la recta MP; veamos el modo de determinar un punto cualquiera de dicha línea, que lo que hagamos con él se podrá repetir para

los demás. Sea al efecto el punto originario el mismo P, que produce en primer lugar el K; hágase pasar por él un plano secante vertical, paralelo á la dirección de la luz; este plano cortará á la esfera según un círculo, que rebatido será el UF'F'''R; además el punto K rebatido vendrá en el S' á una distancia de la charnela, KS' igual á la altura del punto S á la línea de arranque que pasa por A'B' en el alzado (fig. 126); ahora el rayo R' referido en este rebatimiento (recuérdese que este rayo R' se encontrará con arreglo al ángulo ω del párrafo número 20-2.°) cortará á la circunferencia rebatida en el punto T, el cual llevado á su sitio, deshaciendo el giro vendrá definitivamente en el punto P' buscado. La curva ha de partir del punto M' y con otros encontrados por el mismo procedimiento, obtendremos definitivamente la curva en cuestión.

Del propio modo ahora encontraremos la otra curva L'P'μ, sombra arrojada del arco, proyectado horizontalmente en LV, aunque aprovechando tan sólo el trecho P'μ, sombra arrojada del arco originario KV.

El límite de estas dos curvas de sombra arrojadas será el punto P', común á ambas, pues ya se ha indicado que el rayo de sombra en este punto se apoya sobre los dos arcos originarios; el uno en el punto P, y el otro en el K.

133. Elipsoide de revolución inclinado en el espacio de un modo cualquiera.—Viene aquí el elipsoide dado por su eje mayor *ab-a'b'*, y por el radio del ecuador *r* (fig. 127, lámina 16); y lo que procede ante todo es la representación en proyecciones de sus contornos aparentes, ya en el plano vertical, ya en el horizontal; veamos, pues, el primero, teniendo en cuenta que la base fundamental de semejante operación, así como todas las ulteriores que van á seguir, es precisamente el teorema del n.° 116, el cual hay necesidad de ponerlo en práctica.

En efecto, la proyección vertical del elipsoide, es precisamente el contorno aparente formado por la línea de contacto de dicha superficie con un cilindro perpendicular al plano vertical. Concibamos, pues, formado este cilindro, y cortémosle así como al elipsoide envuelto por él, por un plano L'T' perpendicular al plano de proyección vertical. Hecho esto, rebatamos el plano sector con las secciones por él producidas á las dos superficies, sobre el plano de proyección vertical, es-

cogiendo por eje del rebatimiento, la misma traza L'T'; de este modo, el corte con el elipsoide, será una elipse *a''e''b''f''*, cuyos ejes *a''b''*, *e''f''* será el primero la verdadera magnitud del dado en el espacio, mientras que el otro será igual al dado $2r$; esta operación como se comprende equivale á un simple cambio de plano horizontal, pasando de la LT á la L'T'; en cuanto al corte del cilindro circunscrito, se compondrá de dos generatrices tangentes por necesidad á la elipse últimamente referida, y por tanto estas generatrices se acusarán en el rebatimiento en cuestión por las tangentes *c''c*, *d''d* á la elipse Σ que á la vez sean perpendiculares á L'T'; si ahora, pues, unimos los puntos de tangencia resultará la recta *c''d''*, cual con evidencia representará todo el plano de la curva de contacto, á la vez que ella misma confundida con dicha traza, no habrá más, pues con ello, que trasladarla en su verdadero sitio, cual es la elipse Σ', cuyos ejes serán *cd* proyección de *c'd''*, y *fe*, $= 2r$ que proviene del mismo dato; tenemos luego la proyección vertical de nuestro elipsoide en la elipse Σ' ó sea la *cedf*, y con ella se ha cumplido el teorema del n.° 116, puesto que un plano *c''d''* es verdaderamente diametral conjugado con la dirección O'O'' de las proyectantes ó generatrices de contacto del cilindro circunscrito á la superficie y perpendicular al plano vertical.

Se comprende ahora que idénticas consideraciones nos darán la proyección horizontal Σ'' del elipsoide, escogiendo un nuevo plano vertical L''T'', sobre el cual rebatiremos el eje, el cual vendrá en su verdadera magnitud en *a'''b'''*, y él, junto con el $e'''f''' = 2r$ trazado perpendicularmente en un punto medio darán la elipse de sección del elipsoide con el nuevo plano vertical L''T'', ésta será, pues, la *a'''e'''b'''f'''*; ahora la dirección de las proyectantes verticales, es la que indica la O''O, luego las tangentes á la elipse E'', paralelas á O''O, darán los puntos de tangencia *g-g'*, *h-h'* es pues la recta *g'-h'*, que representa la traza vertical del plano de la curva del elipsoide con el cilindro circunscrito, y cuya dirección es la de las verticales proyectantes; cumple también con ello las condiciones del teorema aludido; colóquese ahora la sección E'' en su sitio sobre el plano vertical que se levanta sobre L''T'', y entonces *g'* vendrá en *g*, *h'* en *h*, y luego con la $e''f'' = 2r$ podremos ya trazar la elipse *gf''he''*, que para abreviar llamaremos Σ'', y será definitivamente la proyección horizontal del elipsoide del espacio.

Conocidas ya las proyecciones de esta superficie, supongamos que se nos da el rayo luminoso en $R^v \cdot R^h$, y con él, propongámonos determinar la sombra de la misma.

Nos valdremos para ello del método originado de las propiedades de que gozan las superficies de su género, esta es la misma que hemos puesto en práctica al determinar últimamente las proyecciones, esto es la enunciada en el teorema (n.° 116), únicamente que para dichas proyecciones la dirección del cilindro de contacto, era respectivamente paralelo á la que tenían las proyectantes, cuyas aparecían perpendiculares al plano vertical, ó al plano horizontal, según se tratara de la proyección sobre uno ú otro plano de proyección, mientras que aquí, dicha dirección será paralela á la que tengan los rayos luminosos.

Mas para ello será preciso que coloquemos tanto al elipsoide, como al rayo luminoso $R^v R^h$, en tales condiciones, para poder trazar inmediatamente el plano diametral de la curva de contacto, de modo que sea conjugado con la dirección del rayo luminoso. Nada más fácil que lograrlo, recordando tan solo la simple propiedad de que goza un plano cuando es perpendicular á uno de los de proyección, como por ejemplo al vertical, pues entónces, proyectándose todo el de canto por su traza vertical, y si á la vez tenemos dispuesto el rayo luminoso paralelo á dicho plano vertical, claro está, entonces, que la simple resolución geométrica bastará para trazar inmediatamente un diámetro de la elipse de la proyección, que sea conjugado con la dirección de la luz.

Coloquemos pues, al elipsoide, en las condiciones más fáciles de proyección, cual es el de que su eje mayor sea perpendicular al plano horizontal; por ejemplo, porque en este caso, su proyección sobre dicho plano quedará reducida á un círculo, esto es, el ecuador.

A este efecto, dos cambios de plano nos bastarán, uno para que este eje mayor sea paralelo al plano vertical, y otro de simple plano horizontal para que éste venga perpendicular á dicho eje. El primer cambio lo tenemos ya resuelto, pues la nueva proyección vertical del elipsoide es la elipse E'', obtenida al tratar de averiguar la proyección horizontal de la superficie. En cuanto á la nueva proyección del rayo luminoso en este plano vertical, es el R', cuyo se ha logrado escogiendo un punto i-i' en las proyecciones primitivas, y cambiando de plano vertical de este punto el cual ha venido

en i'', y como que adrede para facilitar operaciones, el rayo se ha hecho pasar por el centro del elipsoide, uniendo O'' con i'' se ha obtenido la dirección de R'.

El segundo cambio ó sea el de plano horizontal, se ha verificado escogiendo una línea de tierra $L'''T'''$ perpendicular á la proyección vertical del eje mayor de la superficie, y escogiendo en seguida, un punto cualquiera tal como O^{IV} en la prolongación de este eje (que aquí para evitar distancias incómodas, se ha escogido la intersección del eje con la línea de tierra), se toma este punto como centro de una circunferencia cuyo radio sea el del ecuador, y ésta obtenida, dará en E''' la proyección horizontal del elipsoide. En esta proyección el rayo luminoso vendrá en R'', haciendo servir el mismo punto i''-i', cuyo cambiado, estará en i'''.

Finalmente, cambíase nuevamente de plano de proyección de modo que venga á ser paralelo al rayo luminoso. Para ello cójase una nueva línea de tierra $L^{IV}T^{IV}$ paralela á la proyección horizontal del rayo luminoso (aquí, para mayor brevedad, dicha línea de tierra se confunde con la proyección horizontal del rayo); el punto $i''i'''$ se situará en i^{IV}, y con el tendremos fijado definitivamente el nuevo rayo luminoso en R'''.

Los datos así dispuestos, puede ya resolverse directamente el problema, pues en virtud del paralelismo de que goza el rayo luminoso, será evidente que al trazar las tangentes á la elipse E^{IV} que sean respectivamente paralelas al rayo R''' nos darán los puntos de contacto *m* y *n*, y ellos unidos el diámetro *mn* verdaderamente conjugado á la dirección de la luz, siendo á la vez la traza vertical del plano de la curva de contacto, de un cilindro circunscrito al elipsoide E^{IV}, cuyas generatrices son paralelas al rayo luminoso, es pues la línea de sombra que buscábamos, finalizando aquí la resolución del problema; en cuanto se refiere á medios de investigación.

Falta solamente trasladar esta curva sobre los primitivos planos de proyección, lo cual es por cierto muy fácil, en atención á que dicha curva es una elipse, que si bien se proyecta según una recta verticalmente en *mn*, aparece, sin embargo, dicha elipse en proyección horizontal según otra elipse, cuyos ejes respectivos son *pq*, *m'n'*, los puntos *m'*, *n'* situados en el meridiano principal, son referencias correspondientes de los *m*, *n*, respectivamente más alto y más bajo de la curva, y en cuanto á los *p*, *q* situados en el ecuador, son dedu-

cidos de los que juntos se proyectan en O^v por donde pasa la intersección del ecuador con el plano de la curva de contacto.

De la línea $L^{IV}T^{IV}$ pasaremos ahora á la $L'''T'''$, la proyección horizontal queda fija; cambia tan solo la proyección vertical; y las dos rectas que eran ejes, se convierten ahora en diámetros conjugados $m''n''$, $p'g'$, con ellos se podrá trazar también la elipse que indica la figura.

De la línea $L'''T'''$ pasaremos á la $L''T''$, con ella la proyección vertical E'' queda fija, y la nueva horizontal, viene en E'; y aquí las nuevas proyecciones horizontales $m'''n'''$, $p''g''$ persisten en ser diámetros conjugados, trácese pues la elipse que por ellos pasa, y ella será en definitiva la proyección horizontal de la línea divisoria de luz y sombra.

Finalmente de la línea $L''T''$ pasaremos á la primitiva LT y en ella, al hacer el cambio de plano vertical, los diámetros conjugados, continuarán siéndolo en $m^{IV}n^{IV}$, $p'''g'''$, y construyendo con ellos la elipse, ella será la línea divisoria de luz y sombra en el plano vertical. Para la mayor exactitud de la misma, téngase en cuenta que dicha línea ha de ser tangente en los puntos 3 y 4 del contorno aparente, puntos cuales satisfacen á la tangencia de los planos tangentes á la superficie, á la vez que paralelos al rayo luminoso en proyección vertical. Igual propiedad acontecerá en el plano de proyección horizontal, teniendo en cuenta la dirección del rayo en esta proyección.

Falta solamente la sombra arrojada, la cual cae por entero en el plano horizontal, y como quiera que proviene de la intersección de este plano con un cilindro elíptico cuya base es la curva de sombra encontrada, bastará averiguar para ello, dos de sus diámetros conjugados; así los planos tangentes que pasan respectivamente por los puntos extremos del diámetro 3-4, tienen por trazas horizontales las XY, ZV, evidentemente tangentes á la curva incógnita en los puntos 3^s, 4^s.

Del propio modo 1-2, conjugado con 3-4, tienen en sus extremos 1 y 2 los planos tangentes paralelos, siendo sus trazas horizontales las paralelas, XV-YZ, cuales en sus medios 1^s 2^s responden á los rayos luminosos de 1 y 2; con ello tenemos el paralelógramo XYZV y en él inscribiendo la elipse correspondiente ésta será la sombra arrojada.

También nos hubiéramos podido valer del par de diámetros conjugados $m^s n^s$, $p^s g^s$ cuales corresponden á las de

iguales letras que nos han servido para deducir las líneas de sombra propia.

134. Elipsoide escaleno.—Luz artificial.—(Fig. 128). La elipse ACB'D representa la proyección vertical del elipsoide, al paso que su proyección horizontal la forma la otra elipse A'FBE; los tres ejes AO', OE, O'C son desiguales, por lo que dicho elipsoide tiene la denominación que indica el enunciado. Esta superficie está expuesta á los rayos luminosos convergentes del foco $S^v S^h$ y se trata de determinar la línea divisoria de luz y sombra sobre la superficie y luego la arrojada sobre los planos de proyección. Como se comprende, la resolución de la primera parte de la cuestión, queda reducida á un simple problema de geometría descriptiva, esto es, encontrar la línea de contacto de un cono circunscrito al elipsoide y cuyo vértice sea el foco luminoso, aquí como allí podríamos resolver la cuestión por medio de varios procedimientos, más el que aparece en su empleo más lógico es como siempre, el de aprovecharnos de las propiedades innatas de la superficie; pues bien, á este efecto viene á cumplir semejante requisito el teorema demostrado en el número 113; por él sabemos que esta curva de contacto ó sea línea de sombra es plana, y además también nos dice la dirección que este plano tiene, cual es el de ser paralelo al diametral conjugado con la recta que une el foco luminoso con el centro de la superficie.

Con estos antecedentes, la cuestión queda reducida en dos partes, la una es escoger un plano de proyección en donde el plano de la curva le sea perpendicular, pues así toda ella vendrá dada por una sola recta, confundida con la traza vertical del plano, y segundo, en dar la inclinación que corresponda á esta traza para que cumpla la condición de ser conjugada dentro de los límites del contorno del elipsoide, con la recta diametral que parte del foco y pasa por el centro de la superficie.

Ambas á dos operaciones facilísimas de ejecutar; en efecto, si nos hacemos cargo de la proyección horizontal y trazamos desde el foco S^h tangentes al contorno de la proyección horizontal, ellas, que serán las $S^h P$, $S^h Q$, nos darán en seguida los puntos de tangencia P y Q, cuyos, encontrándose en el plano horizontal AB, unidos que sean darán una cuerda PQ, P'Q' evidentemente horizontal y situada en el plano

de la curva que buscamos, ya que P y Q forman parte de la misma línea; por lo tanto se infiere, que si escogemos un nuevo plano de proyección vertical L'T' perpendicular á la cuerda horizontal PQ, éste será el plano en que la curva de contacto se proyectará según una recta. Efectuemos, pues, el cambio de plano, y así la nueva proyección vertical del elipsoide será la elipse G'D'H'C', y el foco luminoso vendrá en S'.

Así dispuesta la figura, busquemos en segundo lugar la dirección y situación de dicha traza, para ello diríjase al contorno aparente y desde el punto S' las tangentes S'J y S'I, ellas representarán las trazas verticales de dos planos tangentes límites, ambos perpendiculares al plano de proyección vertical y como que los puntos J é I, con evidencia pertenecen á la curva, claro es que su unión nos dará la recta IJ como proyección entera de la misma, corroborándolo así, el ser su plano paralelo al diametral *ij*, el cual es conjugado con S'O''.

La cuestión está, pues, resuelta y sólo falta colocar la curva en las proyecciones que la conciernen sobre los primitivos planos de proyección. Habiendo de ser estas proyecciones elipses, nos bastará construirlas por medio de sus diámetros conjugados. Desde luego, los puntos IJ situados en el contorno aparente se proyectarán en el plano horizontal en I'J', esto es, sobre la traza horizontal del plano de la curva de contacto de la superficie (teorema núm. 116), con el cilindro paralelo á la dirección de las proyectantes, que aquí son perpendiculares al plano horizontal escogido. Estos puntos ya pueden inferirse desde luego que son los más altos y más bajos de la curva, pues el plano auxiliar vertical escogido lo indica así.

Así, pues, tenemos que I'J' es un diámetro de la curva en proyección horizontal y su proyección resulta ser I''J'' en el cambio de plano vertical.

En cuanto á su otro diámetro compañero á éste, se proyecta en el plano vertical auxiliar en el punto ω' mitad de IJ; en proyección horizontal ω' viene en ω, así es que la dirección del diámetro que buscamos será la que nos indica la proyectante ωω', falta tan sólo conocer su verdadera magnitud y esto nos será fácil recurriendo al principio de las secciones homotéticas, en efecto, la sección diametral *ij* es paralela á la IJ, existirán, pues, en ambas; líneas homólogas. Hagámonos cargo, pues, proyectando *i* en K de los diámetros KO, OM que corresponden á la sección diametral y entonces por el punto I' se podrá trazar la I'N paralela y homóloga á la KM, aquella cortará en N á la prolongación de ωω', dándonos en N el punto homólogo de M, y por lo tanto Nω prolongada hasta ωV, dará en VN el segundo diámetro que buscábamos, cual pasará á ocupar la posición V'N' en el plano vertical; con ese par de diámetros trácense las elipses que indican ambas proyecciones, ellas serán las líneas divisorias de luz y sombras propias.

Pasemos á la sombra arrojada, será también una elipse, pues el plano horizontal considerado indefinido corta á todas las generatrices del cono, eso lo indica la simple inspección del plano vertical auxiliar, bastará, pues, conocer dos diámetros conjugados de la misma. Sea pues, en primer lugar al diámetro que corresponda á la sombra de IJ, la sombra sobre el plano horizontal de esos puntos es I''' para uno y J''' para otro, y como quiera que J''' é I''' son puntos límites en las cuales las trazas horizontales *x*J''', *s*I''' de los planos tangentes, han de ser también tangentes á la curva de sombra arrojada, de aquí resultará que tomando el punto α mitad de I''' J''' y trazando por él, una recta indefinida paralela á la dirección de la tangente J'''*x*, aquella será, indefinida, la dirección del diámetro conjugado incógnito, bastará tan solo definirlo, encontrando sus extremos β', γ'; para ello condúzcase por esa recta y el vértice del cono un plano, este será perpendicular al de proyección vertical que hemos empleado como auxiliar, su traza vertical nos cortará al plano IJ, según una recta proyectada en el punto δ y ella proyectada horizontalmente en βγ será una cuerda de la elipse encontrada anteriormente, de modo que, haciendo pasar rayos luminosos por β y γ estos irán á encontrar en β', γ' al diámetro antes indefinido y ahora propiamente limitado en dichos últimos puntos. Teniendo pues los dos diámetros conjugados, trácese la elipse de sombra arrojada; más como parte de ella queda interrumpida en μν al encontrar la línea de tierra, indica eso, que la restante de la sombra caerá arrojada sobre el plano vertical, allí, pues, sería necesario reproducir las consideraciones anteriores, más atención hecha á la relativa poca extensión en que interesará la curva en este plano puédese concretar la cuestión á encontrar la sombra de dos ó tres puntos por el sistema ordinario de las trazas.

135. Combinación de dos elipsoides.—Es objeto de la presente cuestión, el determinar la sombra de dos elipsoides, cuales se cortan y no tienen sus ejes en un mismo plano, motivando con ello dos problemas distintos, pues el segundo ó sea el de la sombra, no puede resolverse sin antes tener resuelto el primero, cual es el de la intersección de ambas superficies. La encontraremos desde luego.

Sean á este efecto (L. 17, fig. 129), los elipsoides E'-E, Σ'-Σ, cuales sus ejes no se cortan, y al objeto de facilitar la cuestión, se escogen los planos de proyección de tal modo, que el plano vertical sea paralelo al eje mayor de uno de los elipsoides, el E-E', por ejemplo, mientras que el plano horizontal sea perpendicular al eje mayor del otro Σ-Σ', así este último vendrá expresado horizontalmente por su ecuador, y verticalmente por la elipse, cuyos ejes serán; el mayor de la superficie, y el menor el radio del ecuador, proporcionado por el dato. En cuanto al primero E-E', dos elipses expresarán también sus proyecciones; la vertical formada con el auxilio del eje mayor del elipsoide y del radio de su ecuador, que son datos de la cuestión, y en cuanto á la horizontal se determinará valiéndonos de la propiedad del núm. 116, tal como hemos hecho al determinar las proyecciones del elipsoide en el asunto del número anterior á este párrafo.

Pasemos ante todo á determinar la línea de intersección de estos dos elipsoides, y para ello, al objeto de facilitar la cuestión, nos basaremos en todas las operaciones en propiedades inherentes á las superficies de segundo grado, pues ellas permitirán escoger una serie de planos secantes especiales, que si bien nos cortarán por medio de elipses á los dos elipsoides, ellas, sin embargo, serán semejantes, y por lo tanto, haciendo una elección de un plano auxiliar en que aquellas se proyecten según círculos, dichas secciones las tendremos muy expeditas tanto en su trazado como la exactitud y claridad de sus cruces y trazados.

Véase la nota * que sigue más abajo, y una vez se esté impuesto de la misma se podrá ya pasar inmediatamente á la exposición que sigue. Sabido es que entre los varios procedimientos para encontrar la intersección de dos superficies, uno de ellos es el de recurrir á una tercera superficie que ordinariamente es un plano secante, el cual, cortando á ambas, nos da curvas de intersección y que ella á su vez cortándose, nos proporciona ya puntos de la curva de resultado.

---

* Teorema 1.° *Dos cuadricas tangentes entre si, en dos puntos no situados en una misma generatriz rectilinea, se cortan según dos curvas planas, pasando por dichos puntos del contacto* (sin figura).

En efecto, así es, sean A y B los puntos de contacto y P y Q los planos tangentes á las superficies en dichos puntos.

Consideremos ahora un punto cualquiera M, común á ambas superficies, entonces el plano que pasa por M, A y B, cortará á las cuadricas según dos cónicas confundidas, toda vez que dicho plano sector corta también á los planos P y Q, según rectas tangentes en los mismos puntos A y B á las precitadas cónicas; ahora es bien sabido que una cónica queda determinada por tres puntos y dos tangentes, luego las intersecciones de las dos cuadricas, con el plano ABM coinciden, y así se obtiene una curva plana, que puede considerarse como la primera parte de la intersección y pasa por los puntos de contacto A y B.

Análogo razonamiento nos dirá que si un punto N que no pertenezca á la cónica ABM, últimamente encontrada, forma parte de ambas cuadricas, la segunda cónica ABN completará la intersección.

Puede existir un caso excepcional, en que las dos cónicas ABM, ABN coincidan, entonces se verificará la tangencia de las dos cuadricas á lo largo de la cónica común cuya línea es verdadera línea de contacto entre las dos superficies, desprendiéndose de ello el teorema objeto del párrafo *núm.* 113 y 116.

2.° *Si dos cuadricas son tangentes en tres puntos no situados en linea recta, ellas lo serán á lo largo de una curva plana, que será verdaderamente linea de acuerdo.*

Para la demostración de semejante verdad, observemos que el plano de estos tres puntos, cortará á cada superficie según una cónica y á los tres planos tangentes comunes á las dos cuadricas, según rectas tangentes á las dos cónicas; así, pues, estas dos cónicas coincidirán, pues tienen de común tres tangentes con sus puntos de contacto, total, que se cumplen seis condiciones, y sabido es que con sólo cinco bastan para la determinación de una cónica, así pues, bien podemos asegurar que las dos cuadricas serán recíprocamente tangentes; en cada punto de la cónica doble.

3.° *Teorema de Monge. La intersección de dos cuadricas circunscritas ó inscritas á una tercera cuadrica, se compone de dos curvas planas, cuyos planos, pasan por la recta de intersección de los planos de las curvas de contacto.*

Este teorema es de fácil comprensión, en vista de los que anteceden; en efecto, las dos curvas planas de contacto, encontrándose sobre una misma superficie, se cortarán generalmente en dos puntos A y B, en dichos puntos las cuadricas circunscritas tienen un mismo plano tangente (Teorema 1.° de esta nota), luego se cortarán según dos curvas planas pasando por los puntos de intersección de las curvas de contacto.

Es también susceptible este teorema de demostración analítica.

Sean $S=0$ la ecuación de una superficie de 2.° grado y $P=0$, la de un plano. Sábese ahora que la ecuación de una cuadrica circunscrita á la primera á lo largo de la curva de intersección de la superficie S y del plano P, es de la forma $S+kP^2=0$, representando k un parámetro arbitrario.

Sea también Q la ecuación de un segundo plano y l, otro parámetro arbitrario, la ecuación $S+lQ^2=0$, representará toda cuadrica circunscrita á la superficie S, según la línea de intersección con el plano Q.

Las coordenadas de un punto cualquiera de la ecuación de la línea de intersección

La cuestión estriba en escoger de tal modo estos planos, de suerte, que nos corten á las superficies, por medio de líneas las más fáciles en su trazado. Aquí, siendo las superficies elipsoides, claro está que las secciones han de ser elipses, más aún estas pueden dar lugar á que en sus dos agrupaciones, ya las que corresponda al elipsoide E, ó ya á los de Σ, vengan dadas en ciertas relaciones que faciliten la cuestión. En efecto, un plano cualquiera cortará á los dos elipsoides, según dos elipses cualesquiera, más si en lugar de escoger al azar el plano secante, se busca uno particular, que al cortar á los dos elipsoides, lo haga según dos elipses, no ya independientes entre sí, y en cambio que sean semejantes, entonces no hay duda que el trazado será mucho más breve, rápido y sencillo, y á este fin, obedece el teorema de Monge de que hemos hecho mención en la nota adjunta.

En segundo lugar, si escogemos un plano de proyección auxiliar, en donde estas elipses obtenidas se proyectan, según círculos, será cuando habremos resuelto por completo la cuestión, pues la construcción del círculo es rápida, y permite buscar con toda exactitud las intersecciones sucesivas de sus líneas, cuando ellas se combinan; pasemos pues, á resol-

---

de dos superficies circunscritas á S, deben satisfacer las ecuaciones de estas mismas superficies, y con ello pueden representar esta intersección por la diferencia $kP^2 \text{-} lQ^2 = o$ ó lo que es lo mismo $(\sqrt{k} . P + \sqrt{l} . Q)(\sqrt{k} P - \sqrt{l} . Q) = o$, de donde $\sqrt{k} . P + \sqrt{l} . Q = o$ y $\sqrt{k} . P - \sqrt{l} . Q = o$, ecuaciones de dos planos, pasando por la intersección de los P y Q.

Y semejante teorema es general y tiene lugar ya sea en la fig. 130, en que son elipsoides circunscritos á una esfera, en la fig. 131, en que las cuadricas son un elipsoide, un hiperloloide y una esfera, las dos primeras circunscritas á la tercera, en la fig. 132 y 134 que representa un hiperbololde y un paraboloide, circunscribiendo á un elipsoide ó esfera; en la fig. 133, las dos cuadricas circunscritas á la esfera, son el cilindro y el cono, y así sucesivamente iríamos combinando, tres á tres, todas las superficies de segundo grado, ya fuesen de una ó dos hojas.

Ahora podemos observar que toda sección plana del sistema de tres cuadricas, da un cuadrilátero curvilíneo, circunscrito á una cónica, en la cual las diagonales pasan por los puntos de intersección de las cuerdas que unen los puntos de contacto.

El teorema subsiste, aun cuando los puntos de intersección de las curvas de contacto proyectadas en *ab*, *cd*, aquí un cono y un elipsoide circunscritos á una esfera (fig. 135) son imaginarios, y en efecto, los planos de dichas curvas prolongadas, se cortan según una recta real proyectada en o, por la cual pasan también los planos que contienen las curvas de intersección, proyectada según *fe*, *hg*.

De todo lo cual, también podemos inferir, que cuando dos cuadricas se encuentran circunscritas á una tercera, las líneas de intersección se proyectan según rectas, sobre todo plano que se halle perpendicular á los planos de las curvas de contacto.

ver estos dos extremos, empezando por el procedimiento de elección de plano.

Para poner en práctica el teorema de Monge, echaremos mano para facilitar la cuestión, de una tercera cuadrica, que será la esfera en la fig. 130, en ella supondremos circunscritos los dos elipsoides que se ven en la figura, estos al cortarse en sus contornos aparentes forman un cuadrilátero curvilíneo, cuyas diagonales *ab*, *cd*, representan las curvas de intersección proyectadas según rectas en el plano de estos contornos aparentes, y ellas son tales, que se cortan sus planos según una recta proyectada en el punto *o*, en la cual se cortan también los planos de las curvas de contacto *ef*, *hg*, cuales se proyectan del mismo modo, según rectas en el plano referido; en resumen, los cuatro planos, dos de las curvas de intersección y los otros dos de las de contacto, se corta según una recta que es cuerda común de las tres cuadricas.

Es cierto que en los elipsoides dados en la fig. 129, el ecuador de los dos, no resulta igual como lo es, en la figura explicativa 130, más eso no importa, pues veremos que con gran facilidad referimos este nuestro caso á aquel.

A este fin en la fig. 129 y partiendo del centro O′ y con el radio O′F, igual al radio del ecuador del elipsoide E, construyamos una esfera inscrita al mismo, á lo largo del ecuador FF′.

Al mismo tiempo, constrúyase otro elipsoide C′JD′, circunscrito á dicha esfera y cuyo eje C′D′ sea vertical, al paso que sea semejante este nuevo tercer elipsoide, al designado por Σ en el dato.

Para lograrlo, determinaremos el eje O′C′ por medio de una cuarta proporcional, cuya, nacerá de la comparación respectiva de los ejes de los dos elipsoides, que van á ser homotéticos, y así será $I\omega' : \omega'C :: O'J : x$, cuya proporción resuelta geométricamente dará la recta O′C′ como magnitud del eje mayor del nuevo elipsoide.

Con ello estamos de lleno en el teorema de Monge, pues tenemos dos elipsoides E y Θ, circunscritas á una misma esfera, las líneas de contacto de esta, con aquellos se proyectan respectivamente según las rectas FF′, JJ′, y por último, que es, lo que más nos importa, las intersecciones se proyectan en 1-1′, 2-2′, diagonales del cuadrilátero curvilíneo de los contornos aparentes, y que según sabemos, han de cortarse estos dos planos 1-1′, 2-2′, según la misma recta O′ perpendicular al

plano principal común, y por la cual se cortan del mismo modo, los planos de las antes citadas curvas de contacto.

Escojamos, pues, uno de estos dos planos, el 1-1′, por ejemplo, si ahora empleamos una serie de planos secantes paralelos al 1-1′, ellos nos cortarán á los elipsoides E y Σ según curvas semejantes, por ser Σ semejante á Θ * y la combinación de cada dos de estas elipses en cada plano secante, darán puntos de la intersección.

Falta ahora facilitar aun esta operación, apelando á un plano de proyección auxiliar, de modo que estas elipses se proyecten según circunferencias, y para ello, partamos nuestras investigaciones del plano que contiene la intersección 1-1′, esta intersección será aquí, una elipse cuyo semieje mayor será igual á O′-1, y su semieje menor al radio O′F′ de la esfera inscrita, esto es el radio del ecuador.

Tómese ahora el punto l medio entre O′ y 1, tomando como centro de una semicircunferencia O′a1, cuyo radio sea lO′. Esta semicircunferencia cortará en a al contorno de la esfera, de modo que, uniendo a con O′ y con 1, tendremos las cuerdas O′a, 1a, y ellas serán tales, que la O′a será igual al

---

* *Las secciones causadas por planos paralelos á las superficies de segundo grado son curvas semejantes y semejantemente colocadas.*

Tomando el plano de las xy, paralelo á las secciones consideradas y suponiendo además que los ejes de coordenadas, sean paralelos á tres diámetros conjugados, la ecuación de la superficie será de la forma

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+F=0$$

y una cualquiera de las secciones estará representada por dos ecuaciones, tales como

$$z=\alpha, \qquad Ax^2+A'y^2+2Cx+2C'y+2C''z+F=0$$

Pero como en esta última los términos de segundo grado son independientes de la variable α, se vé que las secciones consideradas se proyectan sobre el plano de las xy, según curvas semejantes y semejantemente colocadas, y por lo tanto que las secciones mismas son curvas semejantes, y semejantemente colocadas.

2.° *Todos los centros de las secciones producidas por planos paralelos en una superficie de segundo grado, están situados sobre un diámetro de la superficie.*

Conservando las mismas notaciones del anterior teorema, tendremos que el centro de una de las ecuaciones estará representado por las ecuaciones simultáneas

$$Ax+C=0 \quad (1)$$
$$A'y+C'=0 \quad (2)$$
$$z-\alpha=0 \quad (3)$$

Como las dos primeras no tienen α, se deduce que todos los centros están situados sobre la recta determinada por estas dos ecuaciones; es decir sobre un diámetro de la superficie, puesto que la ecuación (1) representa el plano diametral conjugado con el eje de las x, y la (2) el conjugado con el eje de las y.

radio O′F′ de la esfera inscrita; además, el triángulo O′a1 será rectángulo en a, y por lo tanto, siempre se podrá considerar la O′a como proyección ortogonal en el plano K de la recta O′-1, resultando de aquí que la elipse de sección producida por el plano O′-1, se proyectaría sobre el plano de dirección K, según otra elipse en que los ejes aO′ y el proyectado en el punto O′, serían iguales (para este plano), al radio del ecuador, y por lo tanto, la proyección será un círculo.

Se comprende, pues, que iguales resultados obtendremos, si echamos mano de una serie de planos paralelos al 1-1′, todos nos cortarán á los elipsoides E y Σ, según elipses semejantes y todas ellas proyectadas según círculos, sobre todo plano de proyección que tenga la dirección de O′a perpendicular á la proyectante a-1. Efectuemos pues esta operación aunque no más sea para uno de estos planos, como por ejemplo, el que tiene su traza vertical en M, este corta al elipsoide E, según una elipse cuyo semieje mayor es mB, este semieje proyectado en el plano K es $m'b$, más al objeto de hacer más claras las operaciones, se traslada paralelamente á sí mismo del plano K en K′, en sitio distinto de las construcciones del dato, y en esta disposición, $m'b$ viene en $m'b'$, hágase luego girar el plano K′ alrededor de ξ hasta que coincida con el plano horizontal, entonces el centro m'' viene en m'''-m^{IV} en la prolongación de la paralela á la línea de tierra, trazada por punto O, (Teorema núm. 2 de la última nota), si ahora con el centro m^{IV} y con el radio $m^{IV}b'''=m'''b''=m''b'=m'b$, se traza una circunsferencia, esta será la proyección sobre el plano auxiliar de la sección elíptica de que tratamos.

Por la misma razón el mismo plano M corta al elipsoide Σ según una elipse proyectada en Qc, cuyo centro está en n, este centro se proyecta en n', de allí se traslada en n'', rebatiéndose finalmente en n'''-n^{IV}; colocado en la paralela á la línea de tierra trazada por el centro ω, este último punto sirve de centro á una circunferencia de radio $n^{IV}c^{IV}=n'''c'''=n''c''=n'c'$.

Estas dos circunferencias ya trazadas se cortan ahora en los puntos p^{IV}, q^{IV}; son los puntos de intersección ya buscados cuales proyectados en la línea de tierra en p''', q''', girados en p'', q'', trasladados en p', q' y finalmente contraproyectados en p y q, y estos proyectados horizontalmente en p_1, q_1 darán solución al problema.

Repítase esta operación tantas como veces se crea con-

veniente y con ellas se obtendrán tantos puntos como se quiera de la curva que muestran las proyecciones.

Ya en posesión de esta curva de intersección, cuya, deslinda el límite en donde estas superficies están interesadas en la luz ó en la sombra, puede pasarse á encontrar la línea divisoria de luz y sombra que concierna á cada uno de estos elipsoides, y para ello, no hay más que repetir lo dicho detalladamente en el párrafo n.º 129, así es, que bajo este punto de vista detallaremos muy someramente las operaciones. Así para el elipsoide E cambíese de plano horizontal de manera que el nuevo que se escoja, sea perpendicular al eje mayor, escogiendo una nueva línea de tierra L'T' perpendicular á la proyección vertical de aquél, y así, este eje, mayor viene proyectado horizontalmente en el punto o'' el cual ahora es centro de la circunferencia trazada con el radio o''V igual al radio del ecuador; esta circunferencia, es ahora la proyección horizontal del elipsoide. El rayo luminoso referido en este cambio de plano, viene en R' y ello consta de las operaciones á que se refiere el cambio de plano con respecto al punto y', y''.

Un segundo cambio de plano con respecto al vertical de proyección, de modo que sea paralelo al rayo luminoso R', por el cual pasa la línea de tierra L"T", nos dará la elipse cuyo centro es O‴ como á nueva proyección vertical, y así R", será la nueva referencia del rayo, cuyo ha sido siempre dirigido por el punto primitivo y', y'' que ahora ha pasado á y'''; ahora el diámetro conjugado de la dirección del rayo, es XZ, esta será la línea divisoria de luz y sombra, la cual se proyecta horizontalmente en YX'VZ', esto es, una elipse con sus ejes correspondientes; de ésta se pasará á la línea de tierra LT dándonos la otra elipse con sus diámetros conjugados Y'X"V'Z", y de ésta finalmente á la línea de tierra L'T', dándonos la proyección horizontal de la línea divisoria de luz y sombra, que también será una elipse Z‴V"X‴Y", de la que disponemos del mismo modo de dos diámetros conjugados.

Para con respecto al elipsoide Σ, como quiera que este en virtud del dato, ya de por sí tiene su eje mayor perpendicular al plano horizontal, bastará cambiar de plano valiéndonos de la línea de tierra L‴T‴ de modo que sea paralela á la proyección horizontal del rayo luminoso (aquí confundida con dicha proyección), obtendremos la nueva proyección vertical del elipsoide, cuyo centro es ω'', al paso que la nueva referencia del rayo luminoso será R‴. La traza horizontal x' de este rayo, se encarga de corroborar la posición de R‴.

Trácese ahora pues el diámetro rs, conjugado con R‴. Este diámetro será el plano de la curva, á la vez que la línea divisoria de luz y sombra, cual, se proyecta horizontalmente según la elipse de ejes $s'r'$, tu, y verticalmente al pasar á LT, en la otra elipse de diámetros conjugados $s''r''$, $t'u'$, esta es la línea divisoria de luz y sombra del elipsoide Σ.

Veamos ahora las sombras arrojadas, las unas caen sobre los planos de proyección y la otra es la $\mu'\varphi\nu'$ que arroja el elipsoide E sobre el Σ, las primeras se componen de las elipses $\tau\rho\varphi'''\mu'''$T, $\tau\Xi$T la una sobre el plano horizontal, quebrantada en los puntos de la línea de tierra τ, T, en donde empieza la que cae encima sobre el plano vertical, ambas constituyendo la sombra que arroja el elipsoide E-E'; las otras dos elipses $\lambda\gamma'''\varepsilon\mu'''\beta$, $\lambda S_2\beta$, estas dos quebrantadas en λ y β nos darán la sombra arrojada del elipsoide Σ.

Como quiera que la elipse $\lambda S_1\beta$ cae completamente sumergida dentro la $\lambda\Xi$T, eso indica que la primera es parásita y por lo tanto toda la parte que concierne á ella del elipsoide Σ, está todo cubierto por la sombra del elipsoide E.

En cuanto á lo que concierne á la parte anterior, las elipses se cortan en los puntos μ''', γ''' por los cuales pasan evidentemente rayos luminosos rasando á la vez por μ, μ', y por γ, γ', indicando con ello que μ' y γ' son los primeros que reciben la sombra arrojada del elipsoide E, siendo sus puntos originarios μ y γ.

Finalmente nos falta encontrar ahora puntos intermedios en μ' y γ'; la operación que hagamos con uno, la haremos con los demás, y para ello propongámonos determinar el punto que corresponde al plano horizontal de sección △. Este plano corta al elipsoide Σ según un círculo cuya sombra sería también un círculo igual á él cuyo centro es π'', este corta ahora á la sombra arrojada del elipsoide E en el punto φ'''; luego eso quiere significar que φ''', es traza horizontal de un rayo luminoso ó sea intersección, ó sea la generatriz de intersección de dos cilindros de sombra, cuyas bases respectivas son el círculo escogido en Σ, y la línea de contacto del elipsoide E, y por lo tanto proyectado φ''' en φ'' y dirigiendo por este un rayo luminoso este cortará en φ' al plano △, ó rasará en

φ al círculo △, mientras que más prolongado aún rasará en φ sobre la línea de contacto del elipsoide E, luego φ' es sombra arrojada de φ. Operaciones análogas nos darían más puntos de la curva de sombra arrojada que muestran las proyecciones.

136. Combinación de un hiperboloide de una hoja, con un paraboloide elíptico.—(Fig. 136, lám. 18). Escogemos ahora el caso de que los ejes de las superficies de 2.° grado se corten, todo con el objeto de variar de método para hallar la curva de intersección, y así formarse un criterio claro de la elección más oportuna de los medios más apropósito que conviene escoger, para que las operaciones sean más rápidas y provechosas; así en este ejemplo especial el teorema de Monge del (n.° 135, nota) sería algo más laborioso en su aplicación que el de preferir como preferimos, el de valernos de una serie de esferas auxiliares, cuyo centro común fuera el punto de intersección de los ejes; con esto cada esfera cortará á cada una de las superficies, según círculos, y estos, siendo de fácil y rápido trazado, los podremos obtener desde luego, cortándose dos á dos, y proporcionándonos con ellos puntos de intersección, cuales lo serán, de la línea por la cual se cortan ambas superficies.

Como quiera que, dichas operaciones son sumamente fáciles, y por otra parte vistos en todos los tratados de Geometría descriptiva, apuntáremos tan sólo una de ellas, aunque no más sea, para encauzar la marcha del procedimiento.

El hiperboloide está dado de modo que su eje, sea perpendicular al plano horizontal, mientras que, el del paraboloide será paralelo al plano vertical, ó dicho de otro modo, se escogen los dos planos de proyección, de manera que cumplan aquellos requisitos, así la proyección vertical del hiperboloide, será la hipérbola QDA-RJB limitada superiormente, por el plano horizontal QR, el plano del collarino, en DJ, el centro en O'-O, y el eje vertical CC', con los radios respectivos, de los círculos de base superior é inferior y de garganta, trázanse las circunferencias que indica las proyecciones horizontales, y ellas indicarán en su conjunto la superficie.

El eje del paraboloide es EV-E'v', su vértice V, su contorno aparente en el plano vertical la parábola GVH, y su límite el paralelo GH, el cual está contenido en un plano perpendicular al vertical de proyección, en virtud de estar situa-

do el eje, conforme hemos indicado. El contorno aparente sobre el plano de proyección horizontal, lo constituye la parábola F'v'F" el que es de fácil determinación, valiéndonos de una serie de planos paralelos al de límite GH, proyectando luego horizontalmente las elipses, proyección de los círculos; en el espacio, cuales aparecen, como la expresada, en H'F"G'F', y la línea envolvente de todas estas elipses será con evidencia nuestro contorno.

Pasemos á la intersección de estas dos superficies, según ya hemos indicado, hagamos servir el punto ω-O, como centro de una esfera de radio, el que queramos, ésta cortará al hiperboloide según dos circunferencias horizontales, proyectadas verticalmente en 1-1, 2-2; y al paraboloide, según otras dos circunferencias situadas en planos perpendiculares al eje de la superficie, y proyectadas según las rectas 3-3, 4-4. Los planos 1-1, 3-3, se cortarán según una cuerda común á las dos superfices, proyectada verticalmente en el punto 5, y horizontalmente, en 5'-5", sus extremos 5', 5", serán ya, puntos de la curva.

Del mismo modo, el plano 4-4, y el 2-2, se cortarán, según la cuerda común, proyectada en 6, y horizontalmente en 6'6"; los puntos 6', 6" serán también puntos de la intersección. Los planos 2-2 y 3-3, proporcionarán los puntos q', q". Los planos 1-1, y 4-4, darán el punto 8, aunque éste como auxiliar, pues si bien es cierto, que dicho punto, no está en las superficies, forma sin embargo parte, de la curva de la proyección vertical, atendiendo solamente á ella para la formación geométrica de la misma.

Empleando una nueva esfera, se encontrarían nuevos puntos, y así sucesivamente.

Téngase en cuenta, que aparte de semejante procedimiento hay puntos especiales, que podemos conocer inmediatamente, cuales son: los K, L, N, M producidos por la intersección de los contornos, aparentes en proyección vertical, pues es lo mismo, que decir, que para buscarlos, se ha recurrido á un plano vertical auxiliar, pasando por los ejes de la superficie, y este plano, siendo con evidencia un plano principal de ambas, y paralelo al de proyección vertical, nos habrá cortado á dichas superficies, según las curvas, que en verdadera magnitud aparecen, la una, hipérbola, y la otra, parábola, confundidas con los contornos aparentes, de dichas superficies sobre el plano vertical.

Esta es precisamente también, la razón de que la línea de intersección de ambas superficies, se proyecta verticalmente según una cónica, aquí, la hipérbola K5L8, M7P6N *. Esta curva se proyecta horizontalmente, según dos curvas distintas, la una vista, en K'5'L'5", y la otra, oculta en, M'P'N'P", ambas á dos cerradas, y cada una de ellas, simétrica con respecto al eje de simetría E'B'.

Sombra del hiperboloide.—El rayo luminoso es $R^v R^h$, la curva de sombra propia será plana (n.º 116) su plano diametral conjugado con el rayo luminoso, busquemos pues el plano sobre el cual se proyecta dicha línea según una recta. La sola observación hecha, de que los puntos S, U, son puntos de tangencia sobre el collarino, de planos verticales tangentes á la superficie, y paralelos al rayo luminoso, basta para inferir, que la cuerda SU, lo es de la curva que vamos á encontrar, y además, siendo esta SU, horizontal, todo plano vertical que escojamos, perpendicular á ella, reunirá la propiedad, de que le sea perpendicular el plano de la curva, y por lo tanto, que en el se proyecte, según la línea recta, que represente la traza vertical de ese plano. A este efecto, hagamos girar el plano meridiano Ov^h, que contiene al rayo luminoso, alrededor del eje vertical, hasta que se confunda con el meridiano principal, y así, después del giro, la sección del meridiano R^h, se confundirá con la sección meridiana principal, mientras que el rayo luminoso, se colocará en la disposición de $\omega r'$, ó sea R'. ahora bien, en ese giro, la cuerda diametral SU, se colocará en S"U", cuya proyección vertical es O'; y trazando varias cuerdas paralelas á R', por medio de ellas nos será fácil deducir el plano diametral TT', que le sea conjugado; la curva pues de que tratamos, se confunde con la recta TT', bastará pues, tan sólo, colocar dicha curva en la posición que en el espacio le corresponda, deshaciendo el giro que antes hemos hecho; así; los dos puntos de la curva proyectados verticalmente en T' corresponden á la cuerda *tt'* que nos da los puntos de la curva en *t*, *t'* de la proyección horizontal, cuya cuerda está

* En virtud del teorema que consta en la nota del n.º 103, nota. Este teorema, es aún más general, que no indica el enunciado, pues continua teniendo lugar, para con respecto á dos cuádricas, que tengan un plano diametral común, conjugado á un sistema de cuerdas paralelas.

Así, si se proyecta oblícuamente, la intersección sobre el plano común, por medio de proyectantes paralelas, á las cuerdas conjugadas, se obtendrá también, una cónica, pues las ecuaciones serán de la misma forma que las anteriores.

dividida en dos partes iguales en *t"*; más al deshacer el giro, *t"* pasa en *t‴* y la cuerda en Z*z*, siempre perpendicular á la dirección de R^h, que toma el meridiano en cuestión, Z, *z* se proyectarán ahora verticalmente en Z', *z'*.

Repítase ahora semejante operación para tantas cuerdas como queramos, proyectadas en los puntos de la recta TT' y así obtendremos la curva hiperbólica X'U'Z'-*x*'S'*z*' como á línea divisoria de luz y sombra en el plano vertical, y la XUZ-*x*S*z* hipérbola de la proyección horizontal.

Sombra propia del paraboloide.—El mismo principio de que nos hemos valido en el hiperboloide, nos va á servir en el paraboloide; mas, para facilitar la cuestión, y obtener en condiciones ventajosas el plano de la curva de sombra, cambiemos de plano de proyección horizontal, de modo que sea perpendicular al eje del citado paraboloide; la línea de tierra escogida es ahora la L'T'; con ella la nueva proyección horizontal del eje será el punto O", y la de la superficie será el paralelo máximo G"E_1H"*eh*, proyección de la base GH, cuyo radio se conoce por el dato; en cuanto al rayo luminoso, tomará en su nueva proyección la recta R_1^h habiéndonos valido del punto r^v - r^h para el traslado.

Otro cambio de plano, pero que ahora es, el vertical de proyección nos bastará para obtener la curva. Escójase al efecto la nueva línea de tierra, paralela á la proyección horizontal R_1^h del rayo luminoso, lo cual equivale á decir que el plano escogido, es paralelo á dicho rayo, en la nueva proyección, el contorno del paraboloide, viene expresado por la parábola *h*V'*h'* y el rayo luminoso en R_1^v, en semejante disposición, puede aplicarse ya el teorema (núm. 116) pues la tangente á la parábola, y en dirección paralela al rayo luminoso, es la 9-9 que nos da el punto de contacto Y, luego, por razón de simetría, el plano diametral conjugado con la dirección 9-9, será el plano de perfil YY', paralelo al eje V'O"; luego la recta YY' será la proyección de la curva de sombra sobre este plano vertical, y en cuanto á su proyección horizontal, también viene coincidiendo con una recta *ef*, cuya es traza horizontal del propio plano de la curva.

Por otra consideración muy sencilla, podemos convencernos que la recta YY', es esta curva de sombra en la proyección vertical; en efecto, busquemos un punto de dicha línea, situado en un plano horizontal cualquiera, tal como el *bb'*, éste es un paralelo; y las normales á lo largo de un paralelo, van

á encontrar al eje en un mismo punto; partiendo de este supuesto, trácese la tangente 10·10 en b para luego deducir la normal en $b\omega'$, trácese ahora por ω' la $\omega' a$, perpendicular al rayo luminoso R_1^v, y el punto a, donde corta á dicho paralelo será el punto de sombra (lo será porque siendo el rayo paralelo al plano vertical, claro es, que el ángulo recto que ha de formar la tangente ó rayo luminoso, que pasa por el punto incógnito, con la normal en dicho punto, persistirá siéndolo en la proyección sobre el mismo plano). Ahora bien, siendo la normal $\omega' a$ la subnormal será ωk, la cual es igual en la parábola al parámetro p, cantidad constante; con esto el triángulo $\omega' ka$ dará $ka = k\omega' \times$ tang. α (α, es el ángulo $a\omega' k$) ó lo que es lo mismo $ka = p$ tang. α, cantidad constante, luego cualquiera que sea el paralelo que se escoja, para ir á encontrar el punto de sombra que le corresponda, siempre tendremos que dicho punto estará separado del eje la distancia ka, luego todos los puntos estarán en una recta paralela al eje, cuya, equidistancia, será la mencionada separación ka.

Con ello podemos inferir, que esta línea de sombra, es una parábola de vértice Y. Obtenida ya la línea, no hay más ahora que trasladarla á la posición que le corresponde en el espacio, con arreglo á las proyecciones de partida. Es cuestión de fáciles y sencillos cambios de planos, pasando de la $L''T''$ á la $L'T'$, y de ésta á la LT, así se logrará la proyección vertical de la línea de sombra propia en la parábola $f'Y''e'$ y la de $f''\varepsilon'e''$ en la proyección horizontal, siendo respectivamente la recta $Y'''Y'$ y el punto Y'' el eje y el vértice de la primera, mientras la recta $\xi\varepsilon$ * es un diámetro de la proyección horizontal, siendo la tangente en ε paralela á $e''f''$.

* Conociendo el eje, el vértice y un punto de la parábola, podemos ya trazar la curva, sin necesidad de acudir al traslado de todos los puntos, por los cambios de plano de proyección indicados. En efecto, sean (fig. 136′) ab el eje, a el vértice, y c un punto de la curva; proyectemos el punto c sobre la tangente del vértice, dividiendo la ad en partes iguales; cuatro por ejemplo, dividamos también dc en cuatro partes iguales.

Ahora, por los puntos de división de ad conduzcamos paralelas al eje, y unamos el vértice con los puntos de división de dc, entonces las rectas que así resulten a-1, a-2, a-3,... etc., cortando á aquellas paralelas en los puntos l, m, n,... etc., serán puntos de la curva.

Esta misma construcción se aplica (fig. 136″) cuando el eje y el vértice son sustituídos por un diámetro cualquiera ab, y por la tangente ad á la extremidad del diámetro; es bien sabido que, entonces, ab y ad forman un sistema de líneas conjugadas.

Sombra arrojada interna del hiperboloide sobre sí mismo.—A esta superficie lo propio que al paraboloide, la consideramos como hueca, y por lo tanto, parte del arco circular de base proyectado en QR proyectará sombra en el interior de la superficie, y servirá, por lo tanto, de directriz de un cilindro de sombra, paralelo á la dirección de los rayos luminosos, cuales al cortar á dicha parte interna, determinarán con su intersección la línea de sombra. Esta, en virtud del teorema del párrafo 103, nota, es una curva plana y además de segundo orden, por lo que para encontrarla fácilmente, convendrá disponer de un plano auxiliar, en donde aquélla se proyecta según la traza vertical del plano que la contiene. Para ello, utilizaremos el giro, que más antes habíamos practicado, para encontrar la hipérbola de sombra propia, en dicho giro, la sombra propia se proyectaba según la recta TT′, y el rayo luminoso en R′; además en el punto T, se proyecta una cuerda de la superficie, cuyos extremos son dos puntos por los que termina superiormente la línea de sombra propia, dividiendo la base circular QR en dos partes, la una opuesta á la luz, es línea divisoria de luz y sombra, para arrojarse al exterior, la otra en el mismo sentido de la luz, que es la parte

Para el trazado de la línea de sombra en el hiperboloide, podríamos proponernos también una vez obtenidas las dos ramas, rectificarlas convenientemente, buscando los ejes, asíntotas y focos. Para esto sea en la fig. 136‴ la curva hiperbólica, en la cual empezamos trazando dos cuerdas ab, cd respectivamente paralelas, búsquense sus puntos medios e' y f', uniéndolos y buscando á su vez el medio o de la recta ef este punto, o será el centro de la curva. Trácese ahora una circunferencia egf de centro o y de radio oe, ella cortará á una de las ramas en el punto g, que unido con e y con f, darán dos rectas eg, gf, que se cortarán en g en ángulo recto, y á las cuales serán paralelas las correspondientes á los ejes OG, OE, cuyos se podrán trazar desde luego. Con esto el eje real hi está obtenido, pero falta ahora obtener la verdadera medida del imaginario.

A este efecto trácese una recta cualquiera jk, paralela á hi, tomando de ella en consideración la parte jk, comprendida entre las dos ramas de la hipérbola, descríbase la semicircunferencia jCk, tomando como á diámetro la jk; ahora en su plano dispóngase la recta mn, paralela á la jk y á una distancia de la misma, que sea igual al semieje menor Ob, la proyección de n sobre p, será ahora tal, que uniendo p con o, la recta po será la asíntota de la curva, y de ella deducir su simétrica.

Ya obtenidas las asíntotas, con ellas podemos inferir la magnitud del eje imaginario, recurriendo al rectángulo de los ejes, y para ello, trácese desde el vértice i, la iq paralela á la OC, ella cortará en q á la asíntota, y, por lo tanto, $Or = iq$ será el semieje imaginario.

Finalmente, con centro O y con un radio igual á ri, descríbase una circunferencia, la cual, cortando á la prolongación del eje real en F; F′, proporcionará con ellos los focos de la curva.

que arroja sombra sobre lo interno. De todos modos, la curva es simétrica, alrededor del plano meridiano que contiene el rayo luminoso, lo prueba que los puntos, dos á dos, se proyectan verticalmente en cada uno de los que juntos, forman la traza vertical del plano TT′.

Obsérvese ahora en este giro, que el plano secante meridiano que contiene el rayo luminoso, confundiéndose con el meridiano principal, el rayo que parte de R, cortará á la superficie en j de la línea meridiana; además, los puntos T; pareados y unidos por la cuerda antedicha, perpendicular al plano vertical, son los primeros puntos de la curva que buscamos, cuya, conteniendo la perpendicular al plano vertical ó sea la cuerda aludida, claro está que uniendo T con j la recta Tj será la traza vertical del plano de la curva que deseamos.

Sólo falta colocarla ahora á su debida posición, deshaciendo el giro; así, si queremos conocer en donde va á situarse el punto más bajo j-j' bastará insiguiendo el movimiento del giro, tomar la distancia Oj' y trasladarla en Oj'', lo propio haríamos para los puntos pareados simétricos, cuales unidos por su cuerda correspondiente, ésta se conserva en el giro invariable para con respecto á su distancia del eje, y á su perpendicularidad con el meridiano, y á su magnitud absoluta; en cuanto á los puntos de partida, los tenemos en X, x, y por lo tanto, la línea de sombra arrojada es la curva $xj''X$.

Sombra interna del paraboloide.—Esta la podremos encontrar insiguiendo el mismo principio que ha servido para encontrar la sombra interna del hiperboloide, y para ello el plano auxiliar vertical de proyección, paralelo al rayo luminoso R_1^v y al eje V′O″ viene en nuestro auxilio, puesto que la curva es plana y al mismo tiempo simétrica con respecto al plano meridiano principal hh' que contiene al rayo luminoso, bajo este supuesto, la sombra que arroja el punto h y que produce el rayo de sombra contenido en el meridiano principal, va á arrojarse en l, mas por otra parte el punto Y′, representa la proyección vertical de una cuerda de la curva de sombra, cuerda cuyos dos puntos extremos, en proyección horizontal son e y f; se infiere pues que el plano de la curva ha de pasar por l y los dos puntos e y f sombra de sí mismos proyectados verticalmente en un solo punto Y′, luego la curva se proyecta según la recta $Y'l$, cuya, á la vez es traza vertical del plano que la contiene. Esta curva proyectada

horizontalmente, valiéndonos de los respectivos paralelos del paraboloide, viene representada en la elipse $el'f$. Ahora por medio de cambio de planos, pasaremos la proyección vertical al plano que concierne á la línea L′T′ así nos dará la curva $fl''e'$, y finalmente cambiamos de plano horizontal, pasando al que corresponde á la línea de tierra LT, y así será la curva definitiva en $f''l'''e''$.

Sombras arrojadas.—Teniendo en consideración los cilindros formados por los rayos luminosos que son tangentes á las superficies á lo largo de las líneas divisorias de luz y sombra encontradas, deduciremos sus trazas horizontales en las curvas $Z\lambda''\varphi''\rho$ $X'''\Xi$, en la cual entra también en la parte $x'''\Xi$, la sombra del círculo superior del hiperboloide, luego la otra curva $e'''\lambda''\rho$, sombra del paraboloide. Estas curvas se cortan en λ'', ρ por los cuales parten rayos de sombra $\rho''\rho'''$ y $\lambda'''\lambda$, en cuanto á este último coincide precisamente en el punto de intersección de las dos líneas de sombra propia, luego no hay lugar á sombra arrojada de una superficie sobre otra, y en cuanto al ρ''' este es tal, que el rayo de sombra que parte de él, encuentra en ρ' al paraboloide, en cuyo punto pertenece á su línea divisoria de luz y sombra, esto da motivo á que el trecho de línea divisoria de hiperboloide $\rho'''\alpha$ caiga arrojada sobre el paraboloide en la curva $\alpha\rho'$. Un punto intermedio se encontrará, escogiendo un paralelo intermedio de la superficie parabólica, hallada su elipse de sombra y la intersección de ésta con la sombra del hiperboloide, dará el punto de sombra arrojada en el plano horizontal, para el cual será auxiliar, porque de él habrá de partir contraproyectado un rayo de sombra, el cual, encontrando al paralelo del paraboloide, nos dará el punto en cuestión.

Finalmente, en $\beta\pi\nu$ hay la sombra arrojada del paraboloide sobre el hiperboloide, el punto β se tiene ya de momento es el de partida, y en cuanto á un punto intermedio π situado en un paralelo intermedio $\triangle$, se obtendrá combinando en el plano horizontal la sombra del paralelo $\triangle$, con la sombra correspondiente del paraboloide, su punto de intersección contraproyectándolo oblicuamente en dirección del rayo luminoso sobre $\triangle$, nos dará el punto en cuestión.

La sombra sobre el plano vertical, de sumo sencilla, bastará tan sólo inspeccionar la figura para hacerse cargo de ella.

137. Combinación de un cilindro y esfera. (Lám. 19, fig. 137). El cilindro es de base circular AπC. y de una altura comprendida entre los planos horizontales LT y B'D'; sus generatrices, paralelas al plano vertical; al paso que inclinadas de 45° con el plano horizontal. La esfera, tiene su centro en el punto O-O' mitad de la generatriz EF, que se encuentra más próxima al plano vertical; en cuanto al radio de esta esfera, se halla dado con la condición de que sea tangente á los planos de base del cilindro, combinándolos de modo, que el precitado radio, sea menor que el diámetro de la base circular del cilindro.

Téngase en cuenta, que al escoger estas dos superficies de segundo grado, lo hemos hecho, porque una de ellas, admiten generatrices rectilíneas, y la otra secciones circulares, todo con el objeto de variar de método, para buscar la curva de intersección, pues aquí, será aun mas expedito echar mano para superficies auxiliares de corte, simples planos, que no al de acudir al que proporciona el teorema general de Monge. Veamos pues de determinar los puntos principales.

Así, los del contorno aparente en el plano de la proyección vertical, el plano secante auxiliar, será el que tiene por traza horizontal la recta AB. y siendo este plano, vertical; nos corta al cilindro según las dos generatrices AB-A'B', CD-C'D', y á la esféra según el círculo $aa'a''a'''$, la intersección de aquéllas, con este, da los cuatro puntos a-a_1, a'-a'_1, a''-a''_1, a'''-a'''_1, en los cuales la curva pasa de vista á oculta en el plano vertical. Obsérvese que en ellos la tangente á la curva se confunde con la generatriz correspondiente, toda vez que tangente y y generatriz, estando las dos contenidas en el plano tangente y éste siendo perpendicular al plano vertical, para los puntos de que tratamos, de aquí resultan que ambas á dos, se confundirán con la traza vertical de dicho plano tangente.

Los puntos, en que la curva, pasa de vista á oculta, en la proyección horizontal del cilindro, se encontrarán haciendo uso del plano secante vertical, que pasa por la generatriz EF-'E'F', dicho plano, que es tangente á dicho cilindro, nos facilita, dicha última generatriz como de contacto, al paso que corta á la esfera, según el meridiano principal; esto es, el círculo del contorno aparente sobre el plano vertical; cortado por aquella generatriz en los puntos c-c_1, c'-c'_1 cuales responden á la cuestión.

Mas si los puntos queremos encontrarlos, según los que

corresponden al contorno aparente, horizontal, de la esfera, entonces echaremos mano del plano secante horizontal, pasando por el centro de la esfera, dicho plano cortará al cilindro según un círculo igual al de la base, y á la esfera según el círculo del ecuador, proyectemos oblicuamente estas dos secciones en el plano horizontal, y en dirección á las generatrices del cilindro, entonces, la sección del cilindro, se confundirá con el círculo de base, al paso que el círculo del ecuador lo obtendremos trazando, con centro E, y con radio EO', la circunferencia Yyy', la cual cortando en y, y' á la base circular del cilindro, ellos serán los puntos, que contra proyectados oblicuamente, en donde les corresponda en el ecuador de la esfera, vendrán en definitiva en b-b_1, b'-b'_1.

Puntos límites. Aquellos en que las generatrices del cilindro son tangentes á la esfera. A este objeto, imaginemos circunscrito á la esfera, un cilindro paralelo al dado, este cilindro quedará cortado por el plano horizontal en una elipse cuyo semieje menor Eλ será igual al radio de la esfera, y su semieje mayor por la distancia del punto E, al punto h, traza horizontal de la generatriz del contorno aparente, del cilindro circunscrito á dicha esfera. Ahora bien este cilindro, teniendo igual dirección, con el del dato, ambos al cortarse sus bases en los puntos e,f, indican de por sí que se cortan según dos generatrices, cuyas trazas son e,f; si pues recurrimos ahora, á planos de sección verticales, pasando por dichas dos generatrices; nos cortarán ellos á la esfera, según el paralelo dXd', el cual cortado por las generatrices $e'e''$, $f'f''$, nos dará los puntos dd_1, $d'd'_1$, aquí de tangencia por ser circunscrito uno de los cilindros que se cortan.

Puntos más alto y más bajo. A este fin adoptemos el método de secciones horizontales. Los planos de esta índole que nos darán semejantes puntos límites, serán tales, que al cortarnos á las dos superficies dadas, lo harán según circunferencias tangentes.

La proyección oblícua rS, de la circunferencia producida en la esfera por la sección del plano P. horizontal, es verdaderamente tangente á la EAcC. base circular del cilindro del dato; todo estriba para que este sistema quede determinado, en que se encuentre al centro r

Para ello designemos por x la longitud $r\omega$ por ρ el radio de la base del cilindro, por R. el radio de la esfera; y al mismo tiempo observando que se tiene $r\text{S}=\varepsilon\varepsilon'$; $\text{E}r=\text{O}'\varepsilon$; con ello po-

drá fácilmente deducirse la ecuación $2x^2-2\rho x-R^2=O$ de la cual se infiere $x=\frac{\rho\pm\sqrt{\rho^2+2R^2}}{2}$ y en ellla, admitiendo tan sólo el valor positivo, cual se construirá fácilmente; á este efecto, tómese $Qm=R=Q\omega$. uniendo ω con m; sobre $m\omega$ y á partir de ω levántase la perpendicular $mn=\rho$, uniendo luego n con ω y prolongándola hacia ρ, para tomar en ella á partir de n, la distancia $n\rho=r=nm$ tomando finalmente el punto medio q entre ω y ρ la distancia ωq trasladada en ωr, (de modo que el arco rq corte á la rE) será la que satisfará á la cuestión.

Así pues ahora, si echamos mano del plano secante vertical que contiene las generatrices, cuyas trazas son los puntos S y S′, vendremos á inferir, por los procedimientos anteriores los puntos j'_1-j' el más alto, y el j-j_1, el más bajo. Obsérvese ahora para el mejor trazado de la curva, que la tangente, á ella en el punto j'_1, de la proyección horizontal, será paralela á la Sp tangente á la base circular del cilindro del dato y referente al punto encontrado antes en S.

Puntos situados más á la derecha, ó á la izquierda. En cada uno de ellos, sus tangentes, se encuentran situadas en planos de perfil, siendo sus proyecciones perpendiculares á la línea de tierra. Fijándonos bien en esta notable propiedad, observemos en seguida, que la recta E′F′ proyección vertical del eje del cilindro, es también un eje de simetría de la curva de la proyección vertical; y así cada punto tal como j' tiene su simétrico k′ con respecto á dicho eje de simetría, pero en j', la tangente es horizontal, luego su simétrico, obtenido por la perpendicular $j'k'$ al eje dividida en dos partes iguales por éste, ó bien tomando $j'l=lk'$, la tangente en este será vertical, y por lo tanto, el más situado hacia la derecha. La generatriz que por el pasa contiene también el punto más bajo j. Lo propio razonaríamos con el punto k, que se encuentra más á la izquierda.

Puntos múltiplos de la proyección horizontal. Los planos diametrales conjugados, con las cuerdas verticales de la esfera y el cilindro, son respectivamente el plano del Ecuador de la esfera, y el plano F′E′E que determina las generatrices del contorno de la proyección horizontal de dicha superficie. Estos dos planos se cortan según la recta O—O′m perpendicular al plano vertical, y por lo tanto, de existir punto doble en el plano horizontal, habrá de situar sobre dicha línea.

El plano que proyecta la recta, O-O′m sobre el plano horizontal, corta á la esfera según el meridiano de perfil, y al cilindro según una circunferencia, igual á la circunferencia de base EAC, puesto que aquí las secciones producidas, por los planos de base y de perfil, son antiparalelas. Según esto, rebatamos dicho plano sobre el horizontal, y entonces la sección circular con el cilindro se confundirá con el círculo EAC, y la correspondiente á la esfera, tendrá por centro el punto E, y por radio el EO′; estas dos secciones circulares se cortarán y la cuerda común yy', perpendicular á O′m, proporcionará por último, el punto doble x, en proyección horizontal, correspondiendo al vertical en los dos puntos x', x''.

Pasemos á la determinación de las sombras de ambas superficies, en cuanto á la esfera, conforme se desarrolló en el párrafo n.° 119 recurriremos al plano de proyección, en donde el círculo de sombra se proyecta según un diámetro de la esfera y así poder deducir los ejes de la elipse de sombra. A este efecto condúzcase por la proyección horizontal R^h del rayo luminoso un nuevo plano de proyección vertical; rebátese luego sobre el horizontal, y así tendremos que la circunferencia de sección, se rebatirá confundiéndose, con el contorno aparente de la esfera en proyección horizontal, mientras que el rebatimiento del rayo luminoso, irá á colocarse en R_1^h tomando $\alpha\alpha'''=\alpha'\alpha''$ y así sabemos que el diámetro $\gamma\gamma'$. perpendicular á R_1^h es el que representa el plano de la curva; de modo que volviendo, todos estos elementos á su verdadero sitio, deshaciendo el rebatimiento antes efectuado, tendremos que las proyecciones γ, γ' de los puntos extremos, irán á colocarse en 4, 4′, sobre la charnela, siendo ahora 4-4′, el eje menor, de la elipse de sombra, que corresponde á la proyección horizontal, en cuanto al eje mayor 3-3′, persistirá como siempre, siendo el diámetro del círculo de la proyección horizontal de la esfera, que obedezca á la perpendicularidad con la dirección de R^h. Trácese pues la elipse con estos dos ejes.

Hágase lo propio con la elipse de sombra del plano de proyección vertical, eligiendo aquí un nuevo plano de proyección horizontal, el cual pasará por R^v y en dirección perpendicular al plano vertical. El rebatimiento del rayo luminoso, es R_1^v el plano de la curva en el rebatimiento, es la recta diametral $\beta\beta'$, dándonos los puntos β, β', los vértices 1, 1′, extremos del eje menor; en cuanto al eje mayor, como siem-

pre sería el 2-2′ diámetro del círculo de proyección vertical, dirigido perpendicularmente á R^v

Para con respecto á la sombra del cilindro, podríamos también, al tratarse, como superficie de 2.° grado, escoger un plano auxiliar, sobre el cual se proyectará la línea divisoria de luz y sombra (aquí ésta se compondría de dos generatrices del cilindro), en una sola recta, este plano, sería el vertical levantado perpendicularmente á la cuerda $\pi\pi'$ á la base circular, cuyos puntos π, π' son los de tangencia de las trazas horizontales de los planos tangentes al cilindro y paralelos al rayo luminoso, se infiere de aquí, que en este caso particular, no tiene cuenta el valernos de la propiedad de las superficies de 2.° grado, resultando más ventajoso, el tratar á la superficie cilíndrica como á desarrollable, en virtud de que para encontrar la dicha cuerda $\pi\pi'$, ya hemos de resolver así, como así, la cuestión como lo hacemos al buscar el plano tangente á una desarrollable.

A este efecto, el medio más breve aquí, es observando, que la base superior del cilindro ya que es circular y horizontal, el determinar la traza horizontal ω'' del rayo luminoso que pasa por el centro F-ω' y con el radio de dicha base circular, trazar la semicircunferencia $\mu\tau\mu'$ y á partir de sus arranques μ,μ' conducir las tangentes $\mu\pi$,$\mu\pi'$, á la base circular, así el perímetro $\pi\mu'\tau\mu\pi'$, será la sombra arrojada, sobre el plano horizontal, al paso que las generatrices, trazadas desde los puntos π, π', constituirán las líneas de sombra propia, de la cual sólo aparece vista en el plano vertical, la $\pi_1\pi_1'$

La sombra arrojada de la esfera, se determinará como en el párrafo n.° 121.

En este caso particular, hay muy poca combinación en las sombras, pues estas únicamente aparecen combinadas en las arrojadas, más no así en las propias, en donde se conservan independientes, cada una de por sí, y es debido semejante circunstancia, á que en el punto δ, en donde se cortan los perímetros de sombra, de cilindro y esfera, el rayo de sombra que por él pasa, pasa también por el punto ρ-ρ' originario en donde se cortan las líneas de separación de luz y sombra propias, no permitiendo semejante coincidencia, que una superficie arroje sombra la una, sobre la otra. La sombra que aparece perdida, para con respecto, al cilindro, luminoso proviene tan solo de la mordedura que infiere á la esfera, internándose en ella.

CAPÍTULO VI

SOMBRAS EN LAS SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

138. Propiedades fundamentales.—Sabido es, que esta clase de superficies, están engendradas por la rotación de una línea cualquiera, alrededor de un eje, con el cual está invariablemente relacionada, formando sistema.

La línea que gira, ó sea la generatriz, puede ser recta ó curva, y esta última plana ó de doble curvatura. De ser línea plana, cabe también que su plano contenga al eje de giro, ó deje de contenerlo *.

Por regla general, siendo la generatriz plana, su plano contiene al eje del movimiento, y entonces también aquí pueden considerarse dos casos distintos; ó bien el eje de rotación corta á la línea generatriz, ó deja de cortarla, y entonces queda entre el contorno interior de la superficie, y el eje una suerte de espacio vacuo circular, formando el conjunto de la superficie como un anillo, de donde les viene el nombre que reciben de *anulares*.

De la propia generación de esta clase de superficies, se desprenden gran número de propiedades que les son esencialmente peculiares, distinguiéndolas de todas las demás, y facilitan grandemente las cuestiones inherentes á las som-

* Caso del hiperboloide de revolución y de una hoja, que se considera engendrado por el movimiento de revolución de una recta, alrededor de otra, no encontrándose las dos en un mismo plano.

bras, permitiendo con ello, diversidad de medios, mucho más fáciles, rápidos y exactos, que los que se derivan de los procedimientos generales

Las dos agrupaciones de líneas principales en las superficies de revolución, son los paralelos y los meridianos; los primeros, son círculos descritos por cada uno de los puntos de la generatriz, al describir el movimiento de giro; esta es la razón porque al producir á la superficie una sección por medio de un plano perpendicular al eje, siempre aparece un círculo. Los meridianos son las secciones hechas á la superficie, por los planos que pasan por el eje; las líneas meridianas son todas iguales, y lo son, precisamente por ser círculos los paralelos.

Si la generatriz es plana, ella misma constituye de por sí el meridiano.

De esta misma generación nace, que las normales á la superficie á lo largo de un mismo paralelo, forman un cono de revolución, cuyo vértice es un punto del eje, así como también las tangentes á la superficie, á la vez que á los meridianos en los puntos en que éstos son cortados por un mismo paralelo, están igualmente inclinadas con respecto al plano de dicho paralelo, y concurriendo en un mismo punto del eje, así es, que en conjunto forman un cono recto cuya base es el paralelo, y cuyo vértice está en el eje. De semejante propiedad nace otra no menos importante, y que recurrimos en la cuestión de las sombras, cual es de que: *todo plano tangente en un punto de una superficie de revolución, contiene la tangente al paralelo y la tangente al meridiano en el propio punto*. Ambas á dos líneas de fácil trazo, y cuyas tangentes en el punto considerado, determinarán por completo el plano tangente.

El plano tangente en un punto de una superficie de revolución, es perpendicular al meridiano que pasa por el punto de contacto.—Semejante propiedad, se desprende desde el momento, que la normal en dicho punto á la superficie, siendo perpendicular al plano tangente y además contenida en el plano meridiano, todo plano que pase por ella será perpendicular al plano tangente, y por tanto no será excluído de esta condición el plano meridiano á que nos referimos.

De la generación natural de las superficies de revolución, se desprende otra clase de engendro, al que también acudimos algunas veces para la determinación de la línea de sombra, y es, que puede considerarse como el *lugar geométrico de las distintas posiciones que puede tomar un círculo en movimiento, de modo que su centro recorra todos los puntos del eje, y su plano siempre perpendicular á este eje, aumentando ó disminuyendo su radio, con arreglo á las magnitudes de las mínimas distancias que existan, entre los distintos puntos de la meridiana y el eje respectivo, y rasando en dicho movimiento el círculo generador, por la meridiana.*

De lo expuesto se infiere:

1.° Que en toda superficie de revolución siempre es posible trazar (fig. 138, lám. 20) á lo largo de un paralelo cualquiera *acb*, un cono que le sea tangente V*acb*, cuya base será este mismo paralelo y cuyo vértice estará situado en el eje, y por lo tanto, siendo tangentes estas dos superficies, todo plano tangente á una de ellas lo será igualmente á la otra.

2.° Que tomando en consideración un meridiano (figura 139) cualquiera *abdce* de la superficie, si por todos los puntos *a*, *b*, *d*, etc., en donde este meridiano corta á los distintos paralelos, se trazan tangentes á estos últimos, estas rectas AA′, 1-1, 2-2, 3-3, *c-c*′, serán perpendiculares al plano del mencionado meridiano, constituyendo un cilindro tangente á la superficie, á lo largo del meridiano escogido, luego; ambas superficies tendrán los planos tangentes comunes.

3.° Que si en un meridiano (fig. 40) E*ab*E′ de toda superficie de revolución, se le traza por un punto *a*, una circunferencia *adefg* que le sea tangente, al girar el meridiano para engendrar la superficie, la circunferencia girará igualmente conservándose siempre tangente á dicha curva meridiana, describiendo el punto de tangencia *a*, una circunferencia perpendicular al eje, y á ambas curvas, resultando de ello, que el círculo generador *adef* engendrará una esfera verdaderamente tangente á la superficie de revolución, á lo largo del paralelo común *ae*, infiriéndose de aquí que todo plano tangente á la esfera en un punto del paralelo *ae*, será igualmente tangente á la superficie de revolución.

Resulta, pues, de aquí, que todo el artificio consiste, para encontrar puntos de tangencia ó de la línea de sombra en una superficie de revolución, en hacer depender dicha superficie de otras más fáciles, cuales son el cono, el cilindro y la esfera, lo cual constituyen otros tantos métodos conocidos por los

de la evoluta cónica el primero, de la evoluta cilíndrica el segundo y de la evoluta esférica el tercero, llamados así, por la propiedad que tiene la superficie de revolución, de poder ser engendrada como si fuese superficie envolvente de las posiciones de un cono, que moviéndose de una manera continua y su vértice recorriendo los distintos puntos del eje, las generatrices de dicho cono van siendo sucesivamente tangentes á la línea meridiana, correspondiente, siendo respectivamente sus bases, los distintos paralelos de la superficie, y el ángulo al vértice abriéndose ó cerrándose, directo ó invertido, según sea la índole de la curva meridiana.

También puede considerarse la superficie de revolución como la envolvente, de las intersecciones sucesivas de un cilindro perpendicular á un plano meridiano, cuya base sea la propia curva meridiana, entonces girando este cilindro alrededor del mismo eje de la superficie, sus intersecciones en dos posiciones infinitamente próximas, irán produciendo el lugar geométrico, que no será otro, que nuestra superficie de revolución.

Del mismo modo la superficie de revolución, es dable engendrarla, por el movimiento continuo de una esfera, cuyo centro recorre los puntos del eje de la citada superficie, mientras que su radio va aumentando ó disminuyendo confundiéndose sin cesar con las normales á la superficie, á lo largo de un mismo meridiano y comprendidas respectivamente en magnitud entre los trechos que median entre los puntos de la curva meridiana y el eje; entonces dos posiciones infinitamente próximas, se cortan según el paralelo que corresponde á la superficie; en una palabra; que la superficie de revolución es el lugar geométrico ó envolvente de las posiciones de la esfera. En estos tres casos, las características correspondientes á las intersecciones de las evolutas, son simplemente círculos.

Pondremos, pues, en práctica estos tres sistemas, en los párrafos siguientes:

139. Sombra de la peana, método de la evoluta cónica.— Es la peana, tal como aquí consideramos, una suerte de base, pie ó apoyo para sustentar algún detalle artístico; así se dice de la peana, de un busto, de un jarrón, de un balaustre, etcétera, etc.

En la peana, entra en general á formar parte del cuerpo de sus molduras, la que se conoce con el nombre de *escocia*, y ella es la superficie de más importancia, y que verdaderamente caracteriza y da tipo especial al conjunto de dicha peana, y por la cual motiva que se estudie su sombra en particular *.

Por lo demás, sea en la (lám. 20, fig. 141) el perfil compuesto de la recta G″G′, la escocia formada por los dos cuadrantes G′H′, H′K′, y la recta K′K″, concibamos ahora que todo este perfil, gira alrededor del eje vertical O″O$_1$-O, entonces nos engendrará en el movimiento, la referida peana, que aquí estará compuesta de un platillo superior horizontal, de forma cilíndrica, considerado verticalmente; luego del cuerpo de revolución que constituye verdaderamente la escocia, y finalmente de un cilindro vertical de base circular.

El contorno aparente horizontal lo formarán, la circunferencia de mayor radio OK, la de menor radio OH que constituye el collarino de la superficie, ó sea círculo de garganta, y finalmente de la circunferencia de radio OG, proyección del platillo superior y circular.

Con estos datos, procedamos ahora al problema de la sombra, acudiendo á superficies cónicas auxiliares, que nos sustituyan momentáneamente á la superficie de la escocia. A este efecto, propongámonos encontrar los puntos de la línea de sombra que estén situados sobre un paralelo dado de la superficie, el P′*p*′ por ejemplo, y para ello por el punto *p*′ del paralelo en donde encuentra al meridiano principal, conduzcamos á éste la tangente C′*p*′, y será evidente que al girar el meridiano para el engendro de la superficie, lo hará igualmente su tangente, conservándose como á tal, en todas las posiciones; y así obtendremos un cono de vértice C′, y de base el paralelo P′*p*′, tangente á la superficie de la escocia, á lo largo del indicado paralelo; conduzcamos á este efecto al cono, dos planos tangentes paralelos al rayo luminoso R^v-R^h; determinando ello, dos líneas de contacto que al encontrar las bases del cono facilitarán los puntos que se desean.

* La escocia es una moldura cóncava, formada ordinariamente por dos cuadrantes de círculo tangentes, uno de ellos el superior, de menos radio que el inferior. Otras veces esta sección meridiana viene acusada por una curva de sentimiento, imitando algún tanto á los dos cuadrantes referidos. Ordinariamente se emplea en las bases de las columnas, en especial en la jónica y compuesta, en la cual aparecen hasta dos escocias combinadas con los toros. Su nombre es derivado del adjetivo griego σκότιος, que vale tanto como obscuro, porque siendo su superficie profundamente cóncava produce mucha sombra, la cual hace que resalten y se acentúen mejor las otras molduras compañeras de ella.

Mas al objeto de que la solución ó procedimiento sea general, y pueda evitarse en ciertos casos que el vértice de semejante cono fuera inaccesible, fijémonos en un punto tal como el O'-O del eje, por el cual haremos pasar interinamente los vértices de los conos referidos. En efecto, concíbase que el cono cuya generatriz es C'p', le impulsamos un movimiento de descenso, paralelo á sí mismo, recorriendo el vértice C' todos los puntos del eje hasta trasladarse en O', entonces el cono en la nueva posición, será el O'T'O₁, y su base se proyectará horizontalmente en el círculo de radio OT. Fíjese ahora bien, en que á pesar de este movimiento, la proyección horizontal no habrá variado para nada, subsistirá como antes, pues cada uno de los puntos en el recorrido, lo han hecho mediante líneas verticales, las que se proyectan en un solo punto sobre el plano horizontal; con este precedente, encontremos con el auxilio del R^v-R^h las líneas de separación de luz y sombra en el cono (n.° 90), y para precisar mejor las operaciones al trazarse las tangentes á la base desde el punto de traza S, constrúyase una circunferencia de diámetro OS, y ella al cortar á la base del cono en I, *i*, dará los pies ó trazas horizontales de semejantes generatrices de la superficie cónica, y que satisfarán la cuestión, toda vez que los puntos M y *m*, donde dichas rectas cortan al círculo de nuestro paralelo escogido, son en proyección horizontal puntos definitivos de la curva de sombra. En cuanto á la proyección vertical, bastará el traslado de la nueva posición del cono á la antigua, en cuyo caso en dicho movimiento, sabemos que los puntos M y *m* se moverán sobre líneas proyectantes verticales, trasladándose en M', *m'*.

Escogiendo otro paralelo, y repitiendo la operación, tendremos nuevos puntos; mas si bien se observa la índole especial de la superficie, ello nos permitirá encontrar puntos aun con más rapidez.

Para ello, veremos que podemos trazar á la meridiana otra tangente, tal como es la que pasa por Q, y que sea paralela á la anterior p'C'; con ello tenemos que dicha tangente en Q, al girar la superficie engendra ella un cono de vértice *c"*, y de base circular el paralelo Q'q'; además este cono es paralelo al anterior considerado, y tal, que al trasladarlo subiendo, hasta que el vértice *c"*, se confunda con el anterior O', habrán llegado ambos conos á coincidir perfectamente, convirtiéndose en uno solo, aunque el nuevo, ocupará la

hoja superior de la superficie y el antiguo la hoja inferior; así las operaciones hechas para uno, servirán perfectamente para el otro, cuidando no más de tener en consideración la hoja de que se trate. Convengamos, pues, que se han hecho todas las operaciones antes expresadas, en cuyo caso hemos visto que las líneas de contacto con el cono eran las OI, O*i*, más como ahora es la hoja opuesta la que usamos, claro es que habremos de tener en cuenta, las prolongaciones de las rectas OI, O*i*, hacia la parte opuesta del vértice O, y así ellas prolongadas cortarán en *n* y en N el paralelo de base cuyo radio es OQ, esto es, el círculo proyectado verticalmente en Q'*q'*. Termínese luego la operación haciendo el traslado en el plano vertical en N' y *n'* de los puntos encontrados, descendiendo el cono O', hasta que dicho vértice coincida con el verdadero *c"*, ya hemos dicho que la proyección horizontal no varía.

Los planos verticales tangentes á la superficie, y á la vez paralelas al rayo luminoso darán inmediatamente los límites D y *d*, situados sobre el círculo de garganta de la superficie, y como á tal proyectados verticalmente en D', *d'*, verdaderamente son límites, pues la curva en ellos es tangente á la circunferencia del collarino en la proyección horizontal (no en el espacio).

Los puntos 1-1', 2-2', situados en el contorno aparente vertical, en que la curva pasa de vista á oculta en dicha proyección, siendo á la vez tangente á la línea meridiana, se obtienen por medio del plano tangente á la superficie, paralelo al rayo luminoso y perpendicular al plano vertical; así es que trazando las simples tangentes en 1 y 2 al rayo luminoso, y precisando los puntos de tangencia, se tendrán determinados dos puntos más.

Si nos detenemos ahora á examinar que para cada operación efectuada para encontrar los puntos M y *m*, por el procedimiento ordinario ó general se han trazado dos tangentes á una determinada circunferencia, siempre de centro O y el punto exterior siempre en el punto S, inferiremos que en cada operación se obtendrá un par de puntos, tales como M, *m*, N, *n*, etc., cuales dos á dos simétricos para con respecto á un eje de simetría cual es el OS, situados en un mismo plano horizontal Pp', Q'q', etc.; de modo que haciéndonos cargo ahora de todos los puntos enlazados con semejante disposición, vendremos á deducir, que la curva del espacio es tal, que uni-

dos los puntos pareados de que hemos hecho mención, nos darán una serie de cuerdas horizontales, cuales quedarán divididas en dos partes iguales, por el plano meridiano paralelo al rayo luminoso, cual es un plano de simetría de la curva alabeada del espacio. Esta importante propiedad nos conduce fácilmente á concluir, que los puntos más alto y más bajo de la curva, estarán precisamente situados sobre este plano meridiano, toda vez que aquéllos, teniendo la propiedad de que la tangente á la curva es horizontal, claro es que aquélla no se excluirá de la ley general de las cuerdas poco ha citadas; así es, que siendo las cuerdas divididas en dos partes iguales, cuando la cuerda se haya convertido en tangente, ésta continuará siendo horizontal como ellas, y además, los puntos simétricos se habrán confundido en uno sólo, precisamente situado en el eje de simetría OS; será, pues, el punto más alto ó más bajo. Con estos precedentes, será evidente que estos puntos habiendo de estar situados en la meridiana de AS y en planos tangentes paralelos al rayo luminoso, los obtendremos trazando tangentes á dicha curva meridiana, que sean paralelas á las trazas de dichos planos tangentes sobre el referido plano meridiano. (Esta traza es el mismo rayo luminoso situado en el plano vertical OA. Para efectuar, pues, esta operación, gírese el meridiano de R^h hasta colocarlo en O*k*, entonces la curva meridiana se confundirá con la principal, al paso que el rayo luminoso vendrá á colocarse en O'S". Trácense luego las tangentes en *a'* y *f'* á la curva meridiana paralelas al rayo R', y los puntos de tangencia satisfarán á la cuestión, éstos son los *a'*-*a*, *f'*-*f*, pero que luego trasladados en su verdadero sitio, se colocarán en A'-A el más alto, y en F-F' el más bajo.

Refiriéndonos otra vez á la propiedad de simetría de dicha curva de sombra, y teniendo en cuenta que idéntica propiedad se reproducirá, cualquiera que sea la curva meridiana que engendrara la superficie de revolución, vendremos á deducir que dicha propiedad es común para todas las superficies del mismo género, y esto tanto en el plano horizontal, en que el eje de simetría es la proyección horizontal del rayo luminoso, que pasa por la traza horizontal del eje; como en el espacio, en donde la simetría tiene lugar, para con respecto al plano vertical meridiano, paralelo al rayo luminoso; en su consecuencia pueden establecerse los dos siguientes teoremas:

Primero: *La proyección de la línea divisoria de luz y sombra de una superficie de revolución, sobre un plano perpendicular al eje, es siempre simétrica, teniendo por eje de simetría la proyección sobre este plano del rayo luminoso, que pasa por el punto de proyección de dicho eje.*

Segundo: *La línea de separación de luz y sombra de una superficie de revolución, en el espacio, es siempre simétrica para con respecto al plano meridiano, paralelo al rayo luminoso.*

Semejantes propiedades de simetría pueden aprovecharse para encontrar nuevos puntos de la curva, conocidos que sean los encontrados hacia á un lado del plano meridiano, contribuyendo á la mayor exactitud y rapidez en las operaciones; así por ejemplo, con los obtenidos desde luego en 1 y 2, de ellos se deducirán los que se hallen en simetría para con respecto á la recta R^h.

Mas antes de pasar adelante, precisa encontrar las sombras arrojadas sobrepuestas, deducidas la sombra arrojada exterior y general de toda la figura, y para ello, damos por supuesto, encontradas las generatrices L'L", *l'l"*, que son divisorias de luz y sombra del cilindro del platillo, obedeciendo á los planos tangentes al mismo, paralelos al rayo R^h, cuyas tangentes en L y *l* á la base, y paralelas á dicho rayo, dan las proyecciones horizontales de las mismas.

Lo propio suponemos con las generatrices U'U", *u'u"*; proyectadas horizontalmente en U y *u*. Esto supuesto, el semicírculo *lg*L, visiblemente se descubre desde luego ser, divisorio de luz y sombra; la sombra del mismo cae arrojada parte en el plano horizontal en el trecho de semicírculo V"X" con el auxilio del centro ω, traza horizontal del rayo luminoso que pasa por el centro originario O-O", y por radio el mismo O"*g"* del propio círculo original. En cuanto á la parte restante de la sombra, ella cae arrojada en el plano vertical según la parte de elipse X"△v" (n.° 41).

El rayo luminoso, después de haber recorrido el borde la semicircunferencia superior del platillo, baja apoyándose en la generatriz L"L' del cilindro vertical; así describe el plano tangente al cilindro, y así este plano de sombra corta al plano horizontal según la recta V"V', sombra arrojada de L"L'; lo propio sucederá con la generatriz opuesta *l"l'*, cuya sombra se encuentra dividida en dos, la una que cae arrojada en *v"v"* en el plano vertical, y la otra en *v"v'* en el plano horizontal.

Al llegar en L', el rayo luminoso emprende el camino, rasando por la semicircunferencia LG*l*-L'*l'* inferior, en donde se verifica el enlace de la escocia con la base inferior del platillo; dicho rayo describe con ello un cilindro, el cual corta en parte, según la curva ρ'λ'π' á la superficie de la escocia, y luego, siguiendo su camino en el espacio, llega á cortar al plano horizontal según una semicircunferencia V'X*v'*, igual á la originaria, cuyo centro S, será la traza horizontal del rayo que pasa por O'-O. Téngase en cuenta ahora, que las dos curvas circulares del platillo, han de ser en su sombra arrojada tangente á las rectas de sombra de las generatrices del cilindro; así V'V" será tangente á las mismas en V" y V', y lo mismo la opuesta; que efectuará la tangencia en los puntos *v"* á la elipse, y en *v'* á la circunferencia.

Del propio modo el cilindro vertical superior de base, arrojará sombra sobre el plano horizontal, componiéndose aquella (n.° 66) de las dos rectas UW, *uw*, correspondientes á las generatrices verticales U"U'*u"u'*, y luego de la semicircunferencia WY*w*, igual á la original.

Sin embargo, ahora estas sombras se modificarán al hacernos cargo de la combinación que va á tener lugar, cuando tengamos en cuenta la que produzca el cuerpo de la escocia; y para ello, hagamos deslizar el rayo por todos los puntos de la línea divisoria encontrada en A'BD'M'2F'*m'd'*1A', constituyendo así un cilindro, cuyo; encontrando su traza horizontal, nos dará una curva compuesta de cuatro ramas ó partes, cuales son βε, εφε$_1$, ε$_1$β$_1$, β$_1$αβ, divididas unas de otras por los puntos de retroceso β, β$_1$, ε, ε$_1$, puntos, cuyos originarios son los B',*b'*, E', *e'*, en los cuales se verifica (como después veremos) la notable propiedad, de que la tangente á la superficie, lo es también á la curva de sombra, coinciendo pues en ellos el rayo luminoso, con la tangente á la curva, pasando el plano tangente á ser osculador.

Mas, que aparecerá retroceso, en los cuatro puntos mencionados, nos podemos convencer desde luego, una vez admitida la última propiedad; en efecto, la curva encontrada, línea divisoria de luz y sombra en la escocia, es alabeada, si en ella nos fijamos en el punto B, B', en él, el plano osculador de la curva, habrá de ser tangente al cilindro oblícuo á los rayos de sombra, por contener dos tangentes consecutivas de esta curva, siendo precisamente una de ellas la generatriz Bβ, B'β' de dicho cilindro, infiriéndose de aquí, que la traza βθ del plano osculador, será tangente á la curva αβδ, etc.

Mas cuando la curva es alabeada, es bien sabido que su plano osculador en el elemento que se considera, atraviesa á dicha línea, dejando parte de ella á la derecha y parte á la izquierda, dando lugar á ello á que aparezca una inflexión ó un retroceso. Pues bien, en nuestro punto B, el plano osculador, siendo como hemos dicho tangente al cilindro luminoso, tendrá por traza horizontal la recta βθ, paralela á la horizontal Bθ', tangente al paralelo que pasa por B; esta βθ, ha de dejar por precisión, parte de la curva hacia á un lado y parte de ella hacia al otro, en fuerza de la osculación del plano; mas aquí no cabe inflexión, pues para que ésta existiera, sería preciso, que á partir del plano vertical Bβ, hacia acá del plano osculador, hubiera puntos de la curva para trazar por ellos rayos luminosos y producir la curva βξ' que sustituiría á la βξ; mas como tal hipótesis no es aquí posible, por ser B punto límite, á partir del cual ya no hay más puntos más acá del rayo Bβ, de aquí desechando la inflexión, ha de ocurrir forzosamente retroceso αβδ.

De la combinación de las sombras arrojadas, resulta ahora, que si nos fijamos en el punto γ, γ' y por él hacemos partir un rayo de sombra, este punto por encontrarse en las dos sombras arrojadas del platillo y de la escocia, será tal, que dicho rayo se apoyará en ρ" en la circunferencia paralelo superior de la escocia, á la vez que será tangente á la misma superficie en el punto ρ', luego γ es sombra arrojada á la vez de los dos puntos ρ', ρ", y lo propio diríamos para con respecto al punto γ"; ahora, como toda la curva γ"β"βγ, cae sumergida dentro aquélla de mayor extensión del platillo, deducimos que será la superficie de la escocia, quien la recibirá sobrepuesta, quedando aquélla sumergida, puramente virtual. Encontremos pues dicha sombra arrojada. A este efecto, superiormente, á los puntos ρπ escogeremos un paralelo cualquiera de la superficie, el 6-7 por ejemplo, y nos proponemos encontrar los puntos situados sobre el mismo. Para ello adoptemos este paralelo como base de un cilindro paralelo á los rayos luminosos (núm. 24), encontrando su traza horizontal la que será una circunferencia igual á la misma de base, ahora, ella cortará en ν, ν' á la sombra arrojada circular *v'*X'V'; de manera, que el rayo de sombra cuya traza es ν-ν', podrá considerarse, como la intersección de dos cilindros que tienen una misma dirección, y por lo tanto la generatriz ν'J se apoyará en J en la circunferencia G'*g'* y cortará en *j* al paralelo 6-7, de donde inferiremos que *j* será sombra arrojada de J.

Mas como quiera que, existe en el plano horizontal otro punto de intersección de las dos trazas de los dos cilindros, cuyo punto es el τ-τ′; con él podremos hacer iguales observaciones, viendo que dicho τ-τ′ es simplemente virtual, causa del sobrepuesto en τ_1; de todos modos, para cada paralelo escogido encontraríamos dos puntos pareados, simétricos para con respecto al plano meridiano OS, y por lo tanto enlazados dos á dos por medio de rectas horizontales, perpendiculares á dicho plano meridiano, luego se concluye; de aquí, que ellas forman un sistema de cuerdas horizontales en la curva, y por lo tanto, el punto en donde estas cuerdas se hayan convertido en una tangente, será el punto más alto de la curva, y ello se verificará notoriamente en el plano meridiano OS. Este punto λ, se obtendrá, observando, que el plano meridiano corta á la superficie según la curva meridiana y al cilindro de los rayos luminosos, cuya base es G′g′ según un rayo luminoso, el cual cortando á dicha meridiana, será el punto en cuestión.

Así, pues, para efectuar dicha operación, giremos el plano meridiano OS, de modo que se confunda con el principal OS‴ tal como antes ya habíamos efectuado para operación semejante; el rayo luminoso hemos visto que venía rebatido en R′, y como el que pasa paralelo á él por el punto más saliente G′ corta en λ″ á la meridiana, éste será el punto en cuestión, el cual trasladándole á su verdadera posición, vendrá en λ′ y con él, la curva π′λ′ρ′ será la línea definitiva. Observemos de paso (núm. 27) que dicha curva será tangente á los rayos luminosos en los puntos π′, ρ′.

Considerando ahora de otra parte, el punto ξ donde se cortan las sombras arrojadas de la escocia, y del paralelo mayor en donde empieza el cilindro; si por este punto se traza un rayo de sombra, éste rasará por Z′, al mismo tiempo que será tangente en φ á la escocia, igual fenómeno resultará con su simétrico ξ″, esto, unido á que la sombra ξε de la escocia cae inmergida dentro de la mayor extensión limitada con el círculo WY*w*, deducimos que queda virtual en el plano horizontal, y en cambio es recibida sobrepuesta en la misma superficie de la escocia, en la curva que media desde Z hasta E teniendo muy poca curvatura, y en la práctica puede construirse á mano, como artísticamedte se llama de sentimiento. Mas si á tal extremo quisiéramos llevar la exactitud; un punto cualquiera de ella, puede encontrarse del modo siguiente:

Teniendo en cuenta que la curva que vamos á buscar, es la intersección de la parte inferior de la escocia, con el cilindro de sombra, cuya base es la curva φ′M′E′, escogeremos un punto intermedio M-M′, por él, hágase pasar un plano vertical paralelo al rayo de luz $R^v R^h$, averiguando en seguida el corte que produce en la superficie de la escocia. Esta sección nos la indicarán los puntos en que la traza horizontal del plano sector corte á los distintos paralelos de la superficie, cuales puntos referidos en las rectas horizontales que representen las proyecciones verticales de dichos paralelos, nos darán unidos, la proyección vertical de la curva, y ésta, cortando por último al rayo luminoso que parte de M′, dará en definitiva el punto de sombra arrojada sobrepuesta.

Terminarase esta curva según hemos indicado en el punto E-E′, puesto que en este punto *singular*, el rayo luminoso, ofrece un contacto de segundo orden con la escocia, lo cual indica, que tres puntos de sección de la recta con la superficie se habrán confundido en uno sólo, cuyo requisito es con evidencia el que debe resultar, de reunirse la curva de intersección E′Z′ con la línea de contacto D′M′F′. Lo mismo aparecerá para con respecto á la curva simétrica que media de de *e-e′* á *z-z′*. En virtud de lo dicho resultará, que el arco EF*e* de la separación, será sólo virtual, lo cual tiene fácil explicación si atendemos que los rayos que son tangentes al escociado desde el punto B hasta al E son tangentes exteriores, mientras que los que median, desde E hasta F son simplemente virtuales (núm. 21), esto es, tangentes en lo interno de la superficie, no pudiendo por lo tanto alcanzar á tamaños puntos de contacto, pues quedan interceptados por la masa opaca del propio cuerpo; por la cual, en la parte más anterior ya han resbalado.

140. Sombra del toro. Método de la envolvente cilíndrica.—El toro es una superficie anular, engendrada por la revolución de un círculo en torno de un eje, situado en el mismo plano de dicho círculo, aunque en disposición tal, de que no puede cortarlo; esta es la razón, porque siempre quedará con semejante superficie un espacio vacuo circular alrededor de dicho eje, el cual forma lo que constituye el *Anulo*. *

---

* La superficie así formada es de gran aplicación como á moldura arquitectó-

Semejante superficie tórica, aunque al parecer individual, por ser una la generatriz que la engendra, cual es una circunferencia, sin embargo, bajo el punto de vista geométrico, se compone de dos superficies bien distintas una de otra; y tal es así, que cada una de ellas tiene su respectiva línea de sombra, y á más, entran de por sí en dos agrupaciones muy diversas en la familia de las superficies, cuales son las superficies *convexas* y las no *convexas*, perteneciendo á las primeras la mitad del toro considerado en su parte externa, y á las segundas la referente en su otra mitad que se encuentra más próxima al eje, sea como fuera, ya más adelante volveremos á insistir sobre el particular.

Mediante estos precedentes, sea (lám. 21, fig. 143) $O'O''$-O el eje vertical de la superficie, así como la circunferencia de centro ω'-E la generatriz, la cual en su movimiento de revolución, nos da la superficie tórica dibujada en su contorno aparente en el plano vertical, por las semicircunferencias $E'AE''$, $E'''BE^{IV}$ enlazadas ambas á dos, por las tangentes horizontales límites $E'E'''$, $E''E^{IV}$, esto para lo que respecta á la superficie exterior vista, y convexa; por lo referente á la otra mitad interior, oculta y no convexa, queda representada por puntos según las otras dos semicircunferencias $E'CE''$, $E'''DE^{IV}$, continuando las horizontales límites $E'E'''$, $E''E^{IV}$, tangentes á ambas curvas.

Por lo que respecta al contorno aparente de la proyección horizontal, quedará concretado á dos circunferencias concéntricas, cuyas son la de radio máximo OA' correspondiendo al ecuador de la superficie, y la de radio OC' que se

---

nica, empleándola ya en grandes dimensiones en las bases de las columnas, y aun en algunas de ellas, como en la *Atica* ó Corintia; lleva dos toros, el uno *superior* y de más pequeñas dimensiones que el llamado inferior, que aparece más robusto. Es digno de citar el célebre y renombrado toro de la columna Trajana en Roma, pues él casi absorve por completo la base de dicha columna.

En general se emplea no más la mitad exterior del toro, esto es, la parte convexa del mismo, llamándose *semi Bocel* y también *cuarto Bocel,* cuando se une tan sólo la mitad del Bocel cuya moldura que así resulta, es frecuentísima en su uso para que forme parte del molduraje de cornisas y cornisamentos, y es la que destaca más de sus compañeras, absorviéndolas muchas veces por el efecto que produce.

Empleado el toro en dimensiones reducidas, es de un gran auxilio para la composición del molduraje, apareciendo según su situación y dimensiones más ó menos pequeñas, bajo los nombres de los llamados *Baquetón*, *Junquillo*, astrágalo, así como el de caveto, etc.; si se aprovecha de semejante superficie la parte meridiana más próxima al eje, pero tomada en el sentido de su concavidad.

refiere al paralelo mínimo referente al ánulo; queda pues en el interior de la superficie un hueco circular, cuyo, tiene el rayo indicado en OC', R^vR^h es el rayo luminoso, y con arreglo á él, se desea encontrar la línea de separación de luz y sombra, echando mano del procedimiento del cilindro envolvente. Al efecto escogemos un meridiano cualquiera, el O-1 por ejemplo, proponiéndonos encontrar cuáles son los puntos de la curva línea divisoria de luz y sombra, situados precisamente en dicho meridiano; para ello, imaginemos por todos los puntos de la sección circular meridiana HG, una serie de rectas perpendiculares á su plano, éstas con evidencia formarán un cilindro perpendicular á dicho plano, al mismo tiempo que, tangente á la superficie á lo largo de aquella sección circular, y efectivamente será tangente, pues cada una de dichas generatrices, lo será á un paralelo de la propia superficie; este cilindro pues vendrá expresado horizontalmente, por las dos generatrices límites del contorno aparente que parten de H y de G. Aquí no está dibujado este cilindro, pues no hace falta para nada su dibujo, basta sí, concebirlo en el espacio.

Ahora se comprenderá perfectamente, que todo plano tangente al cilindro, lo será á la superficie tórica en el punto preciso, en donde la generatriz de contacto corte á la base circular meridiana, y por lo tanto habremos hecho depender el plano tangente á la superficie dada, del que corresponde á otra mucho más fácil, el cilindro.

Resolvamos pues este último problema con arreglo (número 66), teniendo siempre en cuenta que el plano tangente al cilindro ha de ser peralelo al rayo luminoso *; con ese fin escojamos un punto F, F' del espacio, condúzcase por él, un rayo luminoso y una paralela á las generatrices del cilindro; las trazas de estas dos rectas sobre el plano meridiano, nos dará la recta OF'', de modo, que trazando ahora paralelas á la misma, que sean tangentes al círculo meridiano, los puntos de tangencia nos darán definitivamente los que buscamos. Mas esta operación no podemos hacerla cómodamente, en virtud de que el plano meridiano es vertical, y oblícuo con

---

* Al objeto de facilitar las operaciones, cuales se repiten para cada meridiano escogido, se ha hecho pasar el rayo luminoso por el punto O'-O del eje, pues éste así será traza del rayo luminoso sobre cualquier plano meridiano que se escoja, y así encontrada la traza para uno de ellos, estará encontrada para todos.

respecto al de proyección del mismo nombre, por este motivo lo giraremos hasta colocarlo en el meridiano principal OB′, pues allí se podrán efectuar las operaciones tal como son en el espacio. Con semejante movimiento, los círculos meridianos se habrán confundido respectivamente con los principales, cuyos centros son ω′, ω″, y en cuanto al rayo luminoso, se habrá colocado en R′ según es de ver en las construcciones de giro. Si conducimos ahora por ω″ y ω′ un diámetro perpendicular á la dirección R′, su intersección con las curvas circulares, nos darán los puntos de tangencia precisados en I, J, I_1, J_1; faltará tan sólo deshacer el giro para colocarlos á la posición que les concierna en su meridiano respectivo, cuyas operaciones fáciles de por sí, se comprenden y nos dan en definitiva I'_1-I''_1, J′-J″ para la curva exterior, y los I′-I″, J'_1-J''_1 para la curva interior.

Repitiendo análoga operación para otro meridiano cualquiera, iríamos así obteniendo nuevos puntos; nos concretaremos pues para abreviar, á buscar los puntos más notables de la curva, y entre ellos son los que están situados en el meridiano de perfil 0-2. Estos puntos son notables, y para convencernos de ello, bastará notar, que para cada operación que hagamos, se encuentran cuatro puntos, y ellos dos á dos, tales como son I′ junto con I'_1, y J′ junto con J_1' se hallan colocados á un mismo nivel perteneciendo uno de ellos I'_1, á la curva exterior, y el otro, á la interior, lo mismo sucede con J′ y J_1', luego mediante tal propiedad, los puntos que pertenezcan al meridiano de perfil indicado, se confundirán dos á dos en la proyección vertical en un solo punto K, L, el primero teniendo por proyección horizontal los K′, K″, y el otro L′, L″. La dirección del cilindro envolvente para con respecto á este meridiano, es la perpendicular FF_1 á la dirección 0-2, y después de girado este plano 0-2 hasta confundirse con el OB′, resultará que la dirección de la traza del plano tangente al cilindro envolvente, sobre el plano de su base, se colocará en $O'F_3$, la cual llamaremos R″, bastando ahora trazar tangentes á la circunferencia de centro ω″ paralelos á R″, y los puntos de tangencia K_1, L_1, precisados por el diámetro K_1L_1 perpendicular á R″, nos darán como en la operación anterior el nivel en que se encuentran los puntos de sombra, cuales no habrá más que colocarles á su posición respectiva. Los puntos que se encuentran en el meridiano principal A′B′, sabemos ya por geometría descriptiva, que pertenecen al contorno aparente de la proyección vertical, y su determinación se obtiene desde luego, trazando tangentes á la curva meridiana, paralelas á la proyección vertical del rayo R^v, y así ha de ser, porque en semejantes puntos, el plano tangente, es perpendicular al plano vertical de proyección; así se obtienen los M-M′, N_1-N_1', pertenecientes á la curva exterior, y los N-N′ y M_1-M_1' referentes á la curva interior.

También son límites los que obedecen á planos tangentes á la superficie, paralelos al rayo luminoso y que sean verticales, por los que se hallan situados en el plano AB del ecuador y en ellos la curva pasa de vista á oculta en el plano horizontal, tales puntos se encuentran directamente, en Q-Q′, P-P′ para la curva exterior, y Q_1-Q_1', P_1-P_1' para la interior; deducidos directamente por el trazado de la tangente á las circunferencias del ecuador y de garganta paralelas á la proyección horizontal del rayo R^h.

Recordemos aquí conforme indicamos al hablar de la escocia, que la curva de sombra ha de ser simétrica en su proyección horizontal, para con respecto á la traza horizontal del plano meridiano paralelo al rayo luminoso, pudiendo en esta superficie como en todas las de revolución, sacar gran partido de semejante ventaja, pues, conocidos que sean algunos de sus puntos, pueden ya trasladarse sin más operaciones; simétricamente para con respecto á dicho eje de simetría; además, aquí como allí, y siempre fundándonos en la misma propiedad de simetría, se inferirá que los puntos más alto y bajo de la curva, han de estar situados en el plano meridiano OR^h, que contiene al rayo luminoso; si pues aplicamos el procedimiento de los demás meridianos, para el nuestro, que es ahora el OR^h, tendremos que éste girará para colocarse en OA′, y así el rayo luminoso vendrá en R‴, las paralelas á él y tangentes al círculo ω′, darán las puntos R_2-S_2, cuales trasportados á su debida posición, darán el punto más alto R-R′, y el más bajo S S′ de la curva exterior, así como el más alto R_1-R_1' y el más bajo S_1-S_1', de la curva interior.

Mas aquí, en esta superficie especial, existe una doble simetría, en virtud de ser simétrica con respecto al plano del ecuador, y en efecto, para cada paralelo que se escoja tal como K_1K_2 sobre el plano del ecuador, existirá otro exactamente igual hacia la parte inferior, y ambos á dos proyectados sobre una misma circunferencia en el plano horizontal. Sea, pues, el paralelo K_2K_1 y su simétrico hacia la parte in-

ferior, los cuales se proyectan en uno solo horizontalmente en la circunferencia $K^2K^1\ T_1L''$, recordando ahora el procedimiento empleado en la escocia, para encontrar puntos de la curva de sombra, situados sobre un paralelo de la superficie, no será difícil ver claramente, que aquí existirán dos conos envolventes iguales y paralelos, uno directo, otro invertido, y que encontrando las generatrices de contacto de uno de ellos, con planos tangentes paralelos al rayo luminoso, para cada generatriz de uno de ellos, por ejemplo, el directo, tendremos, un punto de tangencia K′, y que esta misma generatriz prolongada hacia la parte opuesta 0-2 en proyección horizontal esta 0-2, representará en dicha proyección horizontal, la parte de generatriz correspondiente del cono invertido, siendo la distancia $OK' = OL''$, lo mismo sucederá con $OT' = OT_1$, resultando de aquí, que los puntos T', K', T_1, L'' se encuentran sobre una circunferencia, y que dos á dos, esto es, L'' con T_1, K' con T' se encuentran igualmente y con simetría para con respecto á la traza horizontal P′Q′ del plano meridiano, perpendicular á la proyección horizontal del rayo luminoso, lo propio sucedería comparando los puntos K'' con t_1, y L' con t referentes á la curva interior. Se comprende ahora, que igual propiedad tienen los demás puntos, infiérese de aquí el siguiente teorema.

Toda superficie de revolución que se halle simétrica para con respecto á un plano perpendicular al eje, la proyección de la línea divisoria de luz y sombra, estará dispuesta simétricamente para con respecto á la traza horizontal* del plano meridiano perpendicular al meridiano que contiene el rayo luminoso.

Pasemos ahora á la sombra arrojada de la superficie, esta sombra se compondrá también de dos partes, una de ellas que corresponderá á la línea de sombra exterior del toro, y la otra á la interior; en cuanto á la primera su determinación no ofrece nada de particular, será simplemente la intersección de las generatrices del cilindro paralelo al rayo luminoso, y que es tangente á la superficie tórica en todos los puntos de la línea divisoria de luz y sombra propia, por consiguiente, las trazas, ya sean horizontales ó ya verticales de dichas generatrices, nos darán dicha sombra arrojada, la cual

* Decimos traza horizontal, porque aquí el plano del ecuador, que es el simétrico, es horizontal, pero de no serlo habríase de entender que es la traza sobre dicho plano; estuviera inclinado como fuera en el espacio.

parte de ella cae sobre el plano horizontal en la línea UYZ, y la otra en el plano vertical en UVX; y en cuanto á la que se refiere á la interior ó sea á la superficie no convexa, ofrece particularidades dignas de mención, dando lugar á una serie de fenómenos, por los cuales, venimos en conocimiento del especial modo de obrar las sombras sobrepuestas, y que se convierten en virtuales sobre las mismas superficies de los cuerpos de que se trata. Para apreciar en sus verdaderas consecuencias lo que realmente pasa en el espacio, encontremos desde luego la intersección con el plano horizontal, del cilindro luminoso ó de sombra tangente hacia la parte interna de la superficie, teniendo, por lo tanto, como á base, la línea de doble curvatura que constituye la divisoria de luz y sombra, y así prácticamente nos convenceremos, que este cilindro se compone de cuatro partes: 1.ª La una que tiene por base todo el trecho de curva comprendido en $b'R_1'I''$ la cual produce la sombra arrojada *bif*. 2.ª La otra, su base, es $I''h'$, cuya sombra es la curva *hgf*. 3.ª La que tiene por base la curva que media en $h'S_1'J_1''$ y tiene por sombra la línea *hja*, y finalmente la 4.ª la $J_1''b'$ que tiene por sombra la curva *acb*.

Si ahora observamos dicha sombra arrojada, veremos que dos de estas cuatro partes de curva, se cortan en los puntos *d* y *e*, indicando ello, que el rayo de sombra que los ha producido, se apoya á la vez siendo tangente en dos puntos distintos de la curva originaria; así es, que fijándonos en el punto *d*, el rayo de sombra que de él parte, corta en d'_1 hacia la parte inferior de la curva, y en d'' hacia la parte superior; luego deducimos que d'' arroja sombra sobre la propia superficie en d'_1; más como en d', el rayo se conserva tangente, prosigue su camino en el espacio, hasta encontrar el plano horizontal en el punto *d*. Lo mismo diremos del punto *e*.

Por otra parte, y en virtud de lo que acabamos de exponer, no será difícil deducir que á partir del punto d'', ya que $d''d'_1$ es un rayo de sombra límite, que cuando él resbale por el trecho $d''b'Q_1'J_1''L'd'$, no podrá llegar al plano horizontal, quedando interceptada la sombra arrojada sobre la propia superficie, por lo que inferimos que todo el trecho arrojado en el triángulo curvilíneo *dba*, queda simplemente como á sombra virtual. Lo propio sucederá con el triángulo curvilíneo simétrico *ehf*.

Resulta, pues, que para ultimar el problema, precisa determinar la sombra sobrepuesta cuya principio en b' y con-

cluye en d'_1. Su determinación es fácil, demos por supuesto que se trata de averiguar la sombra sobrepuesta que arroja el punto *t*; hagamos pasar por este punto un plano secante vertical, paralelo á los rayos luminosos, este plano cortará á los distintos paralelos de la superficie según puntos, cuales són fáciles de encontrar en proyección horizontal, y de allí deducirlos en la proyección vertical en los paralelos donde correspondan, unidos todos estos puntos, darán la curva de intersección del plano auxiliar con la superficie en general; de modo, que, encontrando ahora la intersección de las dos proyecciones verticales, tanto de la curva, como del rayo luminoso que parte del punto *t*, el que así encontremos, será en definitiva, la sombra arrojada sobrepuesta, que corresponde á *t*. Lo propio haremos con los demás, repitiendo igual operación para la curva simétrica que empieza en I″ y concluye en *c*′. De ello resulta en la parte arrojada un trecho de plano horizontal *diej*, en el cual llegan libremente los rayos luminosos, apareciendo el interior de este contorno iluminado, en medio de la masa general de la sombra de la superficie; es debido por lo mismo en virtud de la conformación de la misma, por el ánulo, corona ó hueco, que permite el libre paso de los rayos luminosos. Se comprende fácilmente que esta parte iluminada en cuanto á su extensión, puede sufrir infinidad de variaciones, según sea la inclinación del rayo luminoso para con respecto al eje de la superficie; así, dicha extensión puede ser más ó menos grande, más ó menos reducida, y aun también dar lugar los datos, á que no exista, apareciendo la sombra en una sola mancha sin discontinuidad.

Es digno de notarse la aparición de los cuatro puntos *a*, *b*, *h*, *f*, en los cuales se verifica un verdadero retroceso, correspondiendo á los puntos originarios J_1'', *b*′, *h*′, I″ cuyos, son verdaderos puntos singulares, en donde tiene lugar un doble contacto del rayo luminoso con la superficie, cual es, de ser tangente á la superficie, conforme á los demás rayos luminosos, y además de ser tangente á la línea divisoria; así, pues, en ellos la tangente á la curva se confunde con el rayo luminoso, propiedad que no tiene lugar en los otros puntos.

Con ello se infiere que hay un doble contacto según hemos indicado, el plano tangente se convierte en plano osculador, y de él como es natural, han de nacer las consecuencias ingénitas que lleva consigo. Lo propio que dijimos en la escocia se repetirá pues aquí; en su virtud, la traza del plano

osculador nos dará en $b\theta'$, la tangente á la curva en el punto de retroceso *b*, siendo dicha tangente paralela á la tangente $b'\theta$ del paralelo que pasa por el punto *b*′. El plano osculador, á partir del elemento de osculación, deja á la curva por una y otra parte del mismo, por lo tanto, al venir á buscar la traza del cilindro de sombra, y la del plano osculador, se ha de verificar forzosamente una inflexión ó un retroceso, para que tuviera lugar la primera, sería preciso que la curva *acb* viniera en el trecho $b\alpha$, pero esto no es posible, en atención á que siendo límite el punto *b*′, no existen puntos de la curva, más allá del plano vertical, paralelo á los rayos luminosos, que pasa por el punto dicho *b*′, luego hemos de convenir, que viniendo las dos curvas *ba*, *bd*, hacia una y otra parte de la traza del plano osculador y las dos hacia bajo del punto *b*, será un verdadero retroceso el que presente la traza del cilindro de sombra.

Más tarde volveremos á insistir sobre el particular.

141. 3.° **Método de la evoluta esférica. Sombra de un jarrón.**— (Lám. 20, fig. 142.) La superficie de revolución, que para este caso escogemos, es un jarrón de esos que tanto abundan, en el ornato y embellecimiento de los jardines, y también en las fachadas de los edificios El que forma el dibujo de su referencia, se compone de varias partes, el filete α, el cimacio β, la escocia γ, el cuerpo del jarrón, otro filete δ, otra escocia μ, otro filete ν, el toro θ, y, finalmente, la base cuadrada φ, todos los mencionados cuerpos excepto el último que es prismático, están engendrados por la revolución de todo el perfil 1-2*d*-3AC E-4*gj*5 6 y para el estudio de su sombra, nos concretaremos tan sólo al cuerpo principal del jarro, ó sea el vaso formado por la revolución de la meridiana 3ACE4. Suponemos obtenida ya la proyección horizontal, creyendo excusado decir nada más sobre el modo de dibujarlo. El rayo luminoso es R^v-R^h

Escojamos ahora un paralelo cualquiera, por ejemplo el AB; es evidente ahora que si por A, del meridiano y extremo del paralelo, conducimos la normal AO′ á la superficie, y la utilizamos por radio de una circunferencia, ésta al girar con el meridiano, engendrara á su vez una esfera, que será de contacto con la superficie del vaso, en todos los puntos del paralelo escogido, y por lo tanto, este paralelo será común á ambas superficies. De este sencillo hecho se infiere, que si

averiguamos la sombra de la esfera, esta línea al cortar. al paralelo AB, nos dará puntos que ya formarán parte de la línea de sombra que buscamos; encuéntrese pues la sombra de la esfera.

Más queriéndonos ahora aprovechar de que esta línea divisoria que pertenece á la esfera, es plana, y además, un círculo máximo, podemos aplicar inmediatamente el procedimiento expuesto en el (núm. 119) al objeto de proyectar la curva según una recta; á este efecto, gírese el rayo luminoso hasta que se coloque en R'-R", paralelo al plano vertical, entonces es bien sabido que la línea de sombra se colocará interinamente sobre la recta diametral HI, perpendicular á R'; pero el plano HI, corta al AB, según una cuerda de la superficie, proyectada en el punto J, pues se halla perpendicular al plano vertical, lo cual indica que los dos extremos de esta cuerda, formarán ya parte de esta línea de sombra; bastará tan solo trasladar el sistema á su verdadero sitio; vuélvase para ello, el rayo R'-R" en R^v-R^h, el punto J' se colocará en J", y trazando por él la perpendicular LK, al rayo luminoso R^h, los puntos en donde esta recta corte á la circunferencia proyección horizontal del paralelo AB, darán los L y K que pertenecen definitivos á la curva de sombra, basta tan sólo proyectarlos verticalmente en L' y K'.

Así se podría ir siguiendo empleando otros paralelos; más puédese, por otra parte, efectuar todas semejantes operaciones, llevándolas fuera de la figura general, y así resulten más claras y deslindadas las líneas de resultado, de las auxiliares, y bajo este punto de vista, escójase (Fig. 142') un punto O_1 como centro de las circunferencias cuyos radios sean O_1C_1, O_1E_1 iguales respectivamente á las normales CO", EO", de la superficie en los puntos C,E, por donde pasen los nuevos paralelos escogidos; las cuerdas C_1D_1, E_1F_1 colocadas para con respecto O_1, en la misma relación que lo estaban las CD, EF para con respecto á O" y á O"; ellos los representarán y se encontrarán en la misma disposición de aquéllos, relacionados con el contorno aparente de las correspondientes esferas colocadas en $XD_1\pi$, YF_1Z, finalmente trazando ahora el diámetro *xz*, perpendicular al rayo R', él representará el plano de la curva de contacto en la misma disposición del HI; ahora este diámetro corta en M y N, á estos paralelos; por lo que no habrá más que tomar las distancias Mm_1 Nn_1 y colocarlas en OM', ON', y así, obtenidos los pun-

tos M',N', trazar perpendiculares al rayo R^h, cuyas representarán cuerdas comunes de la superficie de revolución del vaso, con las esferas tangentes respectivas; estas cuerdas al cortar en P, Q, R, S, á las circunferencias, proyecciones horizontales de los paralelos CD, EF, darán finalmente los puntos de la curva de sombra; estos se proyectarán, por último en las rectas CD,EF en P', Q', R', S' y uniendo los puntos así obtenidos, darán la línea divisoria de luz y sombra.

No nos extenderemos más sobre el particular, pues tendríamos de repetir lo ya dicho en párrafos anteriores, así los pequeños filetes α,ν son simples cilindros (núm. 64), el cimacio β, forma parte de una superficie tórica, y su pequeño trecho de sombra propia *cb*, se encontraría, lo propio que la del toro θ, según lo dicho, en el (n.° 135), las escocias γ y μ, en la primera la sombra propia, está cubierta por la arrojada del círculo 2-9, cuya determinación hemos ya solucionado en el (n.° 134); en la μ, la línea de sombra *jlk*, está compuesta por la sombra propia y por una pequeña extensión arrojada por la parte de arco, de círculo horizontal *gi*, finalmente las *ab*, *mn* son respectivamente arrojadas de las generatrices verticales de cilindros, sobre las superficies tóricas inferiores, cuya cuestión también la hemos tratado en otros párrafos.

142. 4.° Método complementario de contra proyección. ó sea sistema de la sombra arrojada.—(Núm. 24) Hemos indicado ya alguna que otra vez este procedimiento, el que según sea la superficie de que se trata, puede emplearse exclusivamente en si, ó ya también como medio auxiliar dentro otros procedimientos, al objeto de encontrar ciertos puntos especiales, cuales no sería tan expedita la operación usando aquéllos; pero en general, es acusado su empleo, cuando se trata de una superficie de revolución, y su sombra arrojada caiga sobre un plano perpendicular al eje, máxime si este eje viene perpendicular á uno de los planos de proyección, por lo demás es en extremo sencillo, supongamos que en la (lám. 23, fig. 145) se tiene un elipsoide de revolución, cuyo eje es perpendicular al plano horizontal, estando iluminado por el rayo R^vR^h, concibamos en esta superficie, una serie de paralelos AB, CD, EF, así como sus simétricos, es evidente que si cada uno de ellos los consideramos aislados é independientes, y buscamos su sombra sobre el plano horizontal, ellas serán circunferencias iguales á las originarias, cuyos

centros serán ω_1, ω_2, ω_3,... etc. producidos por las trazas horizontales de los rayos luminosos que parten de ω, ω', ω'', ω'''... etc., constrúyase ahora la envolvente de todas estas circunferencias de sombra obteniendo de este modo, la elipse HIGJ, la cual sera evidentemente la sombra arrojada del elipsoide dado, porque si nos hacemos cargo de un punto cualquiera, tal como a'', este pertenece á la vez al círculo de centro ω_2 á la vez que á la línea envolvente, luego por pertenecer al primero, él es sombra arrojada del punto a-a' situado sobre el círculo original AB, el cual por estar en el elipsoide, dedúcese que a'', es sombra arrojada de otro punto situado sobre el mismo elipsoide y así de los demás. Por lo tanto, para encontrar la línea de sombra propia, no tendremos más que partir de cada uno de los puntos de la arrojada, trazar por ellos rayos de sombra, y contra proyectar oblicuamente dichos puntos, en cada plano horizontal del respectivo paralelo, y así determinados, unirlos ya en proyección vertical y horizontal, para las proyecciones de la línea de sombra.

Si examinamos atentamente, estas últimas construcciones podremos deducir ciertas notables propiedades, cuales bastaron para que Mr. Dunesme, estableciera su importante teorema sobre las líneas de sombra arrojada de una superficie de revolución, sobre un plano perpendicular al eje. En efecto, puede observarse, que siendo tangentes la elipse de sombra envolvente con cada una de las circunferencias, ó envueltas sombra de los distintos paralelos, han de tener forzosamente una normal común, y ésta siéndolo de una circunferencia, pasará evidentemente por su centro; así fijándonos en el punto a'' la normal común será $a''\omega_2$, pero ω_2, es sombra del centro ω'-O', y como quiera que los puntos ω' y a (originario de a'') están en el plano del paralelo, siendo la recta que los une, uno de sus radios, de aquí se infiere, que la recta $\omega_2 a''$, es sombra arrojada del radio $\omega' a$-O'a', diciendo lo propio de los demás puntos; y así podemos establecer la siguiente proposición.

La serie de normales comunes, correspondientes á la envolvente con las envueltas pueden considerarse como las sombras arrojadas de la serie de rectas horizontales apoyándose en cada uno de los puntos de la línea divisoria de luz y sombra propia, y por el eje de la superficie. He aquí porqué, como mediante semejante propiedad será dable trazar tantas cuantas normales convengan á la línea de la sombra arrojada.

143. Teorema de Dunesme.—Mas si bien se considera, todas las rectas horizontales mencionadas que se apoyan en la curva divisoria de luz y sombra por una parte y por otra sobre el eje vertical, permaneciendo todas horizontales, vienen á constituir un conoide, siendo la sombra arrojada de este conoide, una línea tal, que es envolvente de todas las sombras arrojadas de aquellas horizontales, ó si se quiere, es envolvente de todas las normales á la línea de sombra arrojada, y por lo tanto se infiere, que dicha envolvente, será la evoluta de la curva, á la cual son normales aquellas líneas de sombra, de las generatrices del conoide, por lo cual se establece el segundo teorema.

El contorno de la sombra arrojada de una superficie de revolución sobre un plano perpendicular al eje, tiene por involuta el contorno de la sombra arrojada de un conoide, engendrado por una recta que permaneciendo siempre horizontal, se apoya en todos los puntos de la línea divisoria de luz y sombra, y por el eje de la superficie.

El partido principal que de dicho teorema puede sacarse, es que pueda conocerse con facilidad, por la sombra de dicho conoide, la evoluta de la curva de sombra de la superficie de revolución dada, y así construirla una vez conocidos sus centros y radios de curvaturas.

144. Solución de la esfera tipo.—Existen superficies de revolución, que pueden ser consideradas como superficies envolventes, de todas las posiciones que ocupa en el espacio una esfera, cuya, permanece constante de radio durante el movimiento continuo de la misma. Estas superficies son las tóricas, y semejante propiedad permite facilitar en gran manera el problema de la sombra, como vamos á ver muy brevemente. Sea (lám. 33, fig. E), la saperficie tórica en las condiciones vistas en su lugar correspondiente; se supone ahora que la esfera cuyo centro está proyectado horizontalmente en ω, es tal, que gira alrededor del eje vertical proyectado en el punto O^h; en dicho movimiento los puntos A, B, respectivamente más lejano y próximo de dicho eje, describen dos circunferencias concéntricas, que constituyen el contorno aparente de la superficie en el plano de proyección horizontal. En cuanto al contorno aparente sobre el plano vertical, ya hemos dicho que sabemos como aparece y excusado es decir nada sobre este particular.

Si ahora haciéndonos cargo del movimiento continuo de la esfera y consideramos dos posiciones consecutivas é infinitamente próximas, ellas se cortarán según un círculo máximo, situado sobre el plano vertical AB que pasa por el eje de la superficie; esta sección es la que verdaderamente proporciona la característica, á lo largo de la cual, se verifica el contacto entre la envuelta esférica y la envolvente tórica; ahora bien, valiéndonos precisamente de este contacto, es que podemos venir en conocimiento del nuevo sistema, y en efecto si en la esfera de centro ω, imaginamos la curva de sombra que le corresponda, ésta con evidencia, vendrá un momento en el cual cortará á la característica, y este punto formará parte de la línea divisoria del toro, pues él, es común á las dos superficies según ya hemos indicado.

Mas al objeto de que salgan claras las operaciones, y no tener que ir determinando la serie de líneas de separación de luz y sombra, para cada esfera que escojamos, y valiéndonos al mismo tiempo de la perfecta uniformidad de la superficie esférica, podremos llevar semejantes operaciones, en un mismo sitio, cual será el espacio ó hueco del anulo. Para eso, operaremos del modo siguiente: cada una de las esferas, la moveremos por traslación, de manera que su centro ω, recorra la horizontal que media de ω á O, ó sea al eje; entonces ω vendrá á situarse en O y la esfera AB, en A'B', lo propio haremos con la esfera de centro ω', con la de ω''... y así con todas; de esta modo se habrán confundido en una sola, y con una sola, por lo tanto no habrá más que operar.

Si bien nos fijamos, con esa operación tan sencilla efectuada, no nos será difícil descubrir que la línea divisoria de luz y sombra en la esfera, no habrá variado absolutamente, para con respecto á la línea que representa la dirección del movimiento cuyo es AB, C'D', A''C'',... y así sucesivamente, cuyos no son otros que las rectas representando las proyecciones horizontales de las características. Ahora es fácil deducir, determinada ya que sea en esa esfera que llamaremos tipo, la línea divisoria de luz y sombra *abcd*, una de las posiciones primitivas, de centro ω,ω'ω''... Y ella en cada uno de estos movimientos radiales, llevándose consigo semejante línea divisoria, esta ya colocada en su debido lugar cortará á su característica correspondiente, dándonos con el corte puntos de la curva que buscamos.

Así, si nos fijamos en la posición de la esfera, en la dirección meridiana que contiene el rayo luminoso, si suponemos en esta dirección, qué el centro O^h, se traslada en ω, entonces A'B', habiéndose trasladado en AB, las distancias respectivas dO^h, bO^h, de los puntos divisorios de la sombra y luz al centro O^h, se trasladarán la primera en d'''ω y la segunda en b'''ω, y en cuanto á la proyección vertical como en este plano, constan ya los puntos escogidos d', b'; ellos al efectuar el movimiento de traslación, se moverán de modo que permanecerán siempre en las horizontales que por ellos pasan, y en donde referiremos sus nuevas posiciones de d''', en d'' y b''' en b''.

Igual operación haríamos ahora para cada meridiano $C'O^h$, aO''^h. . etc.

145. Capitel dórico.—Este importante detalle arquitectónico, viene perfectamente indicado para que podamos practicarnos; así como generalizar, todo lo dicho para con respecto á las sombras de las superficies de revolución. Toda vez que el capitel está formado en su mayor parte, por una serie de superficies de aquella clase, superpuestas entre sí, dando lugar con ello, á que se combinen las sombras arrojadas de unas con otras. Más antes de resolver este problema, conozcamos estas superficies, y del modo como ellas están enlazadas por su orden (fig. 143, lám. 22). Empieza en la parte superior por un prisma recto de base cuadrada, cuyo lado es AA'' y de muy pequeña relativa altura AA_3, se proyectará horizontalmente según un cuadrado; esta moldura es la que se conoce con el nombre de *filete de cimacio*.

Sigue luego, un *talón*, formado por cuatro cilindros iguales y horizontales, cuya sección recta, es la curva BB_1, son algo más entrantes de la cantidad A_3B para con respecto al filete superior; dos de ellos paralelos á la línea de tierra LT son de frente, y los otros dos, perpendiculares al plano vertical; y los primeros cortan á los segundos, según curvas planas diagonales, cuyas se confunden en proyección vertical con la sección recta BB_1 antes mentada. Inmediatamente al talón, sigue un prisma recto de base cuadrada, cuya altura es CC_1, y sobre el cual vuela de la distancia B_1, C, el talón superior: este prisma es lo que se llama la *corona*, y ésta es tal, que junto y combinada con el talón y el cimacio mentado, forman en su conjunto el detalle que se conoce con el nombre de *Abaco*. El abaco es el único detalle que no tiene molduras de revolución, más ya todas las que van á seguir en pos de él, serán de

semejante especie; así viene primero, algo más entrante que la corona; el *cuarto bocel*, cuya sección meridiana es el cuarto de círculo DD_1, cuya sección meridiana es el cuadrante de círculo DD; segundo, un filete cilíndrico de altura D_1E; tercero un *caveto*, superficie anular, de sección meridiana el cuadrante EF, cuya concavidad está dispuesta hacia la parte opuesta, ó por mejor decir, dirigida hacia la parte exterior; cuarto, el cilindro de garganta, ó collarino del capitel, cuya altura es GG_1; quinto, sigue al collarino y algún tanto más saliente que él; la moldura conocida con el nombre de *junquillo,* superficie tórica de pequeña altura, considerada no más en su mitad exterior, cuyo meridiano es el círculo HH_1H_2, aunque terminado hacia la parte superior por un plano horizontal HG_1, tangente al toro, y sobre cuyo plano se asienta directamente el collarino; sexto, debajo del junquillo, existe un pequeño filete cilíndrico H_2K, y éste junto con el junquillo anterior, forman el detalle conocido con el nombre de *astrágalo*, el cual prepara el enlace del capitel con la caña; séptimo y final, sigue inmediatamente un pequeño caveto análogo al mentado anteriormente, el cual verifica el enlace gradual y definitivo del capitel, con la caña ó fuste de la columna, la cual es ligeramente cónica aunque nosotros la consideraremos como á cilíndrica, cuya sección meridiana será la vertical que baja del punto L, modificándose algún tanto el aspecto liso de este fuste, por haber introducido las estrías que se dibujan tanto en planta como en alzado, ya con el objeto de aligerar algún tanto la masa que de por sí ofrece dicha caña, logrando dar de este modo más esbeltez á la columna, produciendo así más efecto de visualidad, ya también como á consecuencia de aprovecharse como á uno de tantos medios para el ornato y riqueza de semejante detalle arquitecto.

Si, pues, ahora nos hacemos cargo de todo el conjunto de estas líneas en el mismo orden que vienen mentadas y dibujadas, y que median desde la corona al fuste inclusive, y consideramos á la vertical O-O'O" como un eje en torno del cual todas las líneas referidas giran en su conjunto, ellas formarán en el espacio, la serie de superficies de revolución, cuyos nombres se acaban de reseñar.

Ya en posesión y en conocimiento del cuerpo de que vamos á tratar, así como conociendo al rayo luminoso en R^vR^h, propongamos buscar la combinación de sombras, tanto propias como arrojadas, á que dan lugar estas superficies componentes del capitel.

En primer lugar aparece el filete AB, cuyo, arroja sombra sobre el talón; este último tiene su sombra propia, así como también la arroja sobre la corona, sombras cuyo dibujo consta en nuestra figura, sin que para ellas detallemos ninguna clase de operación, toda vez que en las mismas circunstancias, ya se estudiaron detalladamente en escala mucho mayor en el núm. 74 al tratar de las molduras cilíndricas y en particular del talón; tendríamos, pues, de repetir lo que allí dijimos; huelga, por lo tanto, toda explicación bajo este punto de vista.

Si atendemos ahora que la corona aparece más saliente que todas las superficies inferiores, podremos con ello inferir, que va á arrojar sombra sobre ellas.

En primer lugar, si nos fijamos en la arista inferior C_1C_2 de la corona, arista que es paralela á la línea de tierra, ello ya de por sí, es línea divisoria de luz y sombra; así es, que imaginando un rayo luminoso resbalando sobre esta recta, tendremos así formado en el espacio un plano de sombra, evidentemente paralelo á la línea de tierra; si llegamos, pues, á encontrar la intersección de este plano con todo el molduraje inferior, entonces las líneas de intersección que así encontremos, irán dando necesariamente la sombra arrojada de la arista C_1C_2 sobre todas las molduras de revolución.

Con el fin de encontrar, pues, semejantes líneas con la mayor brevedad posible, escogeremos como á plano auxiliar, el de perfil central O"O', pues que á él es perpendicular el plano de sombra cuya directriz hemos dicho que es C_1C_2, y así se proyectarán todas las líneas curvas de intersección según una sola recta, cual será la traza vertical de dicho plano de sombra. Bastará para ello proyectar el rayo luminoso sobre el mencionado de perfil, claro es que dicha proyección, será la traza vertical del plano de sombra. Como quiera que el punto O, es proyección de sí mismo, escojamos otro punto del rayo, cual es el N^vN^h, el cual proyectado en el plano de perfil, se coloca en el punto N', y así el rayo proyectado es ON'. Pero con motivo de ver las cosas tal como son en el espacio, y poder así razonar sobre ellas, rebatiremos ahora el plano de perfil alrededor del eje O, hasta que se coloque paralelo al vertical de proyección, en cuya operación, el punto N', se coloca en N"-N"', y de este modo la dirección del rayo

proyectado en el plano de perfil, á la vez que rebatido en nuestro plano vertical, es el expresado por R′.

Ahora se comprende, bien, que en este giro, la arista que antes teníamos de frente en C_1C_2 aparece proyectada en el punto C_1, así como la traza del plano de sombra á que antes aludíamos, estará expresada por la recta C_1P', trazada por el punto C_1 y paralela á R′; quedando desde este momento todo reducido, á colocar las líneas de intersección en el lugar donde les corresponda; así, si nos fijamos en la intersección con el cuarto bocel, y nos hacemos cargo de uno de los paralelos como por ejemplo el QQ′, éste viene á ser cortado por el plano de sombra, en una recta perpendicular al plano vertical, proyectada en *a-a′a″*, cuya, no es otra cosa más, que una cuerda de la superficie tórica, cuyos puntos extremos a'', a''' (a''' no consta en el dibujo por ser simétrico al punto a'', pues consideramos al capitel en su mitad) son precisamente pertenecientes á la curva de intersección. Al colocar las cosas en su debido lugar, a' viene en a^{IV}, mientras que la cuerda que por él pasa, se colocará en $a^{V}a^{VI}$, siempre perpendicular al plano meridiano correspondiente ON′; así es que como obtenemos los puntos a^5a^6, que son ya verdaderamente de la curva de sombra arrojada, los que se proyectarán ya directamente, en el plano vertical, en su paralelo, correspondiente, en a^7Q'.

Se comprende que igual operación efectuaríamos, escogiendo nuevos puntos como el *a*, y sus correspondientes paralelos, así es que no más nos limitaremos ahora á los puntos notables de la curva; uno de tantos, es el *b*, intersección de la meridiana del cuarto bocel con la traza vertical C_1P', del plano de sombra, el cual visiblemente se descubre ser el más alto de todos los situados en la recta CP, y con ello no tendremos más que trasladarlo en b' sobre el meridiano de perfil Claro es, que si concibiéramos completado el círculo del cuarto bocel, cual si fuera un toro entero, obtendríamos otro punto de sección de su meridiano principal, con la traza C_1P', y éste, referido como el anterior al plano de perfil, obedecería á una posición tal, en donde la tangente también sería horizontal; más semejante punto no formaría ya parte, de la porción de la superficie tórica, que se aprovecha para el cuarto bocel.

Si por el método ordinario escogiéramos el paralelo más bajo de la superficie, el que pasa por el punto D_1, obtendríamos el punto más bajo de la curva en *i*; la curva obtenida así sobre el cuarto bocel, será la que pasa por los puntos $a^7b'kQ'ij$.

Luego el plano de sombra corta al filete cilíndrico D_1E, según un arco elíptico *dc*, cuya curva se encontrará por igual procedimiento que en el practicado en el cuarto bocel; aunque la operación aparecerá mucho más expedita, á causa que aquí, todos los paralelos del cilindro, ó sea sus secciones horizontales, se confunden en una sola circunferencia, en el plano de proyección horizontal. Como punto auxiliar de esta curva, podríamos proponernos encontrar el vértice de la misma, y esto lo tendríamos auxiliarmente en el punto de intersección de la traza C_1P', con la prolongación de la vertical ED_1, que representa la generatriz del contorno aparente del cilindro; en seguida, dicho punto se referiría al meridiano de perfil O″O′, sirviéndonos según ya hemos visto, tan sólo de auxiliar para el mejor trazo de la porción aprovechable *cd*.

Viene luego el caveto, y continuando el plano de sombra extendiéndose, le corta según la curva *dfe*, y muy luego prolongándose más, llega á cortar al cilindro del collarino, según la elipse P*gh*; el modo y disposición de operaciones para encontrar estas dos curvas, resulta idéntico en un todo de lo dicho para el cuarto bocel.

Téngase en cuenta ahora que P, es la sombra arrojada del punto C_1; esto es, aquél en donde termina la arista inferior frontal de la corona, y por lo tanto de dicho punto, parte ahora la otra arista inferior que se encuentra perpendicular al plano vertical; ésta es la proyectada en C_1-C′C, la cual continúa siendo línea divisoria de luz y sombra, siendo con ello directriz de otro plano de sombra, que también cortará á las molduras inferiores, aunque si bien siendo perpendicular al plano vertical, todas estas líneas de sombra arrojada, vendrán confundidas con la traza vertical del plano que las contiene, cuyo es evidente, que se confunde con el rayo luminoso *b*P que parte del punto extremo C_1; ahora, de esta sección *b*P, puede inferirse por partes, las proyecciones horizontales de los trechos de curva de sombra arrojada, sobre cada una de las molduras.

Procede ahora, determinar la sombra propia del cuarto bocel, expresada por la curva S*j*U′*k*R′, y ella verdaderamente estando colocada sobre parte de una superficie tórica, su de-

terminación se hace conforme vimos en el párrafo núm. 140, aunque de momento podemos tener á mano los puntos S y T, (este último como auxiliar) que obedecen á las tangentes á las curvas meridianas y paralelas al rayo R^v, y en ellas por pertenecer al contorno aparente, la curva pasa de vista á oculta en el plano vertical. Luego se obtiene el punto R' sobre el ecuador, y es referente al punto de tangencia R del rayo luminoso, paralelo á R^h, tangente al círculo máximo, en él la curva pasa de vista á oculta en el plano horizontal.

Si trazamos en U, la tangente á la meridiana paralela al rayo R', rebatimento del proyectado en el plano de perfil, obtendremos el que se refiere á dicho meridiano y haciéndole con este motivo el traslado, irá á situarse en U'.

Su punto más bajo *l* provendrá ya trasladado, del punto de tangencia que produzca sobre la curva meridiana principal, la recta tangente y que sea paralela al rayo R", rebatimiento del R^v - R^h, se concibe, pues, que este punto *l* es el que corresponde estar situado en el plano meridiano R^h O que pasa por el rayo luminoso. Con estos puntos, se puede desde luego trazar la curva con suficiente exactitud, aparte que de creerse conveniente, podríamos apelar á otros, valiéndonos según hemos indicado de los procedimientos á su tiempo expuestos en detalle.

Esta línea últimamente encontrada sirve ahora de directriz á los rayos luminosos, cuales forman el cilindro circunscrito al cuarto bocel; la prolongación de este cilindro de sombra, nos irá á cortar á su vez á las molduras inferiores, combinándose esta sombra arrojada, con la anterior ya encontrada y con las propias de cada superficie en particular.

Así por ejemplo, la que arroje sobre el filete cilíndrico D_1E, será la curva *ml'np*, cuyos puntos son fáciles de encontrar, pues escogido que sea un punto cualquiera *l-l"*, en la línea de sombra del toro, el rayo luminoso que por él pasa, corta en proyección horizontal en *l'"* á la base del cilindro, y este punto referido en el plano vertical en *l'*, sobre el rayo luminoso, ya es un punto de la curva; aquí es el más alto, por haberlo escogido de modo que estuviera situado en el plano meridiano del rayo luminoso R^h, de igual modo encontraríamos los demás. Mas si tenemos en cuenta el punto *m'* y hacemos pasar por él un rayo de sombra, éste cortará en *m'"* á la línea divisoria del cuarto bocel, indicando con ello que el punto *m'* es sombra arrojada por el primero, sobre la generatriz

meridiana ED_1; de modo que proyectando verticalmente *m'"* en m_1 y trazando por este último, un rayo m_1m paralelo á R^v, el punto *m* en donde corta á la vertical ED_1, será aquél en que la curva principia á aparecer vista en el plano vertical.

Fijémonos también en el punto *j* en donde la divisoria del toro está cortada por la arrojada sobre él, por la corona, y entonces, visiblemente al rayo luminoso que por él pasa, cortará en el punto *n*, á la *dc*, cuya, se encuentra situada en el mismo plano de sombra que se apoya en la arista frontal C_1C_2 de la corona, según anteriormente ya hemos visto. Váyanse, pués, encontrando puntos sobre el cilindro D_1E del filete, y váyase dibujando la curva *ml'np*, hasta encontrar la arista inferior del paralelo que pasa por E, y el punto *p* así encontrado será el último de esta curva.

Conviene observar ahora para la mejor precisión del dibujo, que en el punto *j*, lo propio que en el *k*, el rayo luminoso ha de resultar tangente á la curva arrojada *ja'b'k*Q'*i*, toda vez que originada por la sección del cuarto bocel, con el plano de sombra de la arista C_1C_2, este plano se combina en los puntos mentados, con el plano tangente del toro, y de ahí que su intersección será un rayo luminoso tangente en los puntos *j* y *k* á dicha curva; todo con arreglo del teorema de los puntos de perdida núm. 27.

De ello resulta, que al combinarse sobre el toro, la línea propia divisoria y la que arroja la corona, sólo queda de su superficie iluminada, la parte *ja'b'k*U'*j* y además la parte lateral *bq*SQ, parte vista en el plano de proyección vertical.

También se combinan en el filete ED_1 sus sombras, esto es la que le arroja el cuarto bocel por una parte y la corona por otra, limitando ellas las pequeñas extensiones que aparecen iluminadas en *dnp*, *mrs*, cuyas en sus aristas inferiores, E*s*, *dp*, darán lugar á que á su vez, arrojen sombra sobre las molduras inferiores, combinándose ella, con la que ya anteriormente se había encontrado.

Así esta arista circular E*p* arroja sombra sobre el caveto EF, produciendo en él, la línea $\beta\alpha f$-6-*t*, esta curva como se comprende proviene de la intersección de una superficie de revolución como lo es la del caveto, con un cilindro oblicuo, cual es el de los rayos luminosos que tienen por directriz la arista circular E*p*. Esta curva puede encontrarse proponiéndonos averiguar los puntos de la misma, que se encuentren sitiados, en alguno de los planos paralelos correspondientes

al caveto, y al efecto, escójase el círculo paralelo que se quiera del caveto, éste podrá ser considerado siempre como base de un cilindro oblicuo, cuya dirección sea paralela á los rayos luminosos, de modo, que si dicho cilindro oblicuo, lo prolongamos hasta cortar al plano horizontal, su traza será un círculo exactamente igual al paralelo escogido, cuyo centro será como es natural, la traza sobre el plano de sección; de la recta que imaginemos pasar por el centro del paralelo y con igual dirección que la luz. Si ahora nos hacemos cargo del cilindro oblicuo de los rayos luminosos cuya base es el círculo que se proyecta en el plano horizontal Ep, arista inferior del filete, este cilindro prolongado cortará también al plano horizontal según otro círculo igual y paralelo al de la base. Estos dos últimos mentados cilindros, como que tienen la misma dirección se cortarán según una generatriz común, cuya partirá del punto donde se corten las bases circulares, claro está pues, que partiendo de este punto, puede ya trazarse una recta paralela á la dirección de la luz, y el punto f en donde esta recta corte al paralelo escogido será el de sombra arrojada sobre el caveto correspondiente al punto d de la corona, el cual se ha obtenido prolongando aún más el rayo de luz, hasta rasar en la corona. Como quiera que esa curva es simétrica con relación al plano vertical meridiano que pasa por el rayo luminoso, su punto más alto, γ-γ′, estará situado en dicho plano vertical meridiano, por lo que considerándolo rebatido en el plano vertical, trazando por el punto borde E, una paralela al rayo rebatido que llamaríamos R″, el punto de intersección de éste con el perfil del caveto, nos daría el punto en cuestión, el cual trasladado á su debido lugar, proporcionaría el punto que deseamos γ-γ′. El punto β en donde empieza la curva en el plano vertical, es también conveniente contar con él, y para ello no hay más que encontrar la intersección del plano meridiano principal A′O, con el cilindro oblicuo de los rayos luminosos que se apoyan en la arista circular Ep, cuyo se proyecta horizontalmente en la circunferencia que parte del punto m'; la línea que así encontremos será un arco elíptico, el cual situado en el mismo plano de la curva meridiana del caveto, ellas á su vez se cortarán, y el punto β en donde lo hagan será el buscado.

Mas el procedimiento general empleado para encontrar el punto f y que obedece al del párrafo 24 ó sea de contra-

proyección, aquí no está tan indicado como lo es el del párrafo 21, cual es el de las secciones, en razón á que la curva se presenta algo achatada, motivando con ello alguna confusión al combinar las trazas horizontales de los dos cilindros auxiliares en el plano horizontal que se haya escogido, para operaciones; he aquí porque no hay ningún inconveniente y aún hasta ventajoso para comprobación de algunas operaciones, echar mano del sistema de planos secantes, para la investigación de las demás sombras que restan del capitel, esto además, es sencillísimo, aunque si bien por otra parte algo enojoso, pero aquí casi se impone; hecha la operación para un plano bastará para comprender las demás. Sea á este efecto un plano que corte á lo alto del capitel, plano vertical paralelo al rayo de luz, y cuya traza horizontal está expresada en la recta x'-8′, para hacernos cargo del corte, bastará considerar la intersección de esta traza horizontal, con los distintos paralelos de las superficies, así como con las proyecciones horizontales de las aristas de la corona, los puntos así obtenidos transportados en la proyección vertical en sus respectivos paralelos, darán el corte total compuesto de las siguientes líneas x'-x 2′ sección con la corona, la curva 1-2-3-4 con el cuarto bocel, la recta 4-5 con el primer filete, la curva 5-6-7 con el caveto, la recta 8-9 con el collarino la línea mixtilínea 9-10-11 con el junquillo, la recta 11-12, con el filete del astrágalo, la curva 12-14 con el caveto de enlace del capitel con el fuste, y finalmente de la recta 14-15 con el fuste ó caña.

Ahora para que esta sección, pueda utilizarse para los fines que nos proponemos, conviene considerar en el espacio, todos los cilindros de sombra tangentes á las superficies tóricas así como también los cilindros rasantes por los arcos circulares que sean líneas divisorias de luz y sombra, y del mismo modo los planos de sombra rasantes sobre las aristas de los cuerpos del abaco, correspondientes á la división del claro obscuro. Ahora bien, esto supuesto el plano secante x'-8′ cortará al plano de sombra de la arista C_1-C_2, según el rayo de sombra 2-2′, el cual cortando á la curva del cuarto bocel en el punto 2, este será sombra arrojada sobre dicha superficie de revolución, del punto originario 2′; cual punto 2, ha de coincidir con otro que ya más antes habíamos encontrado en la construcción de la curva ja' $b'k$. Este mismo plano secante vendrá á ser cortado por el plano tangente del cuarto bocel

según el rayo de sombra 3 3', tangente en 3 al cuarto bocel, indicando con ello, que 3', es sombra arrojada sobre el filete del punto 3, que corresponde al cuarto bocel. Del propio modo iríamos continuando, trazando por los puntos más salientes del perfil producido, rayos de sombra ya rasantes, ya tangentes, según sean; así por los puntos 5, 7, 12 partirán rayos rasantes que nos darán los puntos arrojados en 6,7',13, así como el rayo tangente en ν sobre el junquillo dará en el punto 11 la sombra arrojada de dicho punto ν, en el punto 11, sobre el filete del astrágalo

Repitiendo esta operación para una serie de planos secantes, y uniendo los puntos respectivos que conciernan á cada superficie, iremos obteniendo sucesivamente la curva arrojada sobre el caveto de que antes habíamos hablado, luego, la YX-*g*-7-*t*-*y'*, sombra del caveto sobre el collarino, luego, la concerniente á la sombra propia del junquillo del astrágalo, cual es la λνδ y de ella deducir su arrojada sobre el filete cilíndrico H_2K, la cual concluye en el punto π, y finalmente por medio de los rayos tales como el 12-13 deducir la sombra arrojada del círculo K-12 sobre el caveto, y fuste inferior en la curva Lθ13.

Es de advertir ahora, que algunas de estas sombras, van á modificarse por la combinación de ellas con otras que nuevamente aparecen, así, si nos hacemos cargo de la línea que arroja en *n*3'*p*, el cuarto bocel sobre el filete, vemos que concluye en *p*, indicando eso, que el rayo *pp'* que parte del punto originario *p'*, hace no más el rase por *p*, continuando su camino por el espacio hasta cortar en *p''* al caveto inferior en un punto de la misma línea de sombra que en él habíamos encontrado. Mas á partir del punto *p'*, continuando su camino el rayo luminoso, siendo tangente al cuarto bocel á lo largo de la línea *p'k*, el cilindro de sombra que produzca, cortará al caveto según la línea curva *p''t*, siendo *t*, el último punto, el cual proviene del originario *t'*, prosiguiendo el rayo de sombra, hasta encontrar en *u'* al fuste de la columna, cuya operación se efectúa en el plano horizontal, para trasladarla luego al vertical. Eso indica que continuando el camino el rayo luminoso á lo largo de la línea *t'k*, el cilindro que va formando; cortará al fuste de la columna según la curva *t''z*, encontrada buscando las intersecciones de los rayos luminosos, en proyección horizontal, con la circunferencia base del fuste, refiriendo luego los puntos así encontrados, al plano de pro-

yección vertical, y con ello encontraremos el último punto *z*, que obedece al plano tangente vertical, del cilindro del fuste, á la vez que paralelo al rayo luminoso; nos da con dicho cilindro la generatriz de contacto, que es la vertical que se levanta en V, que viniendo á ser cortada en *z*, por el rayo que parte de *z'*, nos dará así el límite de la curva *t''z*, que viniendo mucho más baja, que la anterior encontrada en *t''y'*, la modificará notablemente.

También quedará modificada XP*gh*, al combinarse con la YX*g*7'*uz'*, fundiéndose en ella, como perdida el trecho *gh*.

Los puntos de tangencia análogos á ν, en el junquillo, nos darán la sombra propia de este, en λνδ, aunque también, podía emplearse combinando el sistema de meridianos y puntos notables, de que hemos echado mano en el cuarto bocel. La sombra arrojada, de este junquillo sobre el filete inferior, es la curva que pasa por H_2-11 y π, encontrada análogamente, que lo indica el rayo tangente ν-11, siendo el último punto el π á partir del cual, prosigue su camino en el espacio, hasta cortar alguna superficie que se oponga á su paso.

Existe también la sombra νψδ, sobre el junquillo del astrágalo, esta sombra se compone de dos partes, una la curva Vψ, y la otra la ψδ, la primera producida por la intersección con el toro del junquillo, del plano de sombra, tangente al fuste á lo largo de la generatriz V*y'*, ella podría deducirse considerando cuales sean los puntos en que la traza horizontal de dicho plano de sombra, corta á los distintos paralelos, del pequeño toro; y trasladando luego dichos puntos, á su correspondiente proyección vertical, cuales, unidos darán la curva en cuestión.

La segunda ψδ, originada por la intersección del junquillo con el cilindro oblicuo de sombra, que se apoya en la curva *z'*φ, del cuarto bocel, siendo así esta línea, originaria de aquella. Un punto cualquiera de esta segunda curva arrojada, se hallará, escogiendo un punto entre *z'* y φ, haciendo pasar luego por él, un rayo luminoso, y buscando finalmente la intersección de éste, con la superficie tórica del junquillo. Esta intersección, la motivará un plano auxiliar y vertical que pase por dicho rayo luminoso, y así este plano que lo proyecta horizontalmente, cortará al junquillo según una curva, (fácil de encontrar, considerando las intersecciones de la traza horizontal, con los distintos paralelos del junquillo), la cual á su vez quedará cortada por el rayo luminoso, y el punto obtenido, será el definitivo que se busca.

Finalmente, restan tan sólo las estrías del fuste, para que en ellas se determine también la sombra, la cual aparece sencillísima. Bien considerada, cada una de ellas, es una suerte de nicho de muy pequeña profundidad, terminando el cilindro cóncavo recto, hacia la parte superior, por otro cilindro horizontal, cuya directriz, es cada uno de los arcos ρq, situado sobre el cilindro del fuste, la dirección de cada cilindro horizontal de esta clase, es perpendicular al plano vertical que subtende el segmento cilíndrico correspondiente de cada estría, y cuyo plano, tiene por traza horizontal, cada una de las análogas á $\rho' q'$.

Las sombras sobre los cilindros cóncavos de las estrías, estarán dadas por planos verticales paralelos á los rayos de luz, y rasando, por cada una de las aristas opuestas á luz, como así lo indica el plano de sombra $\rho'\rho'''$ que produce la línea vertical de sombra arrojada de dicha arista, en $\rho'''\rho''$; y termina superiormente con la curva $\rho'' q$, sombra arrojada del arco de cabeza de la estría, cuya se obtiene valiéndonos de los distintos rayos luminosos, que rasan por el arco de cabeza, buscando luego sus intersecciones, con el cilindro recto y cóncavo de la estría, operación elemental que no hemos detallado; únicamente si, conviene para la mejor precisión de estas curvas, á medida que se aproximan hacia la izquierda ó de la sombra, que se determinen sus tangentes en el punto ρ'' de su arranque. Como que proviene de la intersección de de dos cilindros, esto es, del recto de la estría, y el oblicuo de sombra, cuya directriz es el arco de cabeza; combinaremos ambos á dos, sus planes tangentes, en el punto que se considera $\rho'''\rho''$, tomando como á plano vertical auxiliar de operaciones el $p'\xi$, tangente en el fuste (cual si este fuese continuo, esto es, no interrumpido por las estrías), á lo largo de la generatriz del punto ρ'. En este estado el plano tangente al cilindro de la estría, tiene por traza horizontal, la recta $\rho'''\sigma$, y por traza vertical, en el plano auxiliar indicado, la vertical que se levanta en el punto σ, mientras que la traza vertical del plano tangente al cilindro oblicuo de sombra, es la recta $\rho\sigma$ tangente á la curva de cabeza, luego la intersección de estas dos fuerzas nos da el punto σ, que unido con ρ'', nos dará la tangente pedida.

Téngase en cuenta, que en la estría, señalada con Σ, la sombra saldrá algún tanto modificada, en atención á que parte de la arista inferior del filete cilíndrico del astrágalo, cae arrojada en la parte cóncava, del cilindro vertical de dicha estría. Este trecho de curva directriz es el 16-17, produciendo la curva 16'-17', cuya determinación salta á la vista, acudiendo al plano de proyección horizontal, en donde dicha curva de sombra, se proyecta confundiéndose con la traza horizontal ó base de la estría.

Para la sombra que arroja el capitel sobre los planos de proyección, ella es de fácil construcción, teniendo no más cuidado sumo, en ir discerniendo las líneas divisorias de luz y sombra, en donde va apoyándose, el rayo de sombra en su camino; esta línea quebrada para con respecto á la parte vista, será la siguiente: la vertical $A''A^{v}$, luego la horizontal $A^{v}A_3$, hasta que el rayo pase por b_2, luego recorre el trecho curvilíneo b_2c_3, emprende en seguida la dirección rectilínea c_3C_4 hasta que llega á rasar hacia la parte inferior del talón en el punto d_1, recorre luego, la pequeña curva del talón, d_1c_2, se apoya en seguida en la línea c_2B_1, describiendo un plano, hasta que el rayo corte en e_3 á la línea vertical del abaco, baja luego por ésta, hasta el punto C_4, en cuyo punto cambia de camino, recorriendo la horizontal C_4C_1, hasta llegar en el punto K_3, en el cual el rayo de sombra es tangente en k, al cuarto bocel y en semejante disposición, empieza á resbalar siendo tangente al cuarto bocel á lo largo de la divisoria $k\varphi z'$; pero al llegar al punto φ aparece al mismo tiempo tangente en δ al toro del astrágalo, emprendiendo luego el camino que le marca, la divisoria $\delta\nu\lambda$, de semejante superficie tórica, hasta que llega en el punto π', esto es cuando el rayo de sombra rasa en un punto π, por la arista inferior del filete cilíndrico del astrágalo, cambiando á partir de dicho punto de directriz, pues ahora dirige su movimiento el paralelo circular, en el trecho que media de π á 16 siendo tal este último, que al llegar á él, el rayo de sombra, se encuentra rasando con la arista superior de la estría Σ, en el punto 16'' razón por la cual el trecho circular 16-17 ha caído arrojado en el fondo de la estría en 16'-17'. El rayo luminoso rasa luego por el pequeño trecho $16''q$, del arco superior de la estría, dando así por sombra arrojada; también en el fondo del cilindro de la estría, la curva 16' q', y finalmente, el rayo luminoso concluye su viaje, rasando por la arista vertical de la estría, terminando definitivamente en el punto t.

146. Sombra de la base ática *.—Viene á ser constituída también como el capitel del caso anterior, por una serie de superficies de revolución, las cuales son las siguientes numeradas:

2. Filete cilíndrico, el cual enlaza el fuste con el cuerpo de la base, valiéndose de un caveto de acuerdo n.° 1, (L.ª 23, F.ª 144.)
3. Toro menor con el cual principia verdaderamente la base.
4. Pequeño filete cilíndrico, sirviendo de transición, para que quede algún tanto atenuado el efecto de las curvaturas convexas del toro, con la no convexa de la moldura que sigue que corresponde á la escocia.
5. Escocia, moldura no convexa, por la cual se comunica mejor efecto, más belleza y esbeltez al conjunto de la base.
6. Filete cilíndrico, de transición entre la escocia y el toro que viene á continuación, y hace que no desarmonice el conjunto, como así sucedería si enlazaran directamente, las curvaturas opuestas de dichas dos molduras.
7. Toro mayor ó gran toro, moldura aquí, que aparece relativamente gruesa y robusta, como sirviendo de apoyo á todas las demás, y finalmente
8. Zócalo, en forma de paralelepípedo, sobre el cual se asienta toda la agrupación de molduras curvas que se han referido, prestándose así en su forma prismática achatada, á acusar más fuerza y potencia para el aguante.

Aquí partimos del rayo luminoso, inclinado, sus proyecciones á 45° para con la línea de tierra, al efecto que podamos ver, que partido de él podemos tomar en ciertos casos que no queramos valernos de la planta, prescindiendo por completo de su dibujo, aunque si bien adoptaremos otro plano de referencia, y este será vertical, pasando por el eje de la base; inclinado de 45° para con respecto al de proyección vertical, y avanzando de izquierda á derecha hacia el observador, en resumen, es un plano meridiano dado con las condiciones antedichas, cuya traza vertical se confunde con el mismo eje EE′ de las superficies de revolución que constituyen dicha base, (es de notar que para facilitar mejor las operaciones, adoptamos como á plano de proyección vertical el meridiano principal de todo semejante molduraje). Dividiremos aquí la cuestión en dos partes, en la primera se determinarán las sombras propias, y en la segunda las arrojadas, y al objeto de patentizar mejor las propiedades y sus resultados, acudiremos tan solo para ayudar á la inauguración, á la figura convencional (F.ª 144′.)

* *Base.* Es la parte inferior de las tres que constituyen la columna ó pilastra, y sobre la que carga inmediatamente el fuste, que tiene con ella, mejor asiento, le preserva de las humedades del suelo, le da más esbeltez con la mayor altura á que le eleva y finalmente, es también uno de tantos recursos cuando se emplea el ornato bien motivado, para dar el mayor efecto á la decoración.

La base *ática* corresponde al orden jónico y se distingue, por constar de dos toros, separados por una escocia comprendida entre dos filetes.

Sombras propias.—Para el cilindro del fuste obtendremos la generatriz AB, poniendo en práctica el principio y propiedad expuesta en el párrafo n.° 98, valiéndonos aquí del triángulo rectángulo é isósceles OCD, trasladando desde O, la cantidad ó cateto OC, en OA sobre la hipotenusa, así se tiene el punto A, de donde parte la generatriz de luz y sombra sobre el fuste.

Los filetes 2, 4 y 6, estos son cilindros de reducida altura en ellos, podrá también repetirse la operación anterior, teniendo en cuenta que las hipotenusas de los triángulos auxiliares, serían ahora respectivamente las FF′, GG′, HH′, aunque si bien la GG′, no hay necesidad, porque muy en breve veremos que el filete 4, va á estar inmergido en su mayor extensión en la sombra que le arrojan los cuerpos superiores; ahora en lo referente á los filetes 1 y 6, sus generatrices de sombra propia se encuentran en II′, JJ′, del modo como se ha indicado, y cuyas construcciones análogas á la anterior del fuste, no se han dibujado, con motivo de no cargar demasiado de líneas, cuales entorpecerían quizá, la claridad de que necesitan las operaciones futuras.

Para el toro n.° 3, nos circunscribiremos á los puntos más principales; así directamente, y de momento se tienen los J, J′, del contorno aparente, trazándole las tangentes á 45° y precisando los puntos de tangencia.

Por razón de simetría, se obtiene el punto K sobre el plano de perfil, con sólo proyectar el punto J en K, véase la figura explicativa auxiliar fig. 144′ y además el párrafo 140 cuando se refiere á las propiedades de simetría.

El punto M, situado sobre el ecuador, se obtendrá por la consideración de que dicho círculo ecuatorial puede suponérsele como base de un cilindro recto, y como á tal, puédesele determinar su generatriz de sombra propia, conforme

se ha hecho con el fuste y los filetes; así es, que como allí nos valdremos del triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa sea M'M", y con el auxilio del cateto contiguo del vértice M', y haciendo centro en este último, conduciremos aquel en M'M, así el punto M, estará determinado.

El punto más bajo L', se hallará concibiendo, el plano meridiano que por dicho punto incógnito pase; en este estado, supóngase pues, dicho meridiano gire, alrededor del eje, hasta confundirse con el vertical de proyección, entonces la sección meridiana se confundirá con la principal, que tenemos dibujada como á dato, mientras que la traza sobre este plano, del tangente paralelo á los rayos luminosos, vendrá representada en LO', tangente á la curva circular meridiana, é inclinada de 90—ω, con el eje OO' (n.° 20-2;) á quien corta en O'. El punto L' es pues el que deseamos, pero aquí rebatido, falta colocarlo á su debida posición; para esto, deshaciendo el giro y colocando el meridiano de dicho punto, en donde le corresponda, tendremos que L, describe un cículo horizontal, proyectado en la horizontal, que pasa por él; la tangente LO', viene arrastrada en el movimiento, siendo el O', fijo, y cuando el plano se colocará á su sitio, entonces la tangente mencionada, siempre pasando por el punto O', se proyectará según el rayo luminoso R, el cual en semejante disposición cortará en L', á la horizontal que más antes ha trazado al moverse el punto L.

Se comprende ahora, que con consideraciones idénticas obtendremos la sombra propia del toro n.° 7.

Sombras arrojadas.—Para todas las siguientes explicaciones, precisa no perdamos de vista la fig. 144' auxiliar. En primer lugar las sombras arrojadas de las generatrices de los cilindros que constituyen el fuste y los filetes, tales como AB, II', JJ', se confunden con estas mismas generatrices (recuérdese que es el plano P (fig. 144'), el que recurrimos como auxiliar, para proyectarle las líneas de sombra, y luego deducir las que caen sobre el cuerpo; este plano ya se ha dicho, viene á servir de sustituto al de proyección horizontal de quien prescindiremos).

Sombra arrojada BR"Q del fuste sobre el caveto.—Si encontramos la sombra arrojada de la arista circular FF' sobre el plano P, auxiliar y vertical inclinado de 45° parará con respecto al plano de proyección vertical, esta sombra será un círculo (n.° 44), y esta podrá trazarse desde luego,

con centro F, y con el radio FI, descríbase pues, la circunferencia en cuestión, y ésta cortará en Q' á la arista BA, sombra arrojada de si misma sobre el plano P; luego esto indica, que si imaginamos el rayo de sombra que parte de Q', éste en contra proyección, rasará por Q, sobre el círculo FF', luego el punto Q, es sombra arrojada de Q'.

Eligiendo ahora un círculo del caveto, tal como SS', intermedio entre los límites de BB' y FF'; encontrando luego y del mismo modo como lo hemos hecho con el FF'; su sombra arrojada sobre P, se encontrará otro círculo de centro S', y de radio $S'R_1$, cuyo círculo cortará en R' á la generatriz AB, por él parte ahora un rayo de sombra, que cortará en R", á la S'S, será este punto la sombra arrojada del originario R', y así sucesivamente, escogiendo nuevos paralelos circulares entre los planos horizontales BB' y FF', así obtendremos la curva BR"Q.

Sombra arrojada sobre el toro, n.° 3.—Esta es la curva I'TUV compuesta de la línea I'T, que arroja la generatriz II', y de la línea TUV que arroja el trecho de arista circular IV'.

Veamos las operaciones inherentes para encontrar un punto, por ejemplo el V, y para esto, ante todo hállese previamente la sombra que arroja el toro sobre el plano P, esta será la curva oval $O'K_3ME'$; ésta la obtendremos seguidamente en los puntos siguientes, cuyas relaciones invocadas se hacen más ostensibles en la fig. 144'.

Ya desde luego se ve á la simple vista que M_1-M, punto situado en el Ecuador, ya de por sí es un punto de la misma, puesto que este punto es sombra arrojada de sí mismo sobre el plano P.

Si tratamos de averiguar la sombra arrojada del punto K-K', situado en el plano de perfil, tendremos que el rayo que por él pasa, corta en K_1 K_3 al plano P; ahora bien, con ello hemos formado un triángulo rectángulo isósceles OK_1K', cuya altura K_1K_2 es igual á $K_3\beta$, esto es, igual á la separación del punto de resultado K_3 al plano de perfil OO', pero esta altura K_1K_2, divide en su pie K_2 en dos partes iguales á la hipotenusa OK', y además la misma $K_1K_2 = OK_2 = \frac{1}{2}$ OK'; luego prescindiendo ahora de la figura auxiliar, y aprovechándonos tan sólo de su resultado, bastará en la fig. 144, la distancia KJ dividirla en seguida en dos partes iguales y colocarla de K en K_4, trazando en este punto K_4 una recta perpendicu-

lar á la primera, para colocar en ella á su vez, y á partir del último punto obtenido K_4, la misma distancia en K_4 K_3; esta K_3 será, pues, otro punto de la curva de sombra.

Si nos fijamos ahora (fig. 144') en el punto más bajo L'-L'', observaremos que para trazarlo hemos acudido en auxilio del meridiano principal, trasladando este punto en L, y allí se ha conducido la tangente á la meridiana por medio de una recta inclinada del ángulo ω (n.º 20-2.º) con el plano horizontal; ahora bien, esta tangente no es más que el rayo luminoso rebatido, el cual corta en O al eje de la superficie de revolución, cuyo punto subsiste para cuando se conduzca el sistema á su debida posición; mas es visible que el eje aquí es precisamente traza del plano P sobre nuestro plano vertical de proyección; luego infiérese que el punto O O' es intersección del plano P con la línea inclinada á 45°, (sus proyecciones son la L de T) que parte del punto originario L'-L'', y por ende, el punto O' es la sombra arrojada del punto L' sobre el plano P; forma, pues, también parte de la curva de sombra que buscamos. Por razón de simetría puede ahora reproducirse esta curva O'K_3M, hacia la parte opuesta de su eje M'M'', esto es, en MQ'E'.

Ya en posesión de dicha línea, observemos que ella corta en el punto V_1 á la sombra arrojada circular que antes hemos encontrado, cual tiene por originaria la circunferencia horizontal proyectada en la recta IF', y por lo tanto ya se infiere desde luego que haciendo partir desde V_1 un rayo de sombra, éste rasará por V' sobre la arista FF', y cortará en V al toro, precisamente en un punto de la línea divisoria de luz y sombra, resultando según ello que V, es sombra arrojada de V'.

Para otro punto, tal como U', éste arrojará su sombra en U, encontrándose éste haciendo pasar entre los puntos I' y V un paralelo cualquiera, como por ejemplo el U_1U; se buscará en seguida la sombra arrojada del mismo sobre P; ya sabemos será un círculo, cual deduciremos de igual modo como se ha indicado por los FF', SS'; ahora los círculos de sombra arrojada de U_1U y FF' se encontrarán, y haciendo partir de dicho punto un rayo de sombra, éste rasando por U', á la vez que cortará en U al paralelo tórico que parte de U_1; y por lo tanto U es sombra arrojada de U'.

De este modo siguiendo, lograremos la curva TUV; más á partir de I, es la generatriz II' la que arroja sombra en I'T, la cual puede trazarse desde luego, atención hecha á lo poco

que discrepa de la recta I'I'', á la cual es tangente en I' (número 28); más si existiera mucha discrepancia en la divergencia de curva y tangente, entonces se combinarían las sombras arrojadas sobre P, de los distintos paralelos tóricos comprendidos en la altura que separa los puntos I' y T, con la generatriz II' y los respectivos puntos de intersección, contraproyectados oblicuamente en la dirección de los rayos luminosos sobre estos paralelos mencionados, nos darán tantos puntos como quisiéramos de la curva mentada I'T.

Sombra arrojada sobre el toro, n.º 7.—Esta es la curva *J'jp'q''m*, la que se compone de tres partes, cuales son: la *J'j*, sombra arrojada de la generatriz JJ'; la *jq''*, cuya la arroja la arista circular J*q'*, y finalmente la *q''m*, cuya tiene por originaria la *q'''*M, trecho de la línea divisoria del otro toro n.º 3. Por lo que se refiere á las dos primeras, se encuentran en el mismo caso que la curva estudiada poco há, en I'TUV, por lo que habríamos de reproducir lo allí indicado; hágase, pues, con arreglo á los nuevos datos, las operaciones análogas allí expuestas y se obtendrán, siguiéndolas, las dos curvas *J'j*, *jq''*, en cuanto á la tercera *q''m*, visiblemente proviene de la intersección de la superficie tórico, n.º 7 con el cilindro oblícuo formado por los rayos de sombra, que se apoyan á lo largo del trecho *q'''*M de la línea divisoria de luz y sombra del toro, n.º 3.

Veamos, pues, ahora, como se encuentra un punto de esta curva, como por ejemplo el último *m*, situado en la misma línea divisoria de luz y sombra del toro n.º 7.

Encontremos ante todo la sombra arrojada del toro, n.º 7 sobre el plano P, insiguiendo para ello las mismas consideraciones hechas para el toro, n.º 3, y así es como encontraremos la curva oval *hbg*O''; esta curva corta precisamente en el punto M á la hallada anteriormente para el toro, n.º 3; por lo tanto, haciendo partir de dicho punto M un rayo de sombra, éste prolongado pasará siendo tangente por M y *m* en el primero al toro, n.º 3 y en el segundo al toro, n.º 7, y ello precisamente indica que *m* es sombra arrojada de M.

Si quisiéramos otro punto cualquiera comprendido entre *m* y *q''*, entonces, conforme hemos practicado anteriormente, y en casos análogos haríamos pasar un paralelo de la superficie tórica, n.º 7 á la altura que quisiéramos, pero dentro de aquella separación indicada entre *q''* y *m*; en seguida entraríamos á encontrar su círculo de sombra arrojada sobre el pla-

no P, y finalmente combinaríamos esta curva circular, con la oval del toro, n.º 3, así como el de su sombra arrojada, al encontrar el paralelo tórico de la superficie, n.º 7, y así sucesivamente.

Sombra arrojada del toro 3 con el filete cilíndrico 4.— La constituye la curva $\mu l t'$. En cuanto al punto t', cuyo originaria es t, se encuentra combinando la sombra arrojada sobre P de la arista circular é inferior del filete con la curva oval $E'MK_3O'$, el punto más alto l; suponiendo que el plano meridiano que por él pasa (que es el que contiene el rayo luminoso se rebate en el meridiano principal; allí el rayo luminoso se rebate según la tangente á la curva meridiano, tangente que forma el ángulo ω (n.º 20-2.º) con el plano horizontal; esta tangente corta al eje en el punto O′, el cual permanece fijo, cuando el plano de la tangente y punto de contacto, van á situarse á su sitio; de modo que cuando ya lo estén, el rayo partirá siempre del mismo punto O′, y siendo paralelo á la dirección general R, el cual, al encontrar á la horizontal trazada por el punto z (obtenido por la intersección del rayo rebatido con la generatriz del contorno aparente del filete), dará en definitiva dicho punto l; y finalmente el μ, en donde la curva de sombra encuentra á la generatriz del contorno aparente, se hallará combinando las sombras arrojadas sobre el plano P de dicha generatriz (cuya es la vertical que pasa por el punto encontrado en μ', con la correspondiente del toro 3, cuyas operaciones, por ser análogas á las anteriores, dejan de detallarse para evitar repeticiones.

Falta solamente determinar la curva de sombra arrojada que cae sobre la escocia en $\delta\gamma t''s'r'q'$, la cual consta de dos partes; es, á saber, la una en el trecho $\delta\gamma t''$, que proviene de la arista circular é inferior del filete cilíndrico, n.º 4, y la otra la $t''s'r'q'$ que la arroja el toro, n.º 3 en el trecho de la línea de sombra $tsrq'''$.

En cuanto á la primera se encontrará combinando en el plano P la sombra de la arista circular $\theta t'$ con las sombras circulares de los distintos paralelos de la escocia, y la segunda la combinación tendrá lugar, entre los propios paralelos mentados y la curva oval $E'MK_3O'$. Estas construcciones son en un todo análogas á las anteriores.

147. Sombra del capitel jónico *. — Tomamos como á tipo de esta clase, el capitel jónico griego del Erecteo, cuyo

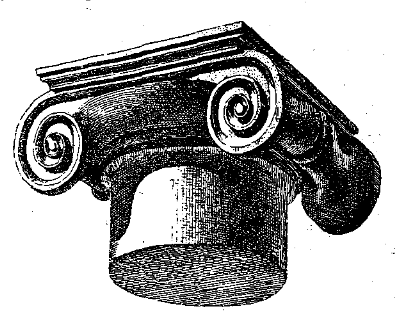
* La etimología de esta palabra, deriva de la que en latín se conoce por *caput*, y esto explica ya de por sí, lo que expresa semejante detalle; y en efecto, colocado en la parte superior y como coronando el fuste de la columna, es verdaderamente cabeza de ésta, por medio de la cual recibe y sostiene directamente, el arquitrave del cornisamento.

El uso podemos decir casi universal que del capitel se ha hecho en la Arquitectura de todos los países, demuestra que su origen fué motivado por causas idénticas é imprescindibles por lo obligadas, reclamándolo ya lo necesario, ya también lo útil. Con el ensanche de la cabeza de la columna, el arquitrave tiene más superficie donde apoyarse, á la par que se acorta la distancia ó luz del dintel arquitravado en el intercolunio, esto es, entre los dos puntos de apoyo, ofreciendo con ello, más garantías de resistencia para las piedras horizontales que trabajan por presión.

Al principio las formas son sencillas, naturales, espontáneas, hijas solamente de la simple necesidad. Así aparece el capitel dórico, cuyo tipo alcanza la mayor perfección en la maravilla arquitectónica creada por el genio de Caliérates Ictinus (444 años antes de nuestra era).

En los capiteles del Partenón la forma es severa, sencilla, de una corrección de líneas admirable; allí se manifiesta lo eminentemente racional de la misma, y á la vez que el Equino del capitel se ensancha para dar más apoyo al arquitrave; lo hace con todo de tal modo, que tiende á pasar sin ningún esfuerzo ni violencia, de la forma circular de la columna, á la rectangular del arquitrave por medio del abaco; de aquí, ese perfil ligeramente curvilíneo, con tendencia á la línea recta, la cual origina la meridiana del Equino (fig. 146″), parecida algún tanto á la Parábola.

Más tarde, el deseo de innovación, y de embellecer más si cabe las primitivas formas, éstas se complicaron introduciendo nuevos cuerpos, apareciendo el capitel jónico, cuyo tipo llegó á su culminación, con el capitel del templo del Erecteo.


Fig. C

Se distingue este capitel del anterior en virtud de aparecer en él, dos como cojinetes laterales (fig. C″) arrollándose en sí mismos, dando con ello motivo á las volutas que aparecen en las caras de frente y posterior, enlazándose cada una de frente con su compañera de la cara posterior por medio de las campanas, cuerpos cuya superficie que las limitan afectan la forma de tales, y su generación, puede clasificarse dentro de las superficies envolventes, lugar geométrico de las posiciones que toma una línea ó superficie dada, sujeta á moverse y variar en sus dimensiones, según una cierta ley continua y determinada, y según sea esta línea ó superficie, y la manera con que varía en sus dimensiones, se originan la gran variedad de superficies campaniformes objeto de este detalle, dentro el gran número de ejemplares con que aparecen en el arte.

conjunto se representa en la fig. 146, lám. 24, tal como está constituído con todas sus molduras y ornamentación, mas para el problema de sombra, prescindiremos del ornato, presentando al capitel solamente con sus masas principales, toda vez que resuelta así la cuestión, el buen tino y práctica del artista, sabrá apreciar las pequeñas modificaciones que sufrirá la línea de sombra, al encontrar los pequeños relieves, que perfilan los contornos y siluetas de los detalles ornamentales.

Sea, pues, así la fig. 146', que representa el alzado y planta del capitel de este modo dispuesto; se emplea el rayo luminoso, cuyas proyecciones forman ángulos de 45° con la línea de tierra, aprovechándonos aquí como en otros casos vistos, de las ventajas de semejante dirección. Las partes que componen este capitel son las siguientes:

1.° El *abaco* A, terminado superiormente por un plano horizontal, destinado á recibir al arquitrave. Este cuerpo tiende á la forma piramidal y lo limitan por sus cuatro lados superficies ligeramente cilíndricas, cuya sección recta es un cuarto bocel de figura aproximada á la mitad de un corazón. La cuerda de la curva de este perfil de sección recta esta inclinada de 60° para con respecto al plano horizontal, y por esta inclinación se regula la de la curva, para con respecto al galbo que ofrece. Esta curva la han querido trazar algunos autores, valiéndose de una curva compuesta de varios centros, dando con ello varios procedimientos, más la opinión general es que era trazada á mano y como á curva de sentimiento.

2.° *Los cojinetes* B*, compuestos de las *volutas*** C que se revuelven en forma de espiral, apareciendo en las caras frontal y posterior. En ellas las volutas quedan enlazadas por medio de lacerías que nacen del mismo ojo O de las mismas. De las *campanas* L, formadas por superficientes envolventes de

---

* Los llamamos así, insiguiendo la denominación de Vitruvio, que les llama *pulvinus* (cojines).

** Quieren algunos que las volutas lleven su origen de las costumbres que antiguamente había, de colgar en los templos y en las aras, las cuatro astas de las víctimas; otros dan por cosa cierta que son representación de los rizos que usaban las mujeres en aquel entonces, y finalmente otros, y quizá con más acierto y lógica, las hace derivar de los tapices con que algunas veces se cubrieron los intercolúmnios, arrollándose después en la parte superior de los mismos, cuya disposición concuerda perfectamente, con el rollo de la testa de la envoltura, la cual aparece en la espiral de

contorno campaniforme, dos para cada lado, divididas por una moldura que aparece como ligadura que las fija en su envoltura; estos cuerpos enlazan cada voluta de frente con su compañera de la cara posterior, y como tapando cada una la boca de su respectiva campana. Aquí en este capitel, el abaco y los cojinetes vienen á substituir la llamada *corona* del capitel dórico.

---

la evoluta, así como el lienzo doblado longitudinalmente y ceñido en su mitad, cuyo tiene alguna semejanza con los *pulvinos* campaniformes laterales.

Son varios los procedimientos que se conocen para el trazado de las volutas, y uno de ellos es el de Goldman, cuyo fundamento obedece, al que expone Barrozzio en su obra de arquitectura, aunque si bien bastante modificado, al objeto de facilitarlo, es el siguiente:

Figura 146''' y 146^{IV}. Partiendo del ojo de la voluta, divide su altura *mn* en cuatro partes iguales *m*-1, 1-O, O-4, 4-*n*; por los puntos 1 y 4, los más próximos del centro O, se trazan dos perpendiculares á este eje, como las 1-2, 3-4, y en seguida sobre la línea 1-4 se construye un cuadrado 1-2-3-4; así resulta que el lado 2-3, paralelo al eje de voluta, será tangente al círculo del ojo. Condúzcanse ahora por O, los dos radios O-2, O 3.

Hecho esto, Goldman, divide en seis divisiones iguales el lado 1-4 en 1-5, 5-9, 9-O, O-12, 12-8, 8-4, *y* ahora sobre cada una de las rectas 5-8, 9-12 construye un cuadrado, y éstos tienen tres de sus lados respectivos paralelos, más el cuarto coincide en dirección con el mismo eje de voluta, y sus vértices respectivos, dos de ellos situados sobre el propio eje, y los otros dos en las transversales antes trazadas en O-2, O-3.

En este estado, los centros respectivos de los arcos circulares de voluta, son respectivamente y por su orden los vértices de dichos cuadrados 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 11 y 12.

Puede ya empezarse el trazado haciendo centro en el punto 1, y por radio la distancia 1-A vertical del punto 1 al origen de la voluta, y con él, trazar al arco AB, hasta encontrar la horizontal del punto 2; ahora este último punto es el segundo centro, y con el radio 2-B, se traza el arco BC hasta cortar la vertical que baja del punto 2. El tercer centro y por su orden de numeración es ahora el 3, y el radio 3-C; con ellos podremos trazar el tercer arco 3-D hasta encontrar la horizontal del punto 4, el cual será el cuarto centro, y con el radio 4-D construiremos el arco DE, y así sucesivamente, dando la vuelta y pasando por los centros restantes 5, 6... etc

En cuanto á las líneas espirales compañeras de las que acabamos de describir, y que forman las aristas ó bordes del canal de voluta, encuéntranse sus centros respectivos, asignando ante todo el punto de partida α, distante de A, igual al ancho que se quiera dar á la cinta ó pequeña faja en el pequeño plano en que ambas curvas se desarrollan, buscando luego su centro 13 por medio de una cuarta proporcional entre *m*A, (separación de sobre el ojo á la parte inferior del abaco, origen de la voluta) Aα (ancho del nervio) y O-1 (mitad de la distancia 1-4 del lado del primer cuadrado). Esta cuarta proporcional será igual á O-13 mitad del lado de un nuevo cuadrado que se formará análogamente á los precedentes. De igual manera se encontrarán ahora los otros cuadrados que de él dirivan, insiguiendo iguales procedimientos de los mentados, para encontrar los centros de la primera espiral, y así lograremos los centros designados por 13, 14, 15, 16... etc.

Este cuerpo formado por las volutas, es tal que gracias á su vuelo, quedan sujetas á ellas los demás detalles moldurados que vamos á exponer á continuación, cuales formando superficies de revolución, quedan como si estuvieren empotrados en la masa de los cojinetes, ocultando gran parte de ellas las volutas en las caras frontal y posterior: dichos cuerpos de detalle son:

3.° El *baquetón anular* D, especie de toro de pequeña altura, y que generalmente forma parte de la misma pieza que lleva las volutas.

4.° El *equino* E, superficie de revolución, cuya en este capitel, viene á substituir al cuarto bocel en el capitel dórico romano

El perfil de su curva meridiana, está sentido y trazado como un intermedio entre la recta y la parábola, pero con tendencia á aproximarse más hacia la primera, sobre todo hacia la parte inferior, y con semejantes precedentes aparece con una elegancia, finura, á la par que de una estabilidad que llama poderosamente la atención con semejantes caracteres especiales La cuerda que subtende ese gracioso cuanto admirable perfil, tiene una inclinación de 60°, para con respecto al plano horizontal.

5.° El *junquillo* F, superficie anular de muy poca altura y cuyo perfil meridiano se aproxima al perfil del equino, aunque aquí tiene más tendencia á imitar una semicircunferencia, y su destino es preparar el paso del equino al collarino.

6.° El *collarino* G, cilindro circular de radio, igual al sumo escapo del fuste, con el cual el capitel se asienta en dicho fuste, haciendo el paso de uno á otro detalle por medio del astrágado, cilíndrico H.

El fuste lo supondremos con estrías, tal como aparecen en las columnas del templo que hemos tomado como á tipo, cada una simulando como á nicho esférico y en número de 24, repartidas en la superficie de dicho fuste.

Para con respecto al trazado, tendremos en cuenta y admitiremos las siguientes prescripciones:

Si dividimos la altura IJ del capitel en once partes iguales, resultará que cada una de las partes enumeradas tendrá de estas divisiones:

El abaco una parte. Las volutas nueve partes. El baquetón una parte. El equino una parte con setenta y cinco centésimas. El junquillo veinticinco centésimas de parte. El collarino tres partes.

Las molduras del baquetón, equino y junquillo son tales, que se destacan una de otra con arreglo á la dirección que lleva la línea inclinada de 60°, que las subtende á todas en las líneas del perfil que se descubre á la derecha de la figura, y con trazos punteados como en representación de ocultos. Esta cuerda es la que media del punto K hasta al K'.

La altura IJ del capitel se determinará una vez dado el diámetro MN del collarino, construyendo un triángulo equilátero de base MN, dándonos con ello el vértice I que determina dicha altura.

El punto centro O del ojo de la voluta ha de ser tal, que divide las 9 partes de altura de que ésta tiene, en otras dos partes tales, que estén en la relación de los números 2 y 3.

Que las directrices OX, OY de las volutas se corten en ángulo recto, lo cual permite insiguiendo las tangentes horizontales y verticales, trazar estas curvas de voluta, ya á la mano como curvas de sentimiento, ya también geométricamente valiéndonos del compás.

Que el vuelo del plano anterior de las volutas, para con respecto á la generatriz más saliente del fuste, sea igual á una de las 11 partes antedichas.

Y con ello pasemos ya, á determinar las sombras en detalle:

1.° **Sombra de las volutas sobre el fuste.**—A este efecto, supongamos por un momento, al objeto de facilitar la construcción, que se prescinde del estriado, así como las molduras intermedias, como son, el astrágalo, el junquillo, el equino... etc., y demos por supuesto que el cilindro de la garganta ó collarino, corre de arriba abajo, exento de molduras, encontrando en él la sombra del cuerpo avanzado de la voluta, cual sombra la encontramos en la curva *abcd* del siguiente modo.

En primer lugar, fijémonos en la recta *ef* horizontal, tangente en el punto *g* hacia la parte inferior de la voluta, y encontraremos la sombra que produce sobre el cilindro del fuste. El plano de sombra que pasa por esta recta está inclinado de 45° con los planos de proyección, siendo paralelo á la línea de tierra; en este concepto, cortará al cilindro del fuste según una sección elíptica, pero que proyectada ten-

drá los ejes iguales, y por lo tanto su proyección será un círculo de diámetro igual al del collarino, bastará, pues, encontrar la sombra del centro.

Este obedecerá al punto originario k de la recta ef, puesto que la distancia ki es igual al vuelo δ, de la cara anterior de voluta, con respecto al plano tangente vertical $\alpha\alpha'$ de la generatriz β más saliente del fuste.

Y en efecto, para comprenderlo así, basta concebir como, tanto el cilindro como la recta ef, íntimamente relacionados, giran de un cuarto de revolución en torno del eje ωI; entonces la generatriz más saliente β del cilindro vertical, vendrá á confundirse con la del contorno aparente ih, en tanto que la recta ef, sin alterar en su altura, se proyectará ahora en el punto k, á la distancia de esta genetratriz de $ki = \delta$. Ahora el plano de sombra se proyectará según la recta kl', que partiendo de k estará inclinada de 45°, y toda la sección elíptica que producirá este plano al cilindro, se confundirá con la recta, en el trecho que va del punto de partida l á su opuesto l' del contorno aparente del cilindro, pasando esta recta por ω, mitad de la misma, y proyección del punto de intersección de este plano de sombra con el eje. Los semiejes de esta elipse en el espacio serán, pues, $l\omega$ y el que está proyectado en el punto ω, que en magnitud es igual al radio del cilindro. Pues bien, al trasladarse estos datos á su primitiva posición, el eje ω viene á colocarse sin variar de altura en la recta horizontal hh', mientras que el punto más alto l, extremo del eje mayor, irá á situarse en l''; sobre la proyección vertical de la generatriz central más saliente, que se confunde con la proyección homónima del eje del capitel; y en cuanto al centro ω, queda inalterable en el movimiento. También se ve que siendo isósceles el triángulo $l''h\omega$, y siendo por lo tanto iguales los catetos, los ejes de esta elipse, proyectados en nuestro plano de frente, resultarán iguales, y por lo tanto la elipse se convertirá proyectada en un círculo. En su virtud, con el centro ω y con el radio $\omega l''$, descríbase este círculo, y él será la sombra de ef sobre el fuste, aunque limitada desde e' hasta f', cuyos puntos obedecen á los originarios ef, cuales son sencillamente auxiliares para poder encontrar los demás.

Así el punto g tiene por sombra el g', mediante el rayo luminoso que parte de g, y encuentra luego en g' á la circunferencia últimamente descrita.

Para el punto c imagínese la vertical $c''c'$, que pasa por

el punto c', y proyectado en c'', sobre ef, su sombra estará en c''', encima de la mentada circunferencia; por c''' se levantará ahora la vertical $c'''c$, sombra arrojada auxiliar de la $c'c''$, y finalmente la intersección de ésta con el rayo que parte de c' dará el punto c.

Del mismo modo, si queremos determinar la sombra de b' en donde la tangente es vertical, nos valdremos de la vertical auxiliar $b'f$; la sombra de f, está en f', y la vertical $f'b$ que por este último punto se levanta, será la sombra de $b'f$, igual y paralela á la originaria; luego b es sombra de b', y así sucesivamente iríamos continuando. Mas con los puntos que hemos determinado, hay los suficientes para trazar la curva con bastante exactitud, pues todos ellos son puntos notables. Así, el punto g produce el g', y en él, la curva y el círculo $hl''h'$ tienen una tangente común. El m produce el m', en el cual la tangente á la curva de sombra está inclinada á 45°, pues se trata de un punto m del contorno aparente. Iguales circunstancias acontecen con el punto a' que produce la sombra en a, siendo el rayo luminoso tangente á la línea en este punto a. En el punto b, sabemos ya de antemano la dirección de la tangente, cual es vertical; por último, el punto c es un punto ordinario cualquiera, en resumen, que tenemos cinco puntos y la dirección de las tangentes á la curva hacedera para cuatro de estos puntos; esto es los suficientes elementos para trazarla. Ya obtenida, consérvese de ella todos los trechos en que el cilindro del fuste y del collarino existen inalterables; bórrese luego en los sitios ocupados por molduras, y en ellas y atención hecha á su forma y sus vuelos, dibújense el contorno de sombra arrojada que substituya á la borrada, acusando los resaltos después de haber determinado la sombra propia de las demás molduras, así como la arrojada que se proyectan entre sí; esto es las superiores sobre las inferiores.

Esta última operación necesita mucho tino y práctica de parte del dibujante, y que sea conocedor del modo como se conducen y se suceden las variantes de estas sombras dependientes de las formas y contornos; y las salidas más ó menos profundizadas que existan entre los miembros entre sí.

Y se comprende que así hayan de determinarse, atención hecha de lo difícil y engorroso, encontrar con los procedimientos geométricos, las respectivas intersecciones del cilindro de sombra de la voluta, con el cúmulo de superficies de

revolución de relativa poca altura, con distintos vuelos y hacinadas entre sí, superpuestas, formando unas con otras ángulos agudos. Por cuidado pues que tenga el operador, es muy fácil incurrir en algún error, y por otra parte, admitida lo relativa de la exigua altura que ocupan, y conocedor el que dibuja de los fenómenos que aparecen en el resalto que acusan la salida y forma de los cuerpos, en virtud de su sombra arrojada, puede darse por más exacto el que de momento, el artista proceda por su cuenta y riesgo al dibujo de estas líneas interrumpidas, las cuales no discreparán ni un ápice de las que hubiera encontrado insiguiendo exactamente los métodos doctrinarios.

Sombras propias de las molduras.—Son todas ellas superficies de revolución, y como á tales no hay más que repetir lo dicho al tratar de las molduras análogas que forman parte (n.° 146) de la base de columna; el procedimiento es exactamente igual, no hay, pues, para qué detenernos con ellas. Lo propio que en los cilindros del collarino del fuste y del astrágalo.

Sombras arrojadas.—También el procedimiento es idéntico con el adoptado en el (n.° 146) y á este efecto, como allí recurriremos á un plano de proyección vertical auxiliar $\omega''z$, pasando por el eje de la columna é inclinado de 45° hacia la derecha con el plano vertical de proyección (este plano, es pues, perpendicular á la proyección horizontal del rayo luminoso); determínense, pues, sobre este plano las curvas *ovales* que constituyen las sombras arrojadas de las superficies tóricas del baquetón, del equino, y del junquillo; así la curva pqr será la curva oval que corresponde al baquetón, la sqt, la del equino, y la Wvx la del junquillo, recordando únicamente aquí, que siempre que tengamos de operar con una moldura tórica larga y de poca altura, puédese con ella facilitar la operación de la sombra arrojada, substituyendo á su curva oval por una circunferencia, en cuyas circunstancias es insignificante é invisible el error que se comete *.

* En efecto, no hay más que recordar que la sombra arrojada del toro sobre un plano cualquiera, viene á ser sencillamente la línea que envuelve todas las sombras arrojadas de los distintos paralelos de la superficie; ahora bien, en nuestro caso en donde se emplea como auxiliar para recibir la sombra, el plano vertical consabido de los 45° que hemos llamado Π, recibe las sombras de estos paralelos según círculos, y la envolvente de todos ellos es nuestra curva oval; mas se comprende perfectamente que si la superficie tórica es larga y de poca altura, los círculos que se irán obtenien-

Encontradas estas sombras arrojadas en el plano de 45° antedicho, ellas irán encontrándose respectivamente, dándonos los puntos como por ejemplo los q y x de ellos (que son trazas de rayo luminoso sobre el plano Π, vertical auxiliar) parten en contra proyección oblicua, rayos de sombra, los cuales indicarán desde luego los puntos de pérdida q', x' el primero del punto q'' del baquetón sobre el equino, y el segundo del punto x'' del equino sobre el junquillo; en ambos q' y x' la tangente á las curvas de sombra arrojada sobre las superficies tóricas, se encuentra inclinada á 45°, confundiéndose con el propio rayo luminoso en proyección vertical.

Ya obtenidas todas estas operaciones, se procederá según ya anunciamos al principio, á establecer los resaltos que produzca la sombra arrojada de la voluta sobre las molduras, para que las mismas puedan cumplir con toda la exactitud que de desear sea; y ya que es conveniente por otra parte, trazarlas á mano y de primera intención, como á curvas de

do en la sombra arrojada, irán aproximándose cada vez más, y su envoltura en el límite cuando la altura de la superficie fuera disminuyendo, aproximándose los paralelos más altos y bajos al central, esto es al ecuador; la envoltura se habrá confundido con la sombra del círculo del citado ecuador.

Por lo tanto, á medida que la altura de la superficie tórica va disminuyendo, quedando constante la magnitud del ecuador, podrá dejarse por sentado que las sombras arrojadas de las distintas superficies que se van sucediendo, tienden á confundirse con el círculo de sombra del ecuador.

El procedimiento práctico F.ª 146VI para conseguir entonces el círculo de sombra arrojada que va á substituir la curva oval por aproximación, queda reducido á dividir la distancia Oa en tres partes iguales; tomar luego el punto b de la última división como á centro, y por radio la distancia be, (puesto que e es sombra de sí mismo en el plano Π). Describiendo luego la circunferencia $meg''n$, ésta será la sombra arrojada en cuestión.

Ahora ésta corta á la generatriz tu del cilindro (sombra arrojada de sí misma en el plano Π en el punto k', y por lo tanto éste, será sombra arrojada del k, cual encontraremos por contraproyección oblícua, por medio del rayo que pasa por k'; así el punto k' es punto de pérdida, y en él la tangente á la curva arrojada es paralela ó se confunde con el rayo de luz.

Valiéndonos de este procedimiento es que también podríamos encontrar cualquier punto de sombra arrojada, del toro del junquillo sobre el cilindro. Así, si nos proponemos encontrar la sombra arrojada en el punto h', en donde la curva corta á la generatriz medio po, encontraremos la sombra arrojada rr', de esta generatriz sobre el plano Π levantada en r, mitad de ps; la intersección de dicha sombra rr', con el círculo $\triangle$ dará el punto h'', y de ahí el originario h y su sombra arrojada h'. Lo propio haremos con los g', n' situados el 1.° en la generatriz á los 45° de la izquierda y 2.° en la del contorno aparente.

sentimiento, convendrá disponer de ellas cuando menos el punto de partida; así será por ejemplo el punto π, para la que concierna al astrágalo, del punto y, para la del junquillo, el punto z para la del equino... etc., aprovechando siempre para semejantes operaciones el plano II.

Sombra del canal de la voluta.— Llámase canal de la voluta, las superficies Ω entrantes, comprendidas entre las líneas de su espiral. El modo más á propósito rápido y suficiente exacto para encontrar dicha sombra, consiste, en partir del supuesto que este canal sea plano por un momento, entonces la sombra arrojada de la voluta, sobre el mismo, será exactamente igual á la curva de arista de la voluta, y entonces bastará reproducir ésta en el plano del canal, á la distancia del resalto, pero trasladándola hacia la parte inferior y á la derecha del rayo luminoso, esto es, hacia la dirección de los 45°, habiendo formado con ello para el punto ν el triángulo, $\nu\gamma\gamma'$, rectángulo isósceles, cuyos catetos iguales al resalto ρ, proporcionado por el corte de la (fig. 146ᵛ). Ya obtenido el dibujo con esa primera línea auxiliar, de ella podemos deducir modificándola ligeramente, la verdadera; retocando aquella, ya haciendo avanzar ó retroceder los puntos, según que la curvatura de la superficie del canal lo indique, y estas curvas, que únicamente el conocimiento y práctica del artista puede acertar, no son por otra parte tan difíciles de precisar, si se tienen en cuenta, los cortes que pasando por el ojo O de la voluta, conviene tener á mano conforme y análogamente al de la fig. 146ᵛ que precisa todos estos resaltos, en el sentido vertical.

Sombras en las estrías.—Pueden también encontrarse brevemente operando del modo siguiente. Como se trata de nichos esféricos de relativos y reducidos anchos, las curvas de sombra, no se extienden mucho, así es, que conociendo como conocemos la índole y forma de esta curva de sombra, con solo que conozcamos, dos puntos, cuales son el de partida sobre el arco circular, y el último, con su tangente, podremos ya trazar las curvas con suma brevedad.

Así, los puntos últimos se obtienen desde luego en θ, θ, θ, etcétera, valiéndose de la planta, y haciendo pasar planos de sombra rasantes en $\theta'\theta'$, cuales nos dan las generatrices verticales que obedecen á los puntos θ'', y ellas siendo cortadas por los rayos luminosos que parten de los puntos θ_1, dan definitivamente el último punto θ y su tangente.

Para los de partida; el que corresponde al nicho central Θ, éste se obtiene en seguida en μ, con sólo trazar una tangente á la curva de cabeza; que sea paralela á la proyección vertical del rayo luminoso.

Por razón de simetría este punto μ, si lo trasladamos en μ' en la última estría de la derecha Υ, aquel será el que pertenezca al punto de la misma índole en el nicho Υ.

Para el nicho △, situado á la izquierda y á los 45°, el punto de partida estará en el arranque ψ, toda vez que el nicho está en plena luz, é imaginando el cilindro auxiliar circunscrito á la esfera horizontal y perpendicular al plano vertical meridiano que subtende los puntos de arranque, tendremos que este cilindro será paralelo en proyección horizontal al rayo luminoso, y por lo tanto, los planos tangentes al propio cilindro, y paralelos al rayo luminoso, serán verticales; y tangentes á lo largo de las generatrices de arranque.

Finalmente para el nicho Ξ, colocado también á los 45°, pero hacia la derecha, el punto de partida estará en φ, en donde se verifica la tangencia del arco de embocadura con la recta paralela al rayo de luz, y en efecto, aquí el cilindro circunscrito, sería perpendicular á la proyección horizontal del rayo luminoso, obteniéndose su sombra propia, trazando por φ, una tangente al ángulo ω (n.º 20-2.º) al círculo de base rebatido, lo cual equivale, á trazar una tangente á 45° paralela al rayo luminoso, á la elipse que es proyección vertical del expresado círculo.

Con los puntos ψ, μ, φ, μ', puede trazarse ahora una curva y ésta cortando á los arcos elípticos de los nichos que encuentre á su paso, facilitará los puntos τ, que serán los de partida de los mentados restantes nichos esféricos.



CAPITULO VII

SOMBRAS EN LAS SUPERFICIES ALABEADAS

148. Recuerdo de propiedades de las superficies alabeadas.—Las superficies alabeadas son regladas, pero satisfaciendo á la condición, que dos generatrices consecutivas no estén en un mismo plano. No puede pues, extenderse sobre un plano, una superficie de esta índole, sin que sufra quebranto en su solución de continuidad, apareciendo, si á tal hecho se la obligara, un sinnúmero de pliegues, abolladuras y hasta roturas según la índole del material sobre el que estuviera acusada. Semejante propiedad es de fácil explicación, observando la (fig. 153, lam. 25), en donde G y G′, son dos generatrices de la superficie alabeada, y la recta *ob*, su mínima distancia, para que estas dos rectas pudiéramos colocarlas en un mismo plano, sería necesario, ó que se cortasen ó que pudiéramos moverlas de modo que llegasen á ser paralelas.

Para que se cortaran, sería preciso que colocáramos aproximándolas un punto de la una sobre un punto de la otra, como *a* sobre *b*. Mas esto no es posible, pues suponiendo que entre estas dos generatrices media un tejido continuo de superficie, cual al aproximarse estas dos rectas se doblegaría formando pliegues y rugosidades.

En cuanto á conducir á una de ellas una paralela á la otra, entonces pueden suceder dos casos: 1.° que la distancia constante que ha de mediar entre todos los puntos de la una y todos los puntos de la otra, sea igual $<$ ó $>$ que *ab*, en el primer y segundo caso, es menester se someta á una de estas

generatrices, á un movimiento de aproximación, forzando así á los puntos intermedios del tejido, á sobreponerse, apareciendo con los pliegues ó abolladuras, mientras que en el segundo caso precisaría se apartara una de la otra, las generatrices, haciendo con ello tensión al tejido intermedio, que podría hasta romperse, según fuese su naturaleza y potencia del esfuerzo.

149. En toda superficie alabeada, los *planos tangentes trazados cada uno en cada punto de una misma generatriz son distintos*, al contrario de lo que pasa en las superficies desarrollables, en que el plano tangente en un punto, lo es también á lo largo de la generatriz de contacto, (fig. 147), G, G′, son dos generatrices sucesivas, escójanse dos puntos *a*, *a′*, en G, y por ellos trácense dos planos secantes P y P′, perpendiculares á G; estos planos cortarán á la superficie según dos curvas, la C para el primero, y la C′ para el segundo. Ahora tenemos que el plano tangente en *a*, contiene la generatriz G y la tangente *at*, á la curva C, mientras que el plano tangente en *a′*, contiene también la generatriz G, y la tangente *a′t′*, á la curva C′; mas estas últimas tangentes son precisamente la prolongación de los elementos rectilíneos de C y C′ situados sobre la zona alabeada que media entre G y G′; ahora bien, si estas dos tangentes fuesen situadas en un mismo plano, lo estarían igualmente las G, G′, en donde aquellas se apoyan y por tanto la superficie sería desarrollable, que es contra el supuesto, luego infiérese de aquí, que los planos tangentes en *a*, y en *a′*, son completamente distintos.

150. De ello se puede admitir como á corolorios. Primero. Todo plano (fig. 147′) P, tangente en un punto *a*, de una generatriz G de una superficie alabeada, corta á dicha superficie según la mencionada generatriz G, y además, generalmente, según una curva AB, la cual corta á su vez á la mentada generatriz en un punto *a*, que es precisamente el de contacto.

Segundo: Todo plano que contiene una generatriz G (figura 147′) de una superficie alabeada, es un plano tangente de la misma, y el punto de tangencia se encontrará en la intersección de la generatriz G, con la curva de sección AB, producida por el corte de las demás generatrices G′, G″, G‴,

etcétera con dicho plano; así pues en general, el plano tangente lo es en un punto de una generatriz, y secante á todas las demás.

Cuando el punto de contacto del plano que pasa por una generatriz de una superficie alabeada, se encuentra al infinito, entonces á dicho plano tangente se le llama *asintótico*.

Sabemos que para fijar la ley de generación de una superficie y quede determinada convenientemente una cualquiera de sus generatrices en el espacio, son necesarias tres condiciones, las que, según se den en las alabeadas, constituyen dos grandes agrupaciones dentro de la misma familia. La una es que la recta generatriz se apoye en el movimiento sobre tres líneas cualesquiera, y la otra, que se apoye solamente en dos líneas cualesquiera, imponiendo empero la tercera condición de modo que sea constantemente paralela á un plano, el cual se llama plano director de la superficie.

Dentro de la primera agrupación caben condiciones equivalentes al resbalamiento sobre tres líneas; así pueden ser las directrices dos líneas y una superficie, á la cual sea tangente la generatriz, ó bien una línea y dos superficies, ó que sean tres superficies á las cuales permanezca tangente la generatriz, etc. En la segunda también una de las dos líneas directrices puede cambiarse por una superficie, ó también las dos si se quiere, del mismo modo podía cambiarse la condición del plano director sustituyéndolo por otra condición, de modo que la generatriz forme constantemente un ángulo constante, con una recta ó plano determinado, etc., etc.

151. Entre todas las superficies alabeadas, existen dos especialísimas de suma importancia á la vez, una de ellas pertenece á la primera agrupación, es el hiperboloide de una hoja, y es cuando las tres líneas directrices son rectas, y la otra el paraboloide hiperbólico, el cual aparece haciendo que sean rectas las dos líneas directrices permaneciendo el plano director, ambas son las llamadas superficies alabeadas, de 2.° grado, pues que efectivamente se demuestra en G-D, que son las mismas que las que se estudian con igual nombre, dentro de la familia de las superficies de 2.° grado.

Su estudio como alabeadas es de gran trascendencia para servir de auxiliares á las demás superficies de esta última agrupación; toda vez, que siendo facilísima la construcción del plano tangente al hiperboloide y al paraboloide hiperbólico; esto mismo hace, se haga depender de ellas el plano tangente de otra superficie alabeada cualquiera, cuya construcción fuera más compleja.

Sabido es que la facilidad que resulta del trazo del plano tangente á dichas dos mentadas superficies, es precisamente consecuencia de la doble generación rectilínea que poseen, y así el plano tangente en un punto cualquiera de la superficie, queda determinado en el momento que conozcamos las dos generatrices de sistemas distintos, que pasan por el mencionado punto.

Mas para poder realizar esta dependencia y substitución momentánea de una superficie por otra, es forzoso partir del siguiente teorema.

152. Si dos superficies alabeadas tienen una generatriz común y los mismos planos tangentes en tres distintos puntos de dicha generatriz, se acordarán perfectamente á todo lo largo de la misma; esto es, que tendrán todos los planos tangentes comunes, para todo otro punto que se considere sobre dicha generatriz.

Sea fig. 148 sobre la generatriz común, los tres puntos L, M, N, en los cuales las superficies Σ y Δ tienen los tres planos tangentes comunes.

Puesto que el plano tangente en L, es el mismo para las dos superficies, es evidente que si hacemos pasar por el indicado punto, un plano cualquiera, éste las cortará según dos curvas LA y LA′, que tendrán por tangente común la intersección LR de este plano con el tangente, y que por consecuencia, en una zona infinitamente pequeña LL′, de esta tangente, pueden considerarse como coincidiendo ó confundiéndose.

De la misma manera, si trazamos otro plano por el punto M aparecerán dos curvas MB, MB′ teniendo un elemento común MM′, y por último otro plano que conduzcamos por el punto N nos dará por sección con Σ y Δ otras dos curvas NC, NC′, teniendo de común el elemento NN′. Si hacemos ahora resbalar la recta LN sobre las tres curvas LA, MB, NC y enseguida sobre las otras tres curvas LA′, MB′, NC′, es evidente que se reproducirán las dos superficies propuestas; luego estas dos superficies coinciden en toda la extensión comprendida entre las dos generatrices infinitamente próximas

LN, L'N'; y por consiguiente en cada punto de LN ambas superficies tienen el mismo plano tangente.

153. Si las dos superficies Σ y Δ tienen dos directrices y un plano director común, entonces bastará que sólo tengan dos planos tangentes comunes en dos puntos de la generatriz en donde deba verificarse el acuerdo, y entonces también tendrá lugar, que verificándose semejante condición, todo otro punto cualquiera escogido en dicha generatriz G, cumplirá la de el plano tangente en este punto Σ cual será el mismo que el de Δ.

Y en efecto, supongamos estas dos condiciones cumplidas y cortemos á Σ y Δ por dos planos, uno que pase por el punto A de la generatriz G y otro por el punto B de la misma, dichos dos planos nos darán en las secciones dos curvas para cada plano; de modo, que haciendo servir dichas líneas como á directrices de semejantes superficies, empleando siempre para las dos el mismo plano director dado, será evidente que siendo comunes los elementos de las curvas de sección en el punto del plano tangente común, la generatriz G al resbalar por dichos dos elementos de las curvas directrices, habrá formado una misma superficie situada en Σ y á la vez en Δ; luego dichas dos superficies quedan en un verdadero acuerdo á lo largo de la generatriz G.

En general, para determinar el movimiento de una recta generatriz de una superficie alabeada, hay precisión de tres condiciones. Así, si para dos superficies alabeadas que tienen una generatriz común las tres condiciones son distintas, tres serán los planos tangentes que hayan de tener comunes para que el acuerdo se verifique. Si existe entre ellas una condición común, entonces sólo serán necesarios que sobre la generatriz de que se trate, en dos puntos de ella, exista en cada uno, un plano tangente común, y finalmente, si ellas están ya ligadas por dos condiciones iguales, en este caso bastará un sólo plano tangente común para que se verifique el acuerdo á lo largo de dicha generatriz.

154. La importancia y utilidad en las aplicaciones de semejantes propiedades, permite que cuando se *tenga que construir un plano tangente en un punto dado en una superficie alabeada cualquiera, se pueda substituir siempre esta superficie por un hiperboloide ó paraboloido hiperbólico* cuyas directrices son rectilíneas, y entonces se facilita el problema, pues varía y abrevia notablemente el trabajo, substituir á la curva de intersección del plano tangente con las generatrices de la superficie con la recta de intersección, que resulta, del corte del plano tangente mentado, con el hiperboloide de acuerdo.

Para hacer más claro el razonamiento, sea en la fig. 149 una superficie alabeada cualquiera Δ, en ella una generatriz G y un punto a en esta recta, por el cual deseamos trazar un plano tangente. Según el teorema precedente, puédese substituir dicha superficie Δ por toda otra superficie alabeada que se acuerde con ella según la generatriz G, ó lo que es lo mismo, han de tener tres planos tangentes comunes en tres distintos puntos de G, y aun eso no más será imprescindible en el caso de que para la segunda superficie, no se conserve ninguna de las tres condiciones que determinan el movimiento de la generatriz de la primera, ya que si llegan á cambiar dos de estas condiciones, dos serán los planos tangentes que hayan de ser comunes, y uno solamente en el concepto que cambie solamente una de las condiciones referidas.

Es evidente que existen infinidad de superficies alabeadas (hiperboloides y paraboloides), que pueden cumplir con el acuerdo; pues sabido es, que por cada punto de estas dos superficies especiales, puédense trazar dos rectas contenidas en dichas superficies, en virtud de la doble generación de que disfrutan, y estas dos rectas es claro que pueden considerarse como á tangentes á sí mismas; y por lo mismo, ellas determinan el plano tangente en el punto por donde pasan. Así sean LA, MB, NC las tres curvas directrices, en donde se apoya G que contiene el punto a. Trácense en los puntos de encuentro L, M, N las tangentes Lt, Mt', Nt'' á las tres curvas; tómeselas luego como á directrices del movimiento de G, y entonces engendraremos otra superficie distinta de Δ, cual será un hiperboloide, pero éste será tal, de ser de acuerdo con Δ, puesto que es evidente que tiene de común con ella los planos tangentes de los puntos L, M y N, pues en ellos hay de común en las dos, la tangente á la curva directriz y la generatriz G. Hecho esto, tómense en cuenta dos posiciones de la generatriz G del hiperboloide la G' y G'', tomando ahora como á directrices las G, G', G'' y por generatriz la Lt, hágasela mover, de modo, que resbalando por las tres primeras, pase por el punto a tomando la posición H, entonces el plano

tangente en a á la superficie Δ, será el determinado por las dos rectas aH, aG generatrices de sistemas distintos del hiperboloide.

Mas por poco que se observen los razonamientos anteriores, salta luego á la vista que son muchos los hiperboloides y paraboloides de acuerdo que podamos trazar á la superficie Δ, pues es obvio que si en cada plano tangente de L, M, N trazamos una recta cualquiera que pase por cada uno de estos tres puntos, tendremos así también otro sistema de tres rectas 1, 1′, 1″, que podrán servir de directrices de un nuevo hiperboloide que será de acuerdo con Δ. Lo más ordinario para facilitar las construcciones, es el tomar las tres rectas, de modo que provengan de la sección producida de cada plano tangente, por un plano perpendicular á la generatriz G, entonces las tres directrices son paralelas á un mismo plano, y el hiperboloide cambia en paraboloide.

155. En tal caso (y valiéndonos de la misma figura), suponiendo que por a sobre de la generatriz G, queremos trazar un plano tangente á la superficie Δ, admitiendo, que según se ha indicado, las directrices Lt, Mt', Nt'' son perpendiculares á G, y por lo tanto son ahora paralelas á un cierto plano P, quedará reducida la cuestión, á determinar la posición de una generatriz del sistema G tal como G′; trazar por a un plano Q, paralelo á P, el punto de intersección b de este plano con G′ unido con a, dará la recta ab, la cual junto con G, determinará el plano tangente en a.

Si el punto de contacto no fuera determinado y se quisiera averiguarlo para un plano cualquiera que pasará por G, entonces, necesitaríamos dos posiciones de la generatriz en G′ y G″, y los puntos de encuentro de G′ y G″ con el mentado plano, determinarían dos puntos b y c que unidos darían la recta bc, cuyo encuentro a con G proporcionarían el punto de contacto.

156. Sombra del hiperboloide de revolución.—Sirviendo pues de base á la determinación de las sombras de las superficies alabeadas, la que corresponde al hiperboloide y al paraboloide hiperbólico, empezaremos estudiando la de estas dos últimas superficies. En el hiperboloide consideraremos dos casos, uno particular, cuando el hiperboloide sea de revolución, y en el otro, cuando está dado en general por tres

directrices rectilíneas cualesquiera (F.ª 150). El hiperboloide es de revolución, y está engendrado por la recta ac-$a'c'$ que gira en torno del eje vertical εε′-O, su contorno aparente en el plano vertical por dos ramas de hipérbola, y en cuanto al plano horizontal, serán los paralelos extremos en donde se quiere limitar la superficie; así como el círculo de garganta, propiedades sabidas todas por la G-D. Sea ahora $F^v F^h$ un foco luminoso, y determinaremos la sombra de esta superficie, proponiéndonos encontrarla, averiguando los puntos de ella que estén situados sobre las generatrices escogidas. Sabido es que, teniendo á nuestra disposición el círculo de garganta, las generatrices tienen la propiedad de proyectarse horizontalmente, según tangente al círculo del collarino, atención hecha de la elección de nuestro plano horizontal perpendicular al eje, así, tracemos una generatriz cualesquiera ac-$a'c'$, y sea encontrar precisamente el punto de la curva de sombra, situado sobre la indicada recta generatriz.

Para ello sabemos (n.° 150) que todo plano que pase por dicha generatriz, será ya de hecho, un plano tangente al hiperboloide; el plano que en este caso nos conviene ha de pasar por el foco luminoso; trácese pues dicho plano: Con este motivo, por un punto b-b' de dicha generatriz hágase pasar un rayo de sombra, su traza horizontal es el punto b''' el cual unido con a, traza horizontal de esta generatriz, proporcionaría la $b'''a$, traza horizontal del plano tangente. Falta ahora encontrar el punto de tangencia, el cual será el de sombra que buscamos. Para ello nos valdremos de la propiedad de la doble generación, por la cual inferimos que si el plano tangente $b'''a$-F^h es secante á la superficie según la recta ac $a'c'$ que podremos considerar como generatriz del primer sistema, habrá forzosamente de cortar también á la misma superficie según otra recta, que será generatriz del segundo sistema, ahora con ello, hagámonos cargo del punto e, en donde la traza horizontal de la superficie es cortada por la traza horizontal ab''', del plano *tangente-secante*, y entonces con evidencia el punto e-e', será la traza horizontal de la segunda generatriz que buscamos, y ella como todas las demás, vendrá proyectada horizontalmente según la ef, tangente al círculo del collarino, y de esta proyección se podrá inmediatamente deducir la proyección vertical $e'f'$. Las rectas fe y ca', ahora encontrándose en un mismo plano se cortarán en un punto g, para el plano horizontal, y en g' para

el vertical; éste será ya definitivo el punto de sombra. Repítase esta operación, escogiendo nuevas generatrices tal como la *mn-m'n'*, y obtendremos así puntos análogos como el *y-y'* y unidos todos darán la curva compuesta de dos partes *hyigd* $h_1y_1i_1g_1d_1$, esta curva es una hipérbola, porque este hiperboloide alabeado, es exactamente la misma superficie de segundo grado, conocido con el nombre de hiperboloide de una hoja. *

Claro está pues que, estando en posesión de esta propiedad podríamos resolver el problema con arreglo al teorema (n.° 113), y para ello, bastará trazar á la superficie un diámetro que pasa por el foco luminoso; luego el plano diametral que le sea conjugado, y finalmente el paralelo á este último que contiene la curva de sombra.

---

* Desde luego, la doble generación rectilínea de esta superficie alabeada ya de por sí manifiesta, que la misma puede introducirse también en la agrupación de las superficies de 2.° grado, pues las condiciones por las cuales se expresa, que si un plano corta al hiperboloide según una generatriz, le ha de cortar también según otra generatriz rectilínea ha de conducir forzosamente á una ecuación de segundo grado.

Además dentro de las superficies de 2.° grado, no puede ser ni un cilindro ni un cono, porque estas son desarrollables. Tampoco puede ser un elipsoide, por estar éste limitado en torno de su centro, y por lo tanto no admitir ninguna sección rectilínea; ni otra cualquiera de ramas infinitas. No puede ser un hiperboloide de dos hojas, por la sencilla razón, de que éste presenta entre las dos hojas, un intérvalo imaginario, y por lo tanto no es dable que contenga en su superficie una generatriz rectilínea continua é indefinida. Finalmente, no puede ser un paraboloide hiperbólico pues que éste no admite ninguna sección cerrada; luego hemos de convenir que es el hiperboloide de una hoja.

Mas por otra parte, es fácil inferir que la superficie engendrada por la revolución de una recta *mA*, en torno de un eje ZO, es la misma, que la engendrada por una cierta hipérbola que gira alrededor del mismo eje OZ, y por lo tanto la superficie alabeada producida por el movimiento de dicha recta, será una superficie de revolución y de 2.° grado, cual es el hiperboloide.

Sea para esto en la (fig. 152) *mA* la recta generatriz, OZ el eje, *mnp* el círculo del collarino, descrito por el punto *m*, puesto que *m*O es la mínima distancia de dichas dos rectas. Concibamos el plano meridiano el ZOX, en este estado, la recta *mA* se proyecta según una tangente al collarino, sobre el plano de éste, se infiere que *m*A', siendo traza del plano proyectante A*m*A', sobre el citado plano; el punto de intersección A habrá de encontrarse sobre la vertical AA', que no es más que la traza de dicho plano proyectante con el meridiano escogido. Pues bien, si análogamente escogemos otras generatrices y encontramos sus intersecciones con el plano ZOX, uniendo luego los puntos que resulten, obtendremos con ello una cierta hipérbola A*n*, la cual será evidente que girando alrededor del mismo eje OZ, estará contenida, en aquella superficie y por lo tanto la engendrará lo propio que lo hacía la generatriz *mA*.

El punto A, pertenece pues á una hipérbola, en efecto, adoptemos como ejes

También sabiendo de antemano que esta curva de sombra ha de resultar plana, cabe el escoger como lo hemos hecho en este caso; un plano de proyección vertical auxiliar, en que esta curva se proyecte según una recta, esto es, según la traza vertical del mencionado plano. Para ello obsérvese, que si dirigimos tangentes al círculo del collarino, que partan del foco luminoso, la cuerda que los una, será horizontal, y además estará contenida en el plano de la curva; si pues escogemos una nueva línea de tierra perpendicular á dicha cuerda, y adoptamos el nuevo plano vertical que nos designe dicha línea de tierra, si referimos todos los datos en este nuevo plano, estaremos seguros, que las dos ramas de la línea hiperbólica de sombra, vendrán expresadas en él, en una sola recta *h'd'*. A esto pues ha obedecido, que desde su principio hubiéramos hecho una elección particular del foco luminoso, escogiendo así el plano de proyección vertical, paralelo al meridiano que pasase por el precitado foco $F^v F^h$; aparte de que también esto servirá para apreciar mejor las propiedades y resultados que se desprendan, de las operaciones ulteriores y que interesan al problema de las sombras.

En el concepto de disponer de un plano de proyección vertical cualquiera, para con respecto al foco luminoso, es evidente que la línea de sombra sobre dicho plano, aparecería en la proyección vertical, una hipérbola, expresada por sus dos ramas, y entonces para precisar mejor dicha curva, podríamos tratar esta superficie, como en la agrupación de las de revolución, en cuyo caso, podríamos proponernos encontrar

---

coordenados OX, OZ, y así podremos ya establecer las siguientes analogías $oA'=x$, $AA'=z$, $on=\delta=om$, el ángulo A*m*A', será siempre igual, para todas las generatrices que se escojan, y así podemos poner tang. $AmA'=\alpha$.

Ahora en el triángulo rectánculo A*m*A' se tiene tang. $AmA' = \frac{AA'}{mA'}$, y luego teniendo en cuenta el otro triángulo rectángulo A'*om*; en el que $mA' = \sqrt{\overline{oA'}^2 - \overline{om}^2}$ podremos poner sustituyendo tang. $AmA' = \frac{AA'}{\sqrt{\overline{oA'}^2 - \overline{om}^2}}$

Sustituyendo finalmente, cada término por las notaciones convenidas se tendrá

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2 - \delta^2}}$$

$\alpha^2x^2 - \alpha^2\delta^2 = z^2$, evidente, ecuación de una hipérbola, en cuya ecuación haciendo $z = o$, nos dará $x = \delta$, para el semieje re l.

puntos de la línea de sombra que estuviesen situados sobre un paralelo dado de la superficie; aquí los más indicados serían los paralelos más altos, AB, el más bajo A'B', y el que corresponde al collarino CD, así encontraríamos (n.° 139) los puntos $h' \cdot h_1$, $h' \cdot h$, para el primero, $d' \, d_1$, $d' \text{-} d$, para el segundo, y finalmente el $i' \text{-} i_1$, $i' \text{-} i$ para el tercero, este último, con solo trazar tangentes al círculo del collarino, desde el punto F^h, y luego referir los puntos de tangencia i_1, i', en i', en el plano vertical.

También es sumamente cómodo, la averiguación de puntos $j \cdot j'$, $j \cdot j''$, situado sobre el paralelo, cuyo plano pasa por el mismo foco, pues entonces, las tangentes trazadas desde F^h, al círculo del citado paralelo, los proporcionan en seguida.

Si bien consideramos siendo aquí la curva plana, la traza vertical queda determinada inmediamente, toda vez que los puntos $i_1 \cdot i$ del collarino, determinan la cuerda ii_1, la cual pertenece al plano de la curva y además es perpendicular al plano vertical, proyectándose en él, según el punto i', además el plano de dicha línea de sombra, es paralelo al diámetro HG, cual es conjugado de la dirección F^v O', trácese pues $h'd$, por i, paralela á HG, y ella será la traza vertical de este plano de sombra.

Sin acudir á semejante propiedad, hubiéramos podido utilizar el punto j (por ser muy fácil de encontrar), y luego unirlo con i.

Siendo una hipérbola, en este caso, la línea de sombra, puédese para mayor exactitud en el trazado buscar sus asíntotas. Estas pueden encontrarse mediante consideraciones sencillísimas. Sabemos son las asíntotas de una curva, tangentes á la misma en un punto situado al infinito; además, la tangente en un punto de una curva plana que proviene de la intersección de un plano con otra superficie, se obtiene combinando dicho plano con el tangente á la superficie en el propio punto.

Ahora bien, aquí el plano tangente si ha de serlo en un punto situado al infinito, ha de ser forzosamente un plano asintótico, y por lo tanto tangente al cono asintótico, y además pasar dicho plano por el foco luminoso, resultando de aquí que si se traza al citado cono, uno ó dos planos tangentes pasando por el foco $F^v F^h$, ellos nos darán dos generatrices de contacto OK, OK', cuyas no serán otras, que líneas divi-

sorias de luz y sombra de semejante cono, á la par que paralelas á dichas asíntotas de la hipérbola de sombra, (pues es bien sabido que cada generatriz del cono asintótico, tiene su correspondiente generatriz paralela en el hiperboloide).

Los planos asintóticos quedan pues expresados por sus trazas horizontales O''K, O''' K', las cuales cortan en q, q' á la traza horizontal dd_1, del plano de la curva; luego trazando por q y q' paralelas á OK', OK, obtendremos las $q'\omega$, $q\omega$ para asíntotas de la curva, siendo el punto ω, la proyección horizontal del centro de la curva, según esto, y como á corolario podemos establecer: *que el plano de la curva de sombra, ha de ser paralelo al plano que determinan las dos generatrices de sombra del cono asintótico.*

La sombra arrojada del hiperboloide sobre el plano horizontal, es una hipérbola, cuya, puede hallarse fácilmente encontrando la sombra, de las distintas generatrices rectilíneas, y la curva envolvente de los puntos de intersección de dichas rectas de sombra, formarán la curva d_1MI$_1$, dNI para la hipérbola arrojada, es de advertir para su mejor trazado, que cada generatriz según esto, tendrá un punto de tangencia con ella; así la generatriz ac, cuya sombra es la inmergida ab''', tiene con la curva, la tengencia en el punto N, y así las demás, cuya propiedad es muy de notar, por sacar buen partido de ella para encontrar las asíntotas de la línea de sombra arrojada, y así rectificarla para su buen trazado.

En efecto, si fuera posible encontrar un punto de la línea divisoria, cuya sombra estuviera á una distancia infinita por aquel punto del espacio, pasaría precisamente la generatriz de la superficie, cual recta tendrá su sombra en la misma asíntota de la hipérbola arrojada. Ahora bien; este punto se tiene desde luego, son dos, los $j \cdot j'$, $j \cdot j''$ que están situados en el paralelo horizontal, cuyo plano contiene el foco luminoso, pues es bien claro, que los rayos luminosos $F^v j$, $F^h j'$, $F^h j''$ siendo horizontales, no harán el encuentro con el plano de proyección horizontal, sino á una distancia infinita. Tracemos pues con este motivo, y por los puntos $j \cdot j'$ y $j \cdot j''$ las generatrices $j'\tau$ y $j''\psi$, cuyas trazas horizontales son respectivamente τ y ψ; por la primera conduzcamos la $\tau\Theta$ paralela á la tangente horizontal $F^h j'$, y por la segunda la $\psi\Theta'$ paralela á la tangente $F^h j''$, estas rectas así trazadas, serán las asíntotas de la hipérbola de sombra, dando en su encuentro ω_1 el centro de la curva.

También es fácil hallar el eje real de dicha curva, observando que el punto ω_1 es sombra del punto ω_2, por cuyo punto pasa el paralelo XZ; encuéntrese pues el círculo de sombra de dicho paralelo, y la cuerda de este círculo de sombra, cuya cuerda pase por el punto ω_2, será el eje que deseamos, la explicación de semejante propiedad salta á la vista en la propia figura

157. Observemos también para la debida exactitud en el trazado de la curva, que ella ha de ser tangente en I é I_1 al círculo de sombra del collarino, así como también en d y d_1 al círculo de base del hiperboloide, lo cual queda palmariamente probado, recordando que como á superficie de revolución, la sombra arrojada, es línea envolvente de las sombras arrojadas de los distintos paralelos de la superficie.

Resta solamente entrar en algunas breves consideraciones, sobre la distinta índole de la línea de sombra; aquí en éste nuestro caso la línea ha sido una hipérbola, porque gracias á la existencia del cono asintótico, hemos venido ha inferir que en él existían dos generatrices de sombra paralelas respectivamente á dos generatrices de la superficie hiperbólica, todo en razón de que al querer determinar la sombra del cono, hemos trazado por su vértice un rayo luminoso, el cual cortando al plano de la base cónica en un punto exterior á la circunferencia que la representa, hemos podido con ello conducir por el punto de traza dos tangentes á dicha circunferencia, claro está pues que siempre resultará igual propiedad, mientras que el rayo luminoso forme un ángulo α con el plano de la base, que sea menor que el ángulo β que formen con el mismo plano las generatrices de dicho cono, así pues este caso lo expresaremos por $\alpha < \beta$.

158. Mas puede darse el caso de que $\alpha > \beta$; entonces el rayo luminoso, conducido por el vértice del cono, cae en el interior del mismo, no pudiéndose ya dirigir ninguna tangente á la base desde el punto de traza del rayo luminoso, el cono está pues todo en luz, en él no existe ya ninguna generatriz que sea paralela al plano de sombra, ó dicho de otro modo, el plano de la línea de sombra no resultará paralelo á ninguna generatriz del hiperboloide, así es que las cortará á todas dando con ello lugar á una curva cerrada, será pues una elipse; es el que muestra la figura 150″ en que el hiperboloide

está iluminado por luz solar, la elipse de sombra queda encerrada en CD-C′E′D′E en lo interno de la superficie, dado que ésta la consideremos hueca, pues de ser maciza no existiría ya tal elipse, concretando tan sólo la sombra á la arrojada que consta de dos partes, la primera, á la sobrepuesta que proyecta el círculo superior AB sobre la misma superficie según la elipse GF″-FHF′, y luego la que arroja lo restante del mismo círculo sobre el plano horizontal; en el otro círculo de centro O″ y de radio $O''B''' = O_1B$.

159. Finalmente, si media la casualidad de que $\alpha = \beta$, en este caso (fig. 150) la paralela al rayo luminoso que pasa por el vértice del cono asintótico, coincide con una generatriz de éste por donde pasaría el único plano tangente, en donde existiría solamente una generatriz de cada sistema del hiperboloide que serían respectivamente paralelas á la generatriz de contacto encontrada en el cono asintótico, en semejante situación la línea de sombra sobre la superficie hiperbólica, quedaría reducida á tan solo dos rectas *cd-c′d′*, *cd-c″d″* cuales serían las dos mentadas generatrices, y luego como á sombra arrojada, el círculo de centro O″ y de radio $O''B''' = O_1B$, y es que en este caso, la generatriz *cd-c′d′* así como la otra compañera que son divisorias de sombra, llevan la misma dirección del rayo luminoso, así es que su sombra arrojada queda reducida á los mismos puntos *d′*, *d″*, á partir de los cuales empieza la arrojada por el círculo paralelo superior.

Obsérvese bien en este caso, que el ángulo del plano diametral de la línea de sombra con el diámetro paralelo, al rayo de luz y con el cual ha de ser conjugado, aquí en este caso es nulo, pues el plano de la línea de sombra es asintótico; aparte de que también sabemos que cuando en un par de diámetros conjugados, el punto de tangencia de las tangentes á la curva en los puntos extremos de uno de los diámetros y paralelas al otro pareado; se traslada al infinito, dichos diámetros se confunden en una sola recta, y por lo tanto el ángulo se reduce á cero.

160. Sombra del hiperboloide dado por tres rectas cualesquiera.—Sabido es que la única condición que se impone cumplan estas tres directrices, es, el de que no estén situadas en un mismo plano. Sea para esto la fig. 151, siendo las rectas directrices las A^v-A^h, A'^v-A'^h, A''^v-A''^h, en las

cuales resbala la generatriz para formar la superficie, consideremos ahora una posición de la generatriz la B^v - B^h, por ejemplo, y propongámonos encontrar el punto de sombra que en ella está situado, siendo el rayo luminoso el que tiene la dirección R^v - R^h. Para ello, hagamos pasar un plano por la recta B^v - B^h, que sea paralelo al rayo luminoso, este plano es el V^p - H^p, el cual está determinado, escogiendo el punto a^v - a^h en la recta B, haciendo pasar un rayo luminoso por dicho punto y el sistema de estas dos rectas B y R á las cuales se determinará, las trazas. nos facilitarán así las trazas de dicho plano P. Este plano ya es un plano tangente á la superficie (núm 150), y como es paralelo á R, claro está, que el punto de tangencia con el hiperboloide, será él, uno de tantos puntos de la línea divisoria de luz y sombra. Ahora bien; siendo el hiperboloide superficie de doble generación rectilínea, claro es (núm. 151) que por el punto de contacto pasarán dos generatrices de distinto sistema; una de ellas ya es la dada B; falta pues determinar la otra, la cual una vez encontrada, cortará en B en un punto, y éste será el que buscamos; mas esta recta que llamaremos A‴ está situada en el plano tangente P, y es tal, que la produce la intersección del plano P con todas las generatrices de la superficie, y por lo tanto, para obtenerla, bastará tan sólo buscar la intersección de dicho plano con dos generatrices del segundo sistema ó sea del B. Con este fin, hagamos resbalar la recta B por A, A′ y A″ hasta considerarla en las dos posiciones B′ y B″ *.

Encuéntrense ahora las intersecciones de B′ y B″ con el plano P. Así para el punto g^v - g^h de intersección de B″ con P, concíbase el plano proyectante que proyecta á la recta B″ horizontalmente. este plano corta al P según la recta lm B''^h, y por lo tanto la intersección de lm con la B″ nos dará en definitiva el g^v - g^h que buscamos.

Con análogas operaciones encontraríamos el punto d^v - d^h intersección de P con la recta B′, empleando aquí como á plano auxiliar el que proyecta verticalmente á dicha recta.

* Si la generatriz se detiene por ejemplo en el punto α^v - α^h sobre A y queremos saber la posición B′ que tomará, bastará trazar dos planos; el uno por α y por la directriz A′, y el otro por el mismo punto α y la directriz A″, estos dos planos se cortarán según la recta B′, pues forzosamente ésta entonces pasará por α, apoyándose en A′ y A″. Procedimiento recordado de lo visto en la Geometría Descriptiva.

Finalmente unamos ahora d con g, y la recta que así resulte nos cortará á la B^v - B^h en el punto x^v - x^h; será el punto de sombra que queríamos. Con ello, pues, no hay más que escoger otra y otras generatrices análogas á la B y repetir en ellas todas las operaciones que hemos hecho con la citada B.

161. Sombra del paraboloide hiperbólico.—Ya por su párrafo sabemos que la línea de sombra de un paraboloide, que para abreviar llamaremos por Π es siempre plana, y ahora añadiremos que es una hipérbola para cuando se trate de un foco luminoso ó luz artificial, y una parábola para cuando los rayos luminosos sean todos paralelos, ó sea luz solar.

En efecto, consideremos un plano secante á Π, pero conducido en la misma dirección del eje de esta superficie (figura 155, lám, 26), este plano nos dará por sección una parábola, la ACB por ejemplo. En este plano; fijemos ahora un punto exterior S, así como las tangentes SA, SB conducidas á la curva desde el dicho punto S; uniendo en seguida los puntos de contacto A, B lo que nos dará la cuerda AB, la cual es bien sabido que será paralela á la tangente EF en el punto C en virtud de lo conjugadas que son las rectas AB, SG, siendo SG un diámetro de la curva pasando por el propio punto S. Mediante estas condiciones sabemos también que resulta que AD = BD y también SC = CD.

Supongamos ahora que dicho plano secante lo hacemos girar en torno del diámetro SG, entonces él nos irá cortando á Π, según nuevas parábolas, cuyos parámetros serán distintos, mientras que las polares del punto S pasarán todas por el punto D, y como quiera que ellas deben ser paralelas al plano tangente trazado por C, resulta evidente que estarán todas ellas en un mismo plano, cuyo será el polar del punto S.

La intersección de Π con este plano polar, será, pues, el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes á Π, partiendo del punto exterior S; y así será la curva de contacto de Π con el cono circunscrito á ella y cuyo vértice es el punto S; siendo esta curva una hipérbola, toda vez que su plano es paralelo á las dos generatrices de Π, que se cortan en el punto C, y así podremos concluir el siguiente teorema.

162. La curva de contacto (línea divisoria de luz y sombra) de un cono circunscrito á un paraboloide hiperbólico, es una hipérbola situada en un plano paralelo al plano tangente, en el punto en donde es cortada dicha superficie, por el diámetro que parte del vértice del cono (foco luminoso). Además, los segmentos que intercepta este diámetro, entre el vértice, la superficie y el plano de la curva de sombra son iguales.

Si ahora en la fig. 155 suponemos que el foco ó polo S va alejándose sin cesar de Π, en la dirección de SB, el otro punto de tangencia A se alejará también, siempre situado sobre la parábola, de modo que al llegar S á una distancia infinita, esto es, al límite, la cuerda AB habrá tomado una posición paralela al diámetro SG, cual resultado lo corrobora por otra parte, recordando que cuando una secante de un paraboloide, se traslada siempre paralela á sí misma, hasta convertirse en tangente á la superficie, los dos puntos extremos de la primitiva cuerda, se habrán reunido en uno sólo, que será el de tangencia, cual será el mismo transportado de la mitad de la referida cuerda, cuyo sitúa en un plano diametral conjugado por su dirección; de ahí podemos ya sentar el segundo teorema.

163. La curva de contacto (divisoria de luz y sombra) de un paraboloide hiperbólico, con un cilindro circunscrito (cilindro de los rayos luminosos), se halla situada en un plano diametral, conjugado con la dirección de las generatrices del cilindro, habiendo de ser con ello forzosamente una parábola, pues que en el paraboloide todos los planos diametrales son paralelos al eje.

164. Recordados, pues, estos dos importantes teoremas, puédese ya pasar á determinar la sombra de un paraboloide hiperbólico, suponiendo sea rectangular, de planos directores, los dos de proyección, y que venga engendrado (lám. 26, figura 156) por la generatriz G, que conservándose siempre horizontal, resbala por las dos directrices paralelas al plano vertical, la una A^v - A^h perpendicular al plano horizontal, y la otra B^v - B^h contenida en el mismo plano vertical. La luz es la solar, siendo su dirección la R^v - R^h. Construyamos ahora la parábola de división de luz y sombra, y para ello conduzcamos por cada una de las generatrices $G, G_1 G_2 G_3$, etc., planos paralelos al rayo luminoso, y ellos serán ya planos

tangentes á la superficie que llamaremos Π, cuyos puntos de contacto precisados serán ya de la curva de sombra (n.° 150).

Así por ejemplo, escojamos la generatriz G^v_3 G^h_3 por un punto de ella tal como el a''', en donde corta ó se apoya en A^v - A^h, conduzcamos una paralela $a'''\beta$ al rayo luminoso, su traza horizontal será el punto a_3, por el cual se dirigirá la recta $a_3\gamma$, paralelas á la generatriz escogida G_3, dicha $a_3\gamma$ será la traza horizontal del plano tangente.

Precisemos ahora el punto de contacto. A este efecto, tomemos en consideración la generatriz G_7 para cuando después del resbale, venga situada en nuestro plano horizontal, con ello tendremos dos posiciones de la generatriz del sistema G, cuales son G_3 y G_7. Esta generatriz G_7, viene cortada por la traza horizontal del plano tangente $a_3\gamma$ en el punto f; de modo que trazando por f una recta paralela á la línea de tierra, esta recta que así resultará paralela al plano director de la segunda generación G será una generatriz del sistema G, pues ya sabemos que dicho plano tangente $a_3\gamma$, ha de cortar precisamente á Π, según otra generatriz, cuya dirección con respecto al plano director conocemos. Ahora esta recta ff' corta en el punto $f'f_1$ á la generatriz G^v_3 escogida en el primer sistema, y por lo tanto f'-f_1 es el punto de contacto ó perteneciendo á la parábola de sombra.

Cabe ahora, en virtud de la situación especial de los datos, conducir en general las operaciones para que ellas sean lo más breves y expeditas posibles. Para ello, divídase la directriz vertical A^v - A^h en partes iguales, á partir de su traza horizontal; de este modo se obtendrán la serie de puntos a^{VI}, a^{V}, a^{IV}... etc., igualmente separados; desde cada uno de ellos, condúzcanse rectas paralelas á la dirección del rayo luminoso, cuales rectas tendrán sus trazas horizontales, en a_6, a_5, a_4... etc., todos situados en la recta R^h que representa al rayo luminoso en proyección horizontal, y pasando por el punto A^h; estos puntos de traza estarán también igualmente separados, dándonos entre sí distancias iguales.

Dibújense las generatrices G^v, G^v_1, G^v_2, G^v_3... etc., que pasan respectivamente por los puntos antes expresados a, a', a'', a'''... etc., y condúzcaselas paralelas desde cada uno de los puntos de traza α'', α''', a_1, a_2, etc., es evidente que las rectas así obtenidas $\alpha''b$, $\alpha'''c$, a_1d, a_2e... etc., serán las trazas horizontales de la serie de planos tangentes á Π, y paralelos á la dirección de la luz. Finalmente, sólo resta conducir por los pun-

tos b, c, d, e, f,... etc., en donde aquellas rectas de traza cortan á la traza horizontal $G^h{}_7$ de II, rectas paralelas á la línea de tierra, y ellas á su vez cortarán en los puntos c', d', e', f'... etc., cuales referidos por medio de proyectantes en c_1, d_1, e_1, f_1,... etc., darán dos agrupaciones de puntos, que unidos formarán la curva parabólica en proyección y que concierne á la línea de sombra.

165. En cuanto á la sombra arrojada sobre el plano horizontal de proyección, ó todo otro plano cualquiera, será también una parábola en méritos del principio visto en Geometría analítica.

Todo cilindro que tiene por directriz una parábola viene cortado por un plano, cualquiera que sea la dirección de éste, según una parábola.

166. Obsérvese para ello que los distintos planos tangentes γ, γ', γ''... etc., son las respectivas superficies envueltas de la evolvente, que aquí es el cilindro $\triangle$ de los rayos luminosos tangentes á II, y por lo tanto las trazas horizontales γ-γ', $\gamma''\gamma'''$... etc., de estos distintos planos serán las envueltas de la parábola, traza horizontal del cilindro $\triangle$. Con ello se infiere que esta sombra arrojada es de fácil determinación, pues tiene por sucesivas tangentes las trazas γ, γ' γ''... etc., de dichos planos; así que si se quiere precisar los puntos de tangencia, por ejemplo, el que corresponde á la sombra arrojada del punto c_1-c' de la línea divisoria de luz y sombra, no habrá más que conducir por c' un rayo luminoso $c'\theta$, éste será una generatriz de contacto del cilindro luminoso con su respectivo plano tangente, cual rayo cortando en θ á la traza horizontal γ''' de este plano tangente, dará con evidencia el punto precisado de dicha sombra arrojada; y así de los demás, viniendo en definitiva con la unión de todos ellos á darnos la parábola XθY... etc., de la sombra arrojada.

Si el rayo luminoso fuese paralelo al plano director que es aquí el vertical de proyección, é hiciera con el otro plano director (que es aquí el plano horizontal) un cierto ángulo ω, sucedería que sobre la superficie II existiría una generatriz del segundo sistema paralela al plano director vertical que sería paralela al rayo luminoso, pues sabido es que estas generatrices del segundo sistema, forman cada una ángulos diversos con dicho plano horizontal, pues estos ángulos variarían entre los límites 0° y 90°. Entonces la generatriz que resultará paralela al rayo luminoso, será la línea de separación de luz y sombra sobre II. En efecto, nos podemos convencer fácilmente de semejante resultado, si efectuáramos las construcciones anteriores para semejante caso rarísimo y particular. Sea la fig. 157 los mismos datos que el caso anterior, pero siendo R^h - R^v paralelo al plano director vertical, formando dicho rayo luminoso un ángulo ω con el horizontal, y además ser paralelo á una cierta generatriz g del segundo sistema de generación de la superficie II. Esta generatriz se apoya en α'-α'' sobre la directriz $G^h{}_3$ y en α-m sobre la segunda directriz A^h m-α, confundiéndose, pues, con el rayo luminoso que parte del punto α-m, esto es, la recta $\alpha\alpha'$-$m\alpha''$. Esto lleva consigo que las rectas $m\alpha''$ y A^h α''' formen con las mA^h, $\alpha''\alpha'''$, un verdadero rectángulo, y éste tal, que resultando la $A^h\alpha'''$ dividida en partes iguales $A^h a_2$, a_2a_1, a_1a_1, $a\alpha'''$, á consecuencia de las paralelas al rayo luminoso conducidas por a''', a'', a', α; la $m\alpha''$ también quedará dividida en el mismo número de partes, é iguales á cada una de aquéllas, pues al trazar las generatrices del primer sistema G^v, $G^v{}_1$, $G^v{}_2$.. etc., hemos producido sobre B^v las partes iguales á αp, pq, qr, cuales han sido también iguales en su proyección horizontal $A_1\alpha'$, $p'q'$, $q'r'$, de modo ahora que al trazar las proyecciones horizontales de las generatrices en G^h, $G^h{}_1$ $G^h{}_2$... etc., éstas han cortado á la $m\alpha''$ paralela á la A_1T en cuatro partes iguales mc', $c'd'$, dc', $c'\alpha''$, todo en virtud de la serie de triángulos semejantes que se forman; resulta, pues, que $mc' = A^h a_2$, $c'd' = a_2a_1$, $d'c' = a_1a$... etc.

De aquí inferimos que si por ejemplo por a trazamos una paralela γ' á la G^h para obtener la traza horizontal del plano tangente que pasa por la generatriz G^v - G^h, aquella recta será tal que pasará por el punto α'', pues en virtud de lo antes establecido tendremos $c'\alpha'' = A^h a$ habiendo formado con ello el paralelógramo $A^h a\alpha''c'$; y lo mismo veríamos para con relación á las trazas horizontales γ, γ'', γ''' de los demás planos tangentes pasando por las demás generatrices, y todas pasarían por el punto α'', traza horizontal de la generatriz paralela al rayo luminoso; de esta propiedad se infiere que todos los puntos de la fig. 156, tales como b, c, d, e... etc., así como XθZ se convierten en la fig. 157 en el simple punto α'', así como también todas las rectas que de ellos partían paralelas al plano director vertical, se reducirían á la $\alpha''m$-$\alpha'\alpha$, y

por lo tanto los puntos de tangencia serán aquí *c'*, *d'*, *e'*... etc., todos situados en la generatriz del segundo sistema *g'*, lo cual vendrá según ello á confundirse con la línea divisoria de luz y sombra.

Podemos pues sentar, que en un paraboloide hiperbólico ya sea rectangular ú oblicuo, su línea divisoria de luz y sombra, é iluminado por rayos luminosos paralelos, será siempre una parábola, excluyendo solamente el caso en que el rayo luminoso sea paralelo á uno de los dos planos directores de la superficie, pues entonces la línea divisoria será una recta generatriz de la superficie, generatriz que habrá de encontrarse entre las del sistema, que tienen como á plano director el que es paralelo al rayo luminoso.

167. Otro ejemplo de sombra del paraboloide hiperbólico.—Lo es la (Fig. 154, lám. 26) AB-A'B' y CB-C'D son ahora las directrices del primer sistema en el paraboloide II, y su plano director es el expresado por sus trazas en C'B'B, esto es perpendicular al plano vertical de proyección. Al objeto de tener más regularidad en las construcciones, dividamos la directriz A'B', en un número de partes iguales en los puntos de división $1^v, 2^v, 3^v$,... etc., y por ellos tracemos planos paralelos al director C'B'B, ellos al cortar á la otra directriz C'D, nos darán los puntos 1',2',3'... etc., nos proporcionarán las generatrices de este primer sistema en $1^v 1'$-$1^h 1''$, $2^v 2'$-$2^h 2''$, $3^v 3'$-$3^h 3''$... etc. Atendiendo ahora á la especial elección que hemos hecho de las dos primeras directrices A'B', C'D, y del plano director C'B'B, se descubre en seguida que las rectas A'D-AB y B'C'-BC, podrán considerarse como á directrices del segundo sistema, así como al plano A'B'B como á director del mismo sistema, con estos nuevos datos se comprende ahora como será dable obtener las generatrices de este segundo sistema. El total de la superficie la limitamos entre los planos de proyección y el plano horizontal EF, pasando por el punto B D; con esto, las trazas de II sobre los planos horizontales EF, LT, son dos parábolas iguales, confundidas en una sola en la planta; el contorno aparente sobre el plano horizontal, es también la parábola AOC, igual á las anteriores, y envolvente de las generatrices en dicha proyección, y finalmente el contorno aparente sobre el plano vertical, lo forma las dos ramas de hipérboles EA'E', FC'F', intersecciones de dichas generatrices con dicho plano vertical. Como quiera que el eje de un paraboloide hiperbólico, lo suministra la intersección de ambos planos directores, puesto que aquel ha de ser paralelo á esta intersección de aquí se deducirá que dicho eje en este caso particular, vendrá expresado por la recta O'-B'B, perpendicular al plano vertical de proyección, mientras que el punto O'-O, en donde corte á la superficie, será el vértice, por el cual pasan dos generatrices de sistemas distinto GO', HO' que le son perpendiculares y aparecen asíntotas de la hipérbola de la proyección vertical; ellas forman un plano tangente en el punto O, á la vez que secante en el resto de la superficie, la cual viene cortada por las dos mencionadas rectas.

Suponiendo ahora á esta superficie iluminada por el rayo R^v-R^h, pasemos á determinar la sombra, proponiéndonos encontrar un punto de sombra sobra una generatriz determinada, como por ejemplo $2^v 2'$; y luego hagamos pasar por ella un plano paralelo á la dirección de la luz. Escojamos un punto a^v-a^n, en ella hágase pasar un rayo de sombra, y el plano que pase por este rayo, y la generatriz $2^v 2'$ será el plano tangente que necesitamos y cuyas trazas son V^p-H^p; averiguemos ahora el punto de tangencia. Para eso búsquese la intersección del indicado plano P, con una generatriz, del propio sistema de la $2^v 2'$, como por ejemplo la A'D-AB, hágase pasar para ello un plano por esta última recta, que para mayor facilidad, será el proyectante vertical de la misma, esto es DL-LI como correspondientes trazas; la intersección de este plano con el P, es la recta IJ, la cual corta en KK' á dicha generatriz, trácese finalmente por K' un plano paralelo al director A'B'B hasta que corte en b^v-b^h, á la generatriz escogida 2^v-$2'$, y será según sabemos el punto de sombra, repítase ahora esta operación tantas veces se quiera, escogiendo siempre nuevas generatrices.

Mas por otra parte es evidente, que si encontramos las sombras arrojadas de todas las generatrices del paraboloide, ellas de por sí irán cortándose formando una curva parabólica (n.° 24) αβγδN' envolvente de las posiciones que adquieran las sombras que arrojan sobre el suscitado plano horizontal, las generatrices en cuestión, y todas ellas tal como las 5'''β,4'''γ... etc., serán tangentes á dicha curva. Pero atendiendo á la particular estructura de esta superficie, ella permite alguna simplificación, si es que se quieran que figuren las

sombras arrojadas de dichas generatrices. Al efecto, búsquese la sombra arrojada de las dos directrices del primer sistema A B'-AB DC'-CB, así como en ellas la sombra de cada una de las divisiones que en ellas constan, (como por ejemplo la de BC que cae en D_1C'', con sus divisiones) únanse luego los puntos correspondientes de una y otra, en el mismo orden que lo estará en el espacio, las rectas que así resulten, serán las expresadas sombras, vemos pues que con orden y pequeño relativo trabajo, prontamente, pueden adquirirse las mencionadas sombras rectilíneas, por los cuales deducimos la curvilínea que arroja el cuerpo, y ahora ella, valiéndonos del sistema (n.° 24) de contraproyección oblicua servirá para darnos la sombra propia sobre la superficie II, pues cada punto β en que se verifique la tangencia entre la sombra arrojada de la generatriz, y su curva envolvente pasará un rayo de sombra que cortará apoyándose en la superficie II en el punto β' á la generatriz $5^h 5''$ originaria, que por cuyo método, combinado con el primero podremos rectificar cómodamente la línea de dicha sombra

Se han escogido aquí los datos de tal modo, que la curva de sombra, se proyecta en el plano vertical según una recta MN, cuya es la traza vertical de su plano, y en efecto, como aquí la superficie pertenece también la familia de las superficies de 2.° grado, puede aplicársele el teorema de las mismas por el cual (n.° 116) sabemos que el plano de la curva de sombra, es diametral conjugado con la dirección del rayo luminoso. A este efecto, tracemos de momento una tangente á la parábola del collarino, que sea paralela al rayo luminoso R^h; dará así el punto de tangencia v-v', este pertenece ya á la curva, y por él pasará el diámetro de la curva, (por estar contenida ésta en un plano diametral según el teorema) y como por tratarse de la parábola, este diámetro de ha ser paralelo al eje, resulta que aquel será perpendicular al plano vertical y por lo tanto igualmente también lo será el plano que la contiene. En su virtud tracemos ahora por O', el diámetro PQ paralelo á R^v; de la hiperbola del contorno aparente, y luego su conjugado O'S (valiéndonos de las asíntotas); bastará por último, conducir por v' la paralela MN á la O'S, y así aquella nos dará la traza vertical del plano de la curva de sombra, el cual ya obtenido podremos trasladar cada uno de los puntos á la proyección horizontal; para obtener la proyección sobre este plano; de la curva cual será la parábola $M'_v b^h N'$.

Mas después de la parábola $N'\delta\gamma\beta\alpha$, sombra arrojada de la otra parábola divisoria de la sombra propia, aparece otra enlazada con esta última cual la $D_1 5_1 4_1 3_1 y$, que es la que arroja sobre el plano horizontal, parte de la parábola superior E'BF' EF, con que termina el paraboloide, y por lo tanto, será exactamente igual á su originaria, por lo cual, obtenido que sea el punto D_1, arrojada del B D, y reproducir aquella curva en el trecho, que interesa al citado eje. Mas como esta sombra arrojada llega á cortar la línea de tierra en el punto y, que obedece al punto originario τ', esto denota, que el trecho restante de la parábola $\tau F'$, cae arrojado en el plano vertical según otra parábola Fxy, cuya se determinaría, mediante las trazas verticales de los rayos de sombra que pasen por los puntos que median en dicho trecho $\tau' F'$.

Por último el trecho de sombra arrojada $\mu\psi'\varphi'\alpha$, cae sumergido en la masa general de la arrojada por todo el cuerpo parabólico II. denotando al quedar parásita dicha curva en el plano horizontal, que caerá sobrepuesta en la superficie interior de II; esta sombra sobrepuesta $M'\varphi\psi C$, proviene de la intersección del paraboloide con el cilindro de los rayos luminosos, cilindro parabólico cuya base ó directriz es el trecho de parábola superior E'G'M'. Puntos cualesquiera de esta curva arrojada, como por ejemplo los φ y ψ, se encontrarán valiéndonos de los φ' y ψ', producidos por las intersecciones respectivas de las sombras parásita $\mu\psi'\varphi'\alpha$ de la parábola superior, con las sombras también parásitas $\delta 2'''$, $\gamma 4'''$ de las generatrices de II, cuales son las que pasan por $2''$ y $4''$.

Haciendo partir ahora rayos de sombra por φ' y ψ', estos rayos cortarán en φ y ψ, las generatrices originarias correspondientes.

168. Puede ocurrir aquí tres casos dependientes de la inclinación del rayo luminoso, así si llamamos ω, el ángulo que forma el rayo luminoso R^v, con la línea de tierra y ω', el que forme uno de los planos directores, con el plano horizontal en este concepto los tres casos serán.

1.° Cuando $\omega < \omega'$, que es el que acabamos de resolver, y en la cual la curva de sombra propia $M'\beta' b^h vN'$, está situada hacia la parte exterior de la propia superficie esto es hacia la de acá ó á la derecha del plano tangente en v'-v.

2.° Cuando $\omega > \omega'$, entonces (Fig. 158) la curva $abc\ ij$ parabólica vuelve su concavidad hacia lo interno de la super-

ficie, sobre la cual yace, encontrándose según ello hacia la izquierda ó parte de allá del plano tangente en *v*. En este caso, si se considera el interior de II como macizo, la sombra parabólica *abc-ij*, será en absoluto parásita y virtual; y parte de la línea parabólica, superior *im'-i'm*, caerá arrojada en *dc-d'pk* en la parte extrema de II, así como en el caso anterior caía en la parte interna.

3.° Cuando $\omega=\omega'$, entonces la línea divisoria es una recta generatriz.

169. Sombra del conoide. (Lám. 27, Fig. 156).—Está dado el conoide de que se trata, por una circunferencia ABCD, situada en el plano horizontal de proyección y por una recta perpendicular al plano vertical DC-C', y á la altura O'C', ambas líneas directrices de la superficie, en las cuales resbala constantemente la recta generatriz, permaneciendo en el movimiento paralela al plano vertical, cuyo, se considera como director. *

Según semejante generación, se infiere que las generatrices extremas de los puntos C y D serán verticales; que en el plano vertical, concurrirán todas en el punto C', proyección de CD; y que en el plano horizontal vendrán todas expresadas por rectas paralelas á la línea de tierra y comprendidas entre CE y una de las dos semicircunferencias CBD ó CAD, según se consideren á la derecha ó izquierda de la citada directriz CD; así las OB, *bf'*, *af*,... etc., son representación en proyección horizontal de varias generatrices de nuestro conoide.

Sea ahora el rayo luminoso R^v-R^h, y tratemos de encontrar la sombra á que se presta semejante superficie, proponiéndonos ir averiguando los puntos de las líneas de sombra, que estén situados sucesivamente sobre generatrices determinadas, como por ejemplo la EF-F'C'.

Ya sabemos (n.° 150) el procedimiento general en que consiste; esto es, en hacer pasar por la generatriz escogida un plano paralelo al rayo luminoso; este plano quedará determinado, trazando por un punto E de la generatriz un rayo luminoso,

* Esta singular superficie expresada convencionalmente en la fig. 161, afecta la forma como de una tienda de campaña, siendo muy parecida, sino idéntica á la que en sus memorias militares, describe sucintamente el general Froissard, quien parece la ampleó constantemente en la campaña de 1870, en la guerra franco-prusiana.

buscando su traza horizontal *t*, y uniendo este punto con F, traza horizontal de la generatriz escogida, la recta que así resulte en F*t*, será la traza horizontal del plano tangente, siendo su traza vertical la JM', determinada con el auxilio de la horizontal del plano que pasa por el punto EC', como es la EM. Sabemos ahora que si buscamos la intersección de este plano con las generatrices del conoide, obtendremos una curva, la cual vendrá un momento que cortará á la generatriz escogida, siendo este punto el de la sombra que se buscaba. Mas ya se comprende á simple vista que si bien este procedimiento es como á cuestión práctica sencillísima, es sin embargo por otra parte, de una ejecución larga y engorrosa, dando lugar también á encuentros de líneas, en puntos que van á parar fuera del dibujo, y cuando no, las rectas en general se cortan en ángulos muy agudos, dificultando así, más y más el precisar dichos puntos, en detrimento de la exactitud del problema; hé aquí, pues, se recurra para este caso á las dos superficies alabeadas de segundo grado, cuales son según ya hemos anunciado en otro lugar. el hiperboloide de una hoja, y el paraboloide hiperbólico, cuales son susceptibles (n.° 152 y 153) de ser acordados cada uno de ellos á lo largo de una generatriz de otra superficie alabeada, y así teniendo en el acuerdo las dos superficies, los mismos planos tangentes, á lo largo de la generatriz común. ¡Claro es que el plano tangente que determinara la sombra de un punto *x* de la línea divisoria, en una de ellas será el mismo, así como el propio punto *x* para la otra! y como quiera hemos visto que la determinación de planos tangentes á las dos superficies de segundo grado mentadas, es expedita en virtud de la doble generación de que gozan, de aquí que haya ventaja hacer depender el plano tangente de la superficie alabeada dada para la determinación de su sombra, del plano tangente de otra superficie alabeada de segundo grado; que en general se escoge por poco que se pueda un paraboloide hiperbólico por reducir aún, si más cabe, las construcciones á su extrema expresión. Propongámonos, según esto, sustituir interinamente á la superficie en conoide, por un paraboloide que lo sea de acuerdo á lo largo de la generatriz escogida en EF-C'F'. A este efecto, tracemos la FN tangente en F á la circunferencia directriz, haciendo luego mover la generatriz EF-C'F', de modo que resbale por dicha tangente, y por la primitiva directriz rectilínea del conoide; la DC-C'; y al mismo tiempo,

conservándose en todas las posiciones paralelas al plano de proyección vertical; con esto habremos engendrado un paraboloide hiperbólico que será de acuerdo con nuestro conoide, á lo largo de la generatriz común EF-C'F'. En efecto, lo será, (núm. 153) pues tienen dos planos tangentes comunes, y el mismo plano director, que es el de proyección vertical.

En el punto E-C' es de por sí evidente que tengan el mismo plano tangente, pues la directriz y generatriz que por el pasan no han variado, son las mismas para las dos superficies; y en cuanto al punto F es también obvio que tanto el plano tangente al conoide, como el que corresponde al paraboloide, vienen ambos determinados por la generatriz EF y por la tangente FN á la curva circular directriz.

En semejante situación, el plano FJM' que pasa por dicha generatriz EF, que puede considerarse como del primer sistema del paraboloide, cortará á éste según otra recta (n.° 151) que será la generatriz del segundo sistema. Estas dos rectas ahora se cortarán, y el punto de intersección será el de tangencia de la superficie con el plano FJM', ó dicho de otro modo; será el punto de la línea divisoria de luz y sombra. Es cuestión con esto de encontrar esta generatriz del segundo sistema; para lo cual bastará encontrar tan sólo (ya que la sección, sabemos que ha de resultar rectilínea) la intersección del plano mentado, con dos generatrices de igual sistema que el de la escogida en EF

Para eso consideremos, al moverse la generatriz que nos fijamos en la posición que requiere al pasar por el punto N, es evidente que en ella vendrá á situarse en el plano vertical, y sus proyecciones serán O'E-NC'; pero, como en este mismo plano vertical existe también la traza vertical JM' del plano tangente; de aquí se sugiere que el punto P donde tiene lugar el corte de C'N y M'J, será el de intersección de la generatriz O'N-C'N, con el plano en cuestión. Escogiendo ahora otra posición de la generatriz y repitiendo operación análoga, obtendremos un segundo punto, que unido con el primero P-P', facilitará la generatriz perteneciente al segundo sistema. Más aún, en este caso especial, podemos facilitar más la operación, ahorrándonos de repetir semejantes construcciones, escogiendo nueva generatriz. En efecto, si prestamos buena atención en nuestro paraboloide, observaremos en seguida que puesto que sus dos directrices son las dos horizontales FN, DO', claro está que habremos de convenir, que el plano director del segundo sistema de generación será un plano horizontal: el de proyección homónima por ejemplo; con esta sencilla propiedad ya podremos inferir que el plano *secante tangente* FJM' ha de cortar forzosamente al conoide según una generatriz del segundo sistema, y ella será horizontal, ésta vendrá proyectada verticalmente según una paralela á la línea de tierra, y como al mismo tiempo, esta recta está contenida en dicho plano, deducimos también que será una horizontal del plano, por lo que se proyectará horizontalmente, según una paralela á la traza horizontal JF.

En su virtud, ya en posesión del primer punto P-P', trácese por él la horizontal PP'''-P'P'', hasta que corte en P'''-P'', á la generatriz escogida, y este punto será el de la sombra buscado.

No nos cansaremos de repetir que en los problemas de aplicación de la Geometría Descriptiva, conviene prestar una gran atención, apreciando todas las propiedades de las superficies con que se opera, y de ellas inferir recursos que tiendan á facilitar siempre las operaciones y máxime si los datos de que se parte, ya son por su índole y naturaleza ingénita complicados.

Aquí en nuestro caso por ejemplo, y teniendo en cuenta que la generatriz encontrada del segundo sistema PP'''-P'P'', ha de cortar á todas las generatrices del primer sistema, podemos deducir que cortará igualmente á la que ocupa la posición particular, cual es la vertical del punto S, punto producido por la intersección de la tangente directriz FN con la proyección horizontal de la directriz rectilínea DC prolongada; pues ambas á dos sirviendo de directrices al paraboloide, será evidente que cuando la generatriz pase por dicho punto S, aquélla será vertical y se proyectará, por lo tanto, horizontalmente, según el punto expresado. Infiérese de aquí que el punto S forma parte ya de la recta P'P'', y que por lo tanto, obtenido que sea el primer punto P' bastará unirlo con S, y la recta que así resulte cortará en P'' á la generatriz EF, y con ello se obtiene el punto de sombra, cual se refiere en seguida en el plano vertical en P'''. Aquí este punto P'' P''' será perteneciente á la segunda hoja de la superficie del conoide, toda vez que la generatriz EF ha sido preciso prolongarla (para que tuviera lugar el corte con la genera-

triz del segundo sistema en el paraboloide) hacia la otra parte de la línea de estricción DC. *

Así poniendo en práctica este procedimiento, que es el más breve que puede darnos este caso, la cuestión quedará

---

* *Líneas de estricción* de una superficie alabeada, es aquella por la cual se cortan las dos hojas de la misma, y al mismo tiempo goza de la circunstancia de expresar en dirección la mínima distancia entre dos generatrices cualesquiera.

Mr. Charles define la línea de estricción, diciendo ser el *lugar geométrico de los puntos centrales de las generatrices.*

Llamando, por otra parte, *punto central* de una generatriz el pie de la común perpendicular de esta recta á la generatriz vecina, y también al límite de las posiciones del pie, de la perpendicular común á la recta considerada, y á otra generatriz, cuando esta última, aproximándose á la primera, venga á confundirse con ella.

También Mr. Charles define el *punto central* de una generatriz, diciendo: *ser el vértice del paraboloide de las normales.* Expliquemos algún tanto esta definición. Y sean (fig. 164) G y G′ dos generatrices de una superficie alabeada cualquiera, de ellas suponemos ser AB su mínima distancia y A*g*′ una recta paralela á la G′.

Ahora, si por todos los puntos de la generatriz G′ se bajan perpendiculares á la otra generatriz G, es evidente que con ellas formaremos un paraboloide hiperbólico, cuyo plano director de esta primera generación sea el plano Q, conducido perpendicularmente á G′; mientras que el plano director de la segunda generación, puede considerarse ser el P, conteniendo las dos rectas A*g* y G.

En este estado, si por los pies a', A, a, a_1, a_2, concebimos los planos paralelos al Q′, cuales contienen las perpendiculares ó normales que antes hemos mentado, las intersecciones de estos planos con el P, nos darán las AN, an, a_1n_1, a_2n_2... etc., todas, evidentemente diámetros del paraboloide, puesto que han de resultar paralelas á la $a'n'$, intersección de los planos directores, y por lo tanto, paralelas al eje del paraboloide.

Ahora bien, todas estas rectas, siendo perpendiculares á la generatriz G, entre ellas además existe una, la que pasa por el punto A, la cual tiene otra propiedad con que no cuentan las demás, y es la de ser perpendicular á la generatriz AB del segundo sistema de generación, pues esta última línea, por su definición es perpendicular al plano P. Así pues el diámetro AN corta normalmente en el punto A al paraboloide (por ser perpendicular en este punto al plano tangente dado por dos generatrices, de sistemas opuestos) y como á consecuencia es el eje de dicho paraboloide hiperbólico.

En este estado, imaginemos que la generatriz G′ toma un movimiento en la misma superficie, de modo que tienda á aproximarse sin cesar hacia la G, claro es entonces que el paraboloide anterior irá modificándose, hasta que vendrá un momento en el límite que se acordará con la propia superficie alabeada, de la cual hemos partido: entonces el vértice A de este paraboloide, será el punto central de la generatriz G.

Las generatrices del sistema Q, son perpendiculares á G, en su virtud, si comunicamos al paraboloide un movimiento de giro de la medida ó ángulo de 90° en torno de dicha generatriz, entonces, de tangentes que eran á la superficie alabeada, se convierten en normales; sin que en este movimiento de rotación se haya movido lo más mínimo el punto A; de lo cual, concluye Mr. Charles, que *el punto* central de una generatriz es el vértice del paraboloide de las normales.

reducida al querer encontrar el punto que pertenezca á la generatriz tal como la VU C′F′, á lo siguiente: 1.° determinación del plano V^q,H^q, pasando por dicha generatriz, y paralelo al rayo luminoso. 2.° á determinar la tangente US′, que parte del punto U, de la circunferencia directriz tomando en consideración el punto S′, cuando corta á la prolongación de CD. 3.° Trazado de la generatriz XC′, perteneciente al segundo sistema del paraboloide acuerdo, encontrando, luego su punto de intersección *Z*-*Z*′, con la traza Q^v, del mentado plano 4.° y finalmente, á unir *Z*′ con S′, y la recta que así resulte, cortará en Y-Y′, á la generatriz escogida en el conoide: este punto Y-Y′, será el definitivo de la sombra. Repítase, ahora, esta última operación para otras generatrices y así llegaremos á obtener la curva de separación *a*Y*m*γ′, así como también la *bc*D, y también la C*ed*.

Estas curvas pasarán por los puntos extremos C-C′, D-C′, de la directriz CD-C′, porque en ellos, la generatriz tanto del conoide como del paraboloide auxiliar, será vertical, teniendo en cuenta que el plano tangente paralelo á los rayos luminosos y que pasa por la generatriz D-C′O′ es vertical, siendo su traza horizontal la recta Dφ', paralela á R^h. La tangente directriz que ahora sustituye á las FN, UX.., etc., es la Dδ paralela á la LT y por lo tanto, la generatriz del segundo sistema que antes eran las C′N, C′X..., etc., se convertirá aquí en la horizontal C′△, por lo tanto, cuando al obtener la intersección de ésta con la vertical, que representa la traza vertical del plano tangente Dφ', obtendremos un punto análogo al que en operaciones anteriores hemos conocido por P-P′ y así al trazar por él la horizontal análoga á la PP‴-P′P″, élla cortará en C′-D á la generatriz escogida D-O′C′, así pues, este punto C′-D tiene la misma representación que el que tenía P″-P‴. Todo en méritos de haberse convertido en un plano el paraboloide hiperbólico.

Los puntos *a* y *b*, en que la curva de separación, corta á la línea de estricción ó directriz CD-C′, son también fáciles de encontrar; ellos se encuentran precisamente en las generatrices, cuyas trazas horizontales *f* y *f*′, son producidas por el encuentro del círculo director con la traza horizontal $g\tau$, del plano paralelo á los rayos luminosos, y pasando por la línea de estricción. En efecto así ha de ser, porque si consideramos las operaciones anteriores, para aplicarlas en este caso, tendremos, que para la generatriz que parte de *f*, el

plano tangente paralelo á la dirección de la luz, es perpendicular al plano vertical, su traza sobre este plano es la recta gC′, y por lo tanto la intersección de ella con la generatriz hC′ del paraboloide de acuerdo, sería el punto C′-aS situado sobre la línea de estricción. Lo propio demostraríamos para con respecto á la generatriz que parte del punto f', y da el punto b.

La propia construcción, nos indica, que la línea divisoria de luz y sombra, resulta, con dos ramas distintas la una en $\gamma C \gamma'$ y la otra en $\theta D \theta'$, cada una con un punto de retroceso en el plano de proyección horizontal la primera en C, y la segunda en D, y ambas son tales en dicha proyección; que en ella, tienen por asíntota el diámetro AB, de la circunferencia de base, cual diámetro es perpendicular á la dirección que lleva la DC. Esta última propiedad se explica fácilmente, si aplicamos el procedimiento de encontrar el punto de sombra, correspondiente á la generatriz OB, es en efecto, el plano paralelo al rayo luminoso, que contiene la generatriz OB-C′B′, resulta el plano C′B′B perpendicular al plano vertical, aquí la generatriz del segundo sistema, del paraboloide de acuerdo, se confunde, ó por mejor decir es la misma traza vertical C′B′, de dicho plano, por lo tanto, la intersección de esta traza, con la citada generatriz, pasa al infinito infiriéndose de ahí que OB, será una tangente al infinito, esto es una asíntota, de la curva de contacto ó de sombra.

Es de advertir que estas dos ramas se han completado aquí, por lo que interesan también á la segunda hoja del conoide, de manera que en este supuesto, de tener en cuenta la proyección vertical de la hoja superior, obtendríamos dos nudos ó lazos en el cúspide C′, tangentes á las generatrices C g y C′ O′; y teniendo por asíntotas, las generatrices del contorno aparente, tal como es de ver en las líneas curvas, que de trazos y puntos se han indicado.

Mas aquí, para el objeto del problema de sombra, sólo tendremos en cuenta la hoja inferior, haciendo no más la salvedad que la rama bcD es línea de contacto, con la parte interna de la superficie, y por lo tanto, no será utilizable bajo el concepto del problema de sombra. Esto se comprende á la simple vista, si atendemos, que al querer encontrar su sombra arrojada, ésta caerá hacia la parte interior de la propia superficie.

Si para comprender mejor la índole de esta particular su-

perficie, intentáramos examinar las transformaciones que sufre la línea de sombra á medida que el rayo luminoso, se elige en otras disposiciones, vendríamos á notar los siguientes casos, considerando como el 1.° el que acabamos de reseñar.

2.° El rayo luminoso contenido en un plano de perfil, es el caso de la (fig. 158). La sombra aparece en dCm pero simétrica, lo propio que la arrojada dC″m, obedeciendo á la dirección de la luz, para lo cual, para operar cómodamente este caso, nos veremos precisados á rebatir el plano de perfil que contiene la directriz rectilínea cuspidal; sobre el plano de proyección horizontal, tomando como á charnela, la traza homónima CD, de dicho plano de perfil, así esta directriz, se rebatirá en C″D′, lo propio que los rayos luminosos que parten de los distintos puntos de CD, como los D′,D″ D,D′, E″E′, etcétera, y así al hacernos cargo de la inclinación de este rayo luminoso, para con respecto al plano horizontal, poder determinar cómodamente, sus respectivas trazas en D″, D′, E′..., etc.

Los nudos ó lazos que afectaban las dos ramas de curva al considerar las dos hojas, reaparecen ahora, continuan empero los puntos de retroceso en el plano horizontal, mientras que en el vertical hay simples inflexiones. En virtud de la simetría la rama θ_1 y la θ'_1 así como la γ' y γ'_1, coincidirían, si dobláramos el dibujo que las contiene, en torno del eje C′O y estas cuatro curvas son tangentes en el punto C′, de dicho eje.

3.° En el 1.° y 2.° caso que acabamos de ver, la traza $g\tau$ (en la fig. 158 esta traza se confunde con la CD), del plano de sombra que pasa por la arista de estricción, corta á la directriz circular, y precisamente esta circunstancia, es la que hace variar la disposición de la sombra de una manera notable; así supongamos en la (fig. 159) que la traza de dicho plano, aparezca tangente al círculo de base, si aplicamos el procedimiento expuesto para encontrar la línea divisoria de luz y sombra, encontraremos que la constituye una sola rama, teniendo por asíntota, la generatriz A′A″. Aquí aparece un doble lazo en C′, proyección vertical, mientras que en la proyección horizontal, la curva aunque verdaderamente una sola, puede dividirse en tres partes, entre las cuales, sale quebrantada por los dos puntos C y D de retroceso. El lazo en proyección horizontal, se cambia en una inflexión,

formando la línea en esta parte intermedia una verdadera S; pasando por el centro de figura *o*, por el cual se reunen las dos ramas de los casos anteriores: estas partes las designamos por γ, γ', γ'', γ''', la primera y la última persisten en tener por asíntota la recta AB proyección horizontal de A'A''.

Pero aquí, en este caso particularísimo, aparece otra línea divisoria de luz y sombra, esta es la recta ó generatriz OB, proyección de B'B''. (Esta línea OB divisoria, queda luego cubierta por la sombra que se arroja á sí misma la propia superficie como muy luego veremos); puesto que el plano luminoso que pasa por la recta de estricción, es tangente al conoide á lo largo de esta generatriz OB, toda vez que ella es notabilísima y en extremo excepcional ya que permite que la superficie conoide pueda desarrollarse, en las inmediaciones infinitamente próximas de la propia generatriz, pues que el paraboloide de acuerdo de los demás casos ordinarios, pasando por la mencionada generatriz, se convierte aquí, en un plano cual es de sombra que determina, esta generatriz OB y la línea de estricción.

4.° *Caso*. Cuando la traza horizontal, del plano de sombra que pasa por la linea de estricción no corta á la circunferencia de la base (fig. 160) entonces resulta, que la curva de separación tiene dos ramas separadas, una γγ' hacia la izquierda de la línea de estricción, partiendo de C, en donde tiene lugar como siempre, el retroceso; la otra, θ, θ', hacia la derecha de la línea de estricción, partiendo de D, con el punto de retroceso correspondiente, ambas extendiéndose, teniendo por asíntotas la AB en proyección horizontal y las A'A'' y B'B'' en la vertical. Los puntos C y D en donde se efectúa el retroceso en el plano horizontal, son tales, que en el plano vertical las ramas γγ', θθ', tangentes entre sí, á la vez que á la vertical ó generatriz intermedia C'O'. Mas circunscribiéndonos tan sólo á la hoja inferior de la superficie, las únicas líneas aprovechables, para con respecto á la sombra propia serán, el trecho *d e* C de la rama γ oculta en el plano vertical, y el otro trecho DF' de la rama θ', la cual aparece vista con su sombra en el plano vertical en C' F.

Aquí en este caso, la sombra arrojada es tal, que la línea de estricción, está arrojada entera en C''D'', sobre el plano horizontal, cerrando la total sombra hacia una parte la curva *d*C'', sombra que arroja la divisoria *de*C, y hacia la otra la curva F'D'', arrojada de la originaria DF'.

La diferencia que existe para la sombra arrojada, entre este caso y el anterior, consiste en que en el tercer caso, si bien es cierto, la línea de estricción viene arrojada también toda entera en el plano horizontal, está arrojada por ser recta tangente á la circunferencia directriz, no permite como en el 4.° caso, ninguna curva de sombra arrojada hacia su derecha, cerrando ella misma la sombra hacia este lado, y continuando hacia la parte opuesta, la sombra curvilinea *d*C-*d'*C'.

5.° *Caso*. Cuando la traza horizontal del plano de sombra que pasa por la línea de estricción se aleja hasta al infinito. Este caso, se comprende que tiene lugar en el momento que el rayo luminoso sea horizontal como sucede en la solución de la fig. 163; el plano de sombra, tiene no más en estas circunstancias su traza vertical que se confunde con la horizontal C'D'. La línea de sombra se compone de dos ramas, la una γγ', la otra θθ', cada una de ellas simétrica pasa con respecto al plano horizontal C'D' que pasa por la línea de estricción; así es, que si se doblara el dibujo á lo largo de la horizontal que pasa por C', la parte γ y γ', coincidirían lo propio que θ y θ'; esta es la razón, porque en el plano horizontal estas dos mitades γ y γ' por una parte y θ y θ' por otra se proyectan en una sola, la primera en la curva *n*C y la segunda en la D*m*, ambas á dos también iguales. En el plano vertical y de considerar las dos hojas, estas cuatro mitades son tangentes con la generatriz vertical C'O', y la parte en sombra sería las θ y θ'. Mas considerando tan sólo la hoja inferior, la sombra en el plano horizontal la limita por una parte el segmento *nce*, y por la otra todo el contorno CB*m*D, es decir, que tomando en cuenta las dos mitades de la planta, cada mitad queda dividida en dos secciones, una pequeña como los segmentos *nc*, D*m* iguales, y otra de mayor extensión como son los C*n*AD, D*m*BC también iguales, resultando el pequeño en sombra en la región izquierda é iluminado en la región derecha, y viceversa para con respecto á los que tienen mayor extensión.

La sombra arrojada sería infinita en el plano horizontal, formada tan sólo de las dos líneas de muy ligera curvatura *mhq*, *nh'p*, cuyas originarias son las antes encontradas en la sombra propia en D*m*, C*n*; mas como quiera que el plano vertical limita en la línea de tierra al plano horizontal, de aquí que la sombra sea también recibida por el plano vertical, limitándose aquí por el resto de la intersección de los cilindros

de sombra con el plano vertical, y que así producen las curvas pC", qD', cerrando luego el contorno hacia la parte superior la recta C" D', sombra arrojada de la recta de estricción.

Mas en algunos de los casos referidos no está aun completado el problema, falta aún la sombra sobrepuesta, esto es la que se arroja, la superficie sobre sí misma, y la producen parte la generatriz vertical anterior y parte un trecho de más ó menos extensión, que corresponde á línea de estricción. Y en efecto, si consideramos otra vez la fig. 156, descubriremos fácilmente de como por la vertical del punto D pasa un plano de sombra, cuyos rayos homónimos contenidos en él van á cortar al plano horizontal en puntos de la traza Dφ' paralela á la proyección horizontal del rayo luminoso, mas la superficie conoide está por encima de dicha traza, luego aquella impedirá que los rayos lleguen al plano horizontal, recibiéndola por sí misma en el trecho curvilíneo en el espacio, pero proyectado según la recta Dφ en el plano horizontal, y así φ será sombra arrojada del punto C'-D, culminante de dicha vertical. Y será φ este último punto en atención, á que si no existiera el conoide, la sombra del punto C'-D en el plano horizontal sería el φ'. situado en la traza horizontal $g\tau$ del plano de sombra que contiene la línea de estricción, por lo tanto, como esta traza corta en f' á la traza del conoide, de aquí se infiere que la recta $f'b$ trazada paralelamente al plano vertical, será la generatriz del conoide producida por la intersección de éste con el plano de sombra que contiene la recta de estricción, y así él rayo de sombra que pasa por el punto D-C' encontrándose contenido en aquel plano, claro está que habrá de cortar al conoide en un punto de su generatriz bf', recibiéndola así ésta en φ, no permitiéndole alcanzar hasta φ' sobre el plano horizontal, y como quiera que D-O' es el pie de la vertical de que tratamos, este punto será sombra de sí mismo, y así la recta Dφ expresará hacia la derecha la sombra sobrepuesta; sin embargo, el trecho de recta de estricción Db continúa siendo divisoria de luz y sombra, produciendo su arrojada sobre la misma generatriz bf', límite del plano de sombra en el trecho $b\varphi$, y es que aquí la horizontal bE y la generatriz bf están contenidas en el mismo plano de sombra que contiene la recta de estricción; así en conjunto la sombra arrojada sobrepuesta se reduce al espacio triangular D$b\varphi$. Esto se comprenderá perfectamente sin

aparecer chocante, teniendo en cuenta no más que desde la distancia de traza $\tau f'$, el plano de sombra está por encima del conoide, mientras que desde f' hasta f se encuentra debajo del mismo, y por lo tanto no puede arrojar sombra la recta de estricción sobre el conoide.

Si el rayo de sombra tuviera en proyección horizontal, las direcciones de Df ó bien la de Dφ", entonces en el primer caso este rayo de sombra cortaría á la superficie del conoide, precisamente en el mismo punto que llega á encontrar al plano horizontal, extendiéndose entonces la sombra arrojada en el triángulo bDf'; en cuanto al segundo caso, como el rayo hiere antes al plano horizontal que al conoide, y la traza horizontal de dicho plano de sombra será la perpendicular á la línea de tierra trazada por el punto φ", esto indicaría que dicho plano de sombra está por encima de la superficie, y entonces ésta quedaría bañada en sombra la mayor parte de la región derecha, quedando unicamente en luz el pequeño y estrecho segmento Dν, comprendido entre la curva Dν y su cuerda. La fig. 160 está en este caso.

Las figs. 158, 160 y 163 no admiten sombra arrojada sobrepuesta, y no hay más que considerar la posición del rayo para descubrir á simple vista que la vertical O'C' de la primera está de lleno en luz, mientras que en las otras dos su sombra arrojada está inmergida en la general.

Estas curvas de sombra propia son tangentes en su proyección vertical y en el espacio con la generatriz vertical del conoide, ya sea que se considere ésta en las ramas anteriores ó la que corresponde á las posteriores; sin embargo, como dicha tangente es vertical, proyectándose según ello en un punto en el plano horizontal, de aquí se infiere que no puede servir ella para determinar la tangente en la proyección horizontal á las dos ramas de curva, precisamente en los puntos más utilitarios y de importancia, cuales son los de retroceso C y D. Esta tangente sin embargo puede encontrarse fácilmente, sin necesidad de acudir á la intersección de los planos tangentes en el propio punto á la superficie y al cilindro de los rayos luminosos, cuales son verticales, y por ellos se ha podido deducir la tangente en el espacio. Se demuestra que la tangente á las dos ramas de curva en los puntos de retroceso C y D, es paralela á los rayos luminosos de la proyección horizontal. En efecto sea la fig. 162, en donde tomamos en consideración el punto C'-D de la línea de estric-

ción, así como un punto tal como D_1 sobre la circunferencia directriz del conoide, pero que esté infinita mente próximo con el D. Llamemos ahora G la generatriz vertical C'O' del punto D y por G' la posición infinitamente próxima de otra generatriz, la que pasa por D_1; ahora bien, esta segunda generatriz G' pasará precisamente por el mismo punto cuspidal C', y para convencernos de tal hecho, no hay más que concebir un cono cuyo vértice sea el dicho punto C', y cuya base sea el mismo círculo director del conoide; con ello vemos que el *cono* y el *conoide* serán osculadores á lo largo de la generatriz G, (y por lo tanto el conoide tendrá una curvatura cónica á lo largo de esta generatriz, permitiendo ello que en este elemento común, la superficie conoide sufra una modificación radical, cual es la de poderse desarrollar dentro la jurisdicción de este estrecho elemento longitudinal). En este estado, y recordando lo dicho anteriormente, podremos venir á encontrar el punto inmediato del cúspide C' perteneciente á la línea divisoria de luz y sombra, mediante las siguientes construcciones: 1.° Trazar por el punto D una paralela al rayo luminoso en proyección horizontal, encontrando su intersección *a* con $g\tau$, traza horizontal del plano de sombra que pasa por la recta de estricción. 2.° Unir el punto D_1 con *a*. 3.° Trazar por D_1 una tangente al círculo director; mas como D_1 se supone ser el punto infinitamente próximo de D, esta tangente no será otra que el elemento rectilíneo DD_1. del mentado círculo, cual elemento corta á la recta CD en el mismo punto D (que aquí instituye al llamado punto S, S', S'', etc., de los casos ordinarios); y 4.° por el punto D trácese ahora una recta paralela á la D_1a, la cual cortando á la DD_1 (proyección horizontal de la generatriz G'), nos dará el mismo punto D.

En resumen que en este punto C'-D que encontramos colocado sobre la generatriz inmediata de G, el plano tangente al conoide y paralelo á los rayos luminosos tienen por traza horizontal la recta D_1a cual no es otra que D*a*, ya que los puntos D, D_1 son infinitamente próximos. Se infiere de aquí, que el plano tangente al *conoide* y al cilindro luminoso es vertical en este especial punto cuspidal, y por lo tanto, la tangente á las curvas de la proyección horizontal en el mentado punto, serán paralelas al rayo luminoso ya que él seguirá la dirección de la traza horizontal del plano tangente, paralelo á la dirección de la luz.

170. Sombra de la superficie llamada cuerno de vaca. —Se conoce ya esta superficie alabeada, por estudiarla detenidamente la Geometría Descriptiva. Ella sabemos que se compone (fig. 165, lám 30) de dos directrices curvilíneas, que ordinariamente son dos circunferencias A'EB', CED, ambas iguales y colocadas en planos verticales y paralelos como los AB y CD; luego otra tercera directriz, esta, rectilínea perpendicular á los citados planos, y pasando por el cruce O de las diagonales del paralelógramo formado, uniendo dos á dos los puntos de arranque más inmediatos que corresponden á los citados semicírculos, puesto que ellos descansan sobre un mismo plano horizontal, que aquí es el de proyección de este nombre.

Ahora se comprende que si nos proponemos dibujar generatrices de esta superficie, bastará concebir una serie de planos que pasen por la directriz rectilínea E'E'', tales como los E'H, E'*d*, etc., y todos ellos evidentemente serán perpendiculares al plano de proyección vertical, y nos cortarán á las dos curvas circulares en puntos que unidos darán aquellas directrices, así el E'H corta á la circunferencia anterior en el punto G G' y á la posterior en H-H', éstos unidos dan la recta GH-G'H', la cual se apoya en el punto E''E' sobre la directriz rectilínea; así las demás, únicamente observaremos la situación particular de la generatriz cuando pasa por el punto E, pues entonces será horizontal, apoyándose en el punto situado al infinito sobre la directriz rectilínea, á quien es paralela *.

Sea ahora R^v-R^h las proyecciones de un rayo luminoso, y con arreglo á su dirección, nos proponemos encontrar la sombra de dicha superficie, dando la preferencia á los puntos que estén situados sobre generatrices, escogidas de la superficie; así por ejemplo la generatriz GH-G'H'. Para esto é insiguiendo lo que se expuso en su lugar correspondiente (número 154), hacemos depender esta superficie, de otra generación más sencilla, y cuyo plano tangente sea también más expédito de trazar; y con este fin tracemos las tangentes HQ, GJ, en los puntos G y H, á las curvas circulares directrices, tomándolas, como á nuevas directrices, en las cuales se apoyará en el movimiento la generatriz escogida GH, pero

* Para más detalles y ecuación de la superficie, véase nuestro tratado de Estereotomía de la Piedra, primera parte, pág. 401.

continuando apoyándose sobre la directriz rectilínea E-E′-E″, la cual continúa siendo la misma en esta segunda generación; tenemos pues que nuestra generatriz, en el nuevo movimiento, se apoya sobre tres rectas que no están situadas en un mismo plano. Y como á consecuencia engendrará un hiperboloide de una hoja. Ahora este hiperboloide será de acuerdo con el cuerno de vaca, á lo largo de la generatriz GH, y así teniendo los mismos planos tangentes no habrá inconveniente de sustituir, una por otra en el problema de la sombra, pues el punto de sombra que buscamos sobre la generatriz será común á ambas.

Se demuestra fácilmente, que estas dos superficies se acuerdan perfectamente á lo largo de GH, observando que se cumple el requisito del párrafo n.° 152, de tener tres planos tangentes comunes en tres puntos distintos de esta recta; así en E′-E″, el plano tangente á simple vista se ve que es común, pues tanto la directriz E′E″, como la generatriz GH-G′H′, no han variado, son las mismas para ambas superficies, y estas rectas, al cortarse en E″, forman el verdadero plano tangente, pues cada una de ellas, es una tangente de sí misma.

En segundo lugar, en el punto G G′ el plano tangente al hiperboloide, está determinado por la generatriz GH, que puede considerarse como generatriz, perteneciendo al primer sistema de generación), y la tangente GJ, á la circunferencia; tangente que aquí pertenece al segundo sistema de generación; mas estas dos rectas, pueden también conceptuarse como tangentes al cuerno de vaca en el punto G, luego ellas determinan el plano tangente á esta superficie, cual es el mismo que el concerniente al hiperboloide.

Sin embargo, aún podemos facilitar más la operación, recordando que es mucho más expédito, trabajar con un paraboloide hiperbólico, que con un hiperboloide, y como el cambio aquí aparece muy facil, con sólo parar mientes en una sola consideración, de aquí que, sin ninguna clase de duda adoptemos este ventajoso cambio. El concepto á que nos referimos, se reduce, á imaginar que se establece una recta pasando por el punto E″-E′ y contenida en el plano HE′E″, y á la vez paralela al plano vertical AB, ó si se quiere CD. Si ahora en el engendro de una nueva superficie alabeada, cambiamos la directriz E′E″-E, sustituyéndola por la recta E′H-E″K, que cumple con las condiciones enumeradas poco ha, entonces será cuando al moverse la generatriz GH, en

su nuevo derrotero, engendrará un paraboloide hiperbólico (pues las tres directrices, no estando en un mismo plano, son paralelas á un plano director, cual puede ser cualquiera de los AB, CD).

Además este paraboloide será también de acuerdo, pues si bien se observa para nada han cambiado los planos tangentes en los puntos E′-E″, G-G′, H-H′.

Llevada pues la cuestión en este estado, resulta que estamos en el problema del n.° 153, y por lo tanto, bastará hacer pasar por la generatriz escogida, un plano H^{π}-V^{π}, que sea paralelo al rayo luminoso R^{v}-R^{h}, éste será ya un plano tangente, del cual habremos de buscar el punto de contacto x^{v} x^{h}. Este plano está determinado por la generatriz GH-G′H′, y por el rayo G*r* G′*r*′, que pasa por el punto; ahora este plano cortará al paraboloide, según una generatriz del sistema contrario, al que pertenezca la generatriz GH, escogida. Para encontrar pues aquella otra generatriz que llamaremos del segundo sistema, precisará conocer otras dos generatrices, además de la dada del primer sistema, pues al ser cortadas por el plano π, nos darán dos puntos que determinarán dicha generatriz del segundo sistema: busquemos pues dos posiciones que tome al moverse la GH, resbalando por las rectas GJ, HQ, y E″K. Sea encontrar su posición, en el instante que pase por el punto J-J′. Para esto, hagamos pasar un plano por el punto J J′ y la directriz E″K-E′H; este plano tiene por traza horizontal, la recta E″JM, y por traza vertical la MN, conducida por M, paralelamente en la E′H, y como quiera que la tercera directriz HQ se encuentra en el mismo plano vertical de proyección, de ahí se infiere que su intersección con MN sea el punto P *p*, intersección de la recta HQ, con el plano π, luego uniendo ahora P con J′ esta recta PJ′-*p*J, será la posición que dé la generatriz al pasar por J-J′.

Búsquese ahora la posición que adquiere, al pasar por ejemplo, por el punto R-R′, haciendo análogas operaciones; así el plano que pasa por el punto R-R′, y la recta E″K-E′H, tiene por traza horizontal la E″V (determinada por la paralela RS-R′S′, á la E″K-E′H), y por traza vertical la V*t*, paralela á la propia E′H, ésta corta en *t*-*t*′, á la HQ, y por lo tanto, la R*t*-R′*t*′, es otra posición de la generatriz que llamamos 2^{v} 2^{h}, así como á la primera encontrada la llamaremos 1^{v} 1^{h}. Búsquese ahora la intersección de cada una de estas dos rectas con el plano π, valiéndonos para la 1^{v}-1^{h}, del plano

H^v, que la proyecta verticalmente, y para la segunda del plano H^z, que también la proyecta verticalmente, y como se desprende de las operaciones efectuadas, encontrándose definitivamente el punto a-a' y el punto $b\ b'$, respectivamente para las intersecciones del plano π, con la recta 1 y con la 2; únase a con b, y la recta ab-$a'b'$, que así resulta, cortará á nuestra generatriz escogida; en el punto x^v-x^h, que es el definitivo de la sombra.

Se comprende ahora, que no hay ya más que reproducir semejante operación, para tantas otras generatrices que se escojan, para ir encontrando puntos sucesivos de la curva de sombra $m'x^v n'$-$mx^h n$.

No nos detendremos en la arrojada, porque su construcción es análoga en procedimiento á otras vistas en este libro.

Son bastantes estos ejemplos para tener buena idea, de cómo podrán solucionarse los problemas de sombra, al tener que operar con una superficie alabeada; sin embargo, aún cabrá ampliar dicha teoría en el capítulo siguiente. Dentro el cual caben los helizoides alabeados, quienes por sus propias condiciones, resolverán el problema, sin pedir auxilio á otras superficies



CAPÍTULO VIII

SOMBRA EN LAS SUPERHELIZOIDALES Y EN PARTICULAR DE LOS HELIZOIDES

171. Consideraciones generales.—La reconocida importancia que tienen semejantes superficies en el campo de la práctica, y las múltiples aplicaciones de que son susceptibles en la mayor parte de construcciones industriales, hace que las tratemos en capítulo especial formando como cuerpo de doctrina.

Son helizoides, las superficies engendradas por el movimiento helizoidal, de una línea cualesquiera; esto es, esta línea; que no es otra, que la generatriz, se mueve resbalando sobre una hélice, que es la directriz ya ascendiendo ó descendiendo, por medio de una traslación; al mismo tiempo que disfruta de otro movimiento, pero de revolución, en torno de un eje determinado. Aún quizá será dable comprender semejante superficie, concibiendo una línea cualquiera, invariablemente unida á una hélice cilíndrica, suponiendo luego, que dicha hélice se desliza revolviéndose en sí misma, arrastra consigo, la mencionada línea, la cual en su conjunto de posiciones, forma el lugar geométrico helizoidal.

Según eso, se deduce, que en este movimiento, cada uno de los puntos de la línea generatriz, describirá una hélice, y todas ellas tendrán el mismo paso y el mismo eje; de modo que teniendo en cuenta semejante é importante propiedad, bien podemos considerar á la superficie helizoidal como siendo, el lugar geométrico, de todas dichas hélices, que tienen

el mismo paso y eje, pasando ó apoyándose, en una línea cualquiera, de modo que en este nuevo modo de generación, esta línea cualquiera que antes considerábamos como á generatriz; ahora pasaría á ser nuevamente directriz.

Todo plano secante pasando por el eje de una superficie helizoidal, es un plano meridiano, y la sección que produce, es la línea meridiana de la superficie: Las meridianas en una misma superficie son todas iguales.

La superficie helizoidal, puede engendrarse, tomando como á generatriz, la línea meridiana, y obligando á esta última á emprender el movimiedto helizoidal.

También son iguales las secciones producidas á los helizoides, por planos perpendiculares al eje, estas secciones son las que se llaman *secciones de base*, y una cualquiera de ellas, puede servir también de generatriz de la superficie, moviéndola helizoidalmente.

Las secciones producidas á una superficie helizoidal por medio de cilindros de revolución, que tengan el mismo eje, que la mentada superficie, producen en ella, hélices de igual paso.

Los datos que determinan á una superficie helizoidal, pueden reducirse á tres, es á saber. 1.° La generatriz. 2.° El paso. 3.° El eje.

También son tres las grandes agrupaciones en que podemos dividir á los helizoides para facilitar su estudio.

Primero. Reglados.—Desarrollables.
Segundo. Reglados.—Alabeados.
Tercero. Inreglados.

Semejantes denominaciones, nos indican ya desde luego, que si las dos primeras agrupaciones admiten rectas como á generatrices, no así sucede con la tercera, á la cual hay que considerar ampliada y de modo que las superficies que en ella entran, sean susceptibles de considerarse también como dentro el género de las *envolventes*, de las posiciones que ocupa en el espacio una curva ó una superficie cualquiera, impulsada de movimiento helizoidal; así, pues, siendo las que tienen un carácter y estructura más general por prestarse á admitir una línea cualquiera por generatriz, empezaremos el estudio de las sombras de las superficies helizoidales con los

HELIZOIDES INREGLADOS

172. Fuste de la columna salomónica *.—El fuste de la columna salomónica está formado por una superficie helizoidal, contorneándose como espiral. Parece que su origen sea debido á una extensión abusiva de las estrías espirales. En el período de la arquitectura latina, se emplearon en gran variedad de construcciones en las formas espirales, pudiéndose citar monumentos claustrales, en donde cada fuste de columna que sostiene las arcadas lleva distinto contorno, haciendo el autor gala de su ingenio; y fecundidad de imaginación, presentando tanta variedad de dibujos y superficies, en donde la parte dominante y la saliente de las líneas, es la hélice. El claustro de San Pablo, Extramuros de Róma, es un ejemplo notable que puede citarse para este caso; mas posteriormente, se ven también generalizadas tamañas formas en las columnas, como en la catedral de Orvieto y otras de su género, y aun más adelante, en la época del renacimiento, y aun en el período del barroquismo, se difunden más y más, apareciendo ya en los patios señoriales, en las fachadas particulares, las portadas de las iglesias (fig. D) y hasta en los asuntos de detalles, apareciendo con ello, gran variedad de fustes curvilíneos, todos tratados en forma helizoidal.

Veamos en la lám. 28, la fig. 166, en la cual suponemos el eje del helizoide ser el O-O'O'', y además, que la sección meridiana principal dada por el plano aO es la sinuosoide $a'b'c'b'_1a'_1$ proyectada horizontalmente en la recta ac; se nos da también la hélice que parte del punto a expresándola en $a'A'a'_1$, la cual tiene el mismo paso que la sinuosoide. Si con estos elementos, damos por supuesto que la mentada sinusoide gira en torno del eje O-O'O'' resbalando el punto a por todos los puntos de la hélice directriz, entonces el lugar geométrico que en sus posiciones nos formará, será precisamente la superficie helizoidal de que tratamos. Téngase en cuen-

* En las composiciones ligeras y elegantes, en donde no se requiere mucha solidez, las columnas salomónicas, no sólo no repugnan, sino que hacen al contrario buena vista... Bails. Elementos de matemáticas, tomo IX, pág. 707.

La que sube en forma de espiral, dando algunas vueltas que por lo regular son seis. Matallana, vocabulario de arquitectura.

ta, que cuando el punto a' haya girado de una revolución entera, ascendiendo de la altura del paso, y por lo tanto venga á colocarse en a'_1, entonces la curva meridiana se confundirá, ó por mejor decir, será continuación de la primera posición inferior $a'_1c'a'$, ó sea la inicial. En este movimiento, cada uno de

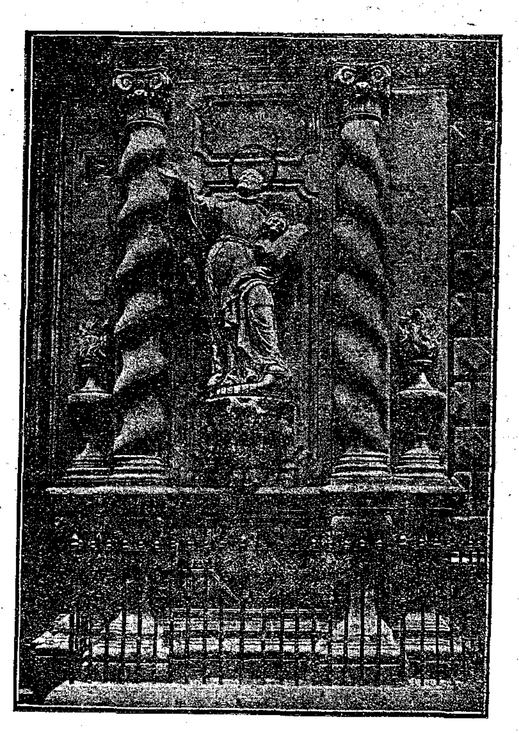


Fig. D

los puntos de la sinuosoide, tales como son los b', c', b'_1, etc., describirán hélices de igual paso, y ellas serán tales, que nos servirán para determinar el contorno aparente de la superficie sobre el plano de proyección vertical, pues para ello bastará el trazado de una línea curva tangente por todos los puntos a_1' e, c' d, a' de las hélices mencionadas, y eso, tanto á la derecha de la figura como de su izquierda, y en cuanto al contorno aparente sobre el plano horizontal, quedará com-

pletamente definido por dos circunferencias concéntricas de radios respectivos Oa, Oc, cuales provienen de las proyecciones de las hélices más y menos distantes del eje O, produciendo la segunda; la que se llama hélice de garganta del helizoide.

Siendo ahora R^v - R^h, las proyecciones del rayo luminoso propongámonos encontrar la sombra propia de semejante superficie, y á este objeto, sea la determinación de sus puntos, que se hallen precisamente situados sobre una de las indicadas hélices de la superficie, como por ejemplo la señalada con la letra $\triangle$, y que parte del punto O'-9 pasando por b', y siendo tangente en d al contorno aparente.

Sabemos que para todos los puntos de una misma hélice, todos los planos tangentes á la superficie guardarán la misma inclinación respecto al plano horizontal, toda vez que dichos planos tangentes están determinados cada uno, por la tangente á la hélice, así como por la tangente á la curva generatriz en el punto que se considere; es así, que estas dos tangentes por las condiciones del propio dato, persisten cada una de ellas formando el mismo ángulo con el plano horizontal, cualquiera que sea el punto considerado, pero situado en la misma hélice; luego infiérese de ello, la constante inclinación de los planos á que nos referimos. Esta propiedad es de suma importancia en el caso actual, pues por ella lograremos simplificar los medios de investigación para los puntos de sombra que deseamos.

Y en efecto, si imaginamos que el plano tangente en el punto incógnito, situado en la hélice escogida $\triangle$, lo hacemos girar descendiendo, conservándose en este movimiento igualmente tangente en todos los puntos de $\triangle$, claro está que lo podremos fijar en el punto ó situación que más nos convenga, como por ejemplo, el situado en b-b' sobre el meridiano principal; efectuar luego en él, la operación, para luego colocarle otra vez á su verdadera posición; en el mismo sitio donde le corresponda en la superficie.

Se escoge el punto b-b', y no otro, á causa de que la determinación en él del plano tangente, aparece más expedita; la tangente á la línea meridiana es la recta b'I, cuya traza horizontal es el punto i, y por lo que se refiere á la tangente á la hélice en el mismo punto b'-b, aparece proyectada de perfil, más su traza horizontal g es fácil encontrarla, teniendo en cuenta que la altura del punto b' para con respecto al pla-

no horizontal, es igual á la cuarta parte de la altura del paso, y, por lo tanto, la tangente formará en el espacio la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos serán, el uno, dicha altura, y el otro la recta *bg*, igual á la rectificación de la cuarta parte *b*D de la circunferencia de radio *b*O, encontrándose como es evidente; dicho triángulo, en el expresado plano de perfil, que pasa por *b-b'*; luego *g* es el punto en donde la tangente á la hélice, corta al plano horizontal; de aquí se infiere que *g* es el punto de traza. Ahora, uniendo *g* con *i*, la recta *gi*, será la traza horizontal del plano tangente en dicho punto *b-b'*. El plano está pues completamente determinado, basta ahora moverlo convenientemente, hasta colocarlo á su debido lugar, girándolo otra vez en torno del eje O-O'O", ascendiéndole y permaneciendo siempre tangente á la superficie, resbalando el punto de contacto á lo largo de la hélice △, hasta tanto, que encontremos entre sus posiciones aquella en la cual sea paralelo al rayo luminoso.

Para efectuar semejante movimiento, observemos que, permaneciendo en todas sus posiciones igualmente inclinado para con respecto al plano horizontal, se podrán considerar todos estos planos tangentes, como paralelos á otros planos tangentes á un cono recto, cuyas generatrices estén inclinadas para con el plano de su base, del mismo ángulo, que el que forman aquéllos con el plano horizontal de proyección; y así haremos depender su determinación, del sencillo problema de trazar planos tangentes á un cono, que sean paralelos á una recta dada, que aquí es el rayo luminoso. A este fin, tomemos en consideración el punto V-O, en donde la tangente á la sinuosoide meridiana, corta al eje, tomando á este punto V-O como á vértice del cono en cuestión; al mismo tiempo, que se trace la recta O*h* como á línea de máxima pendiente del plano que pasa por V-O, y cuya traza horizontal hemos encontrado en *ig*. Haciendo girar ahora la *ig*, alrededor de O, el punto *h*, describirá una circunferencia, cuya podrá considerarse como la base del cono recto, cuyo vértice será el punto V-O. Trácense pues á este cono dos planos tangentes paralelos al rayo luminoso, (núm. 90), y para ello, bastará conducir por el punto vértice, la recta Vω'-Oω, paralela al rayo luminoso; su traza sobre el plano de la base del cono, es ω-ω', de modo, que conduciendo por este punto dos tangentes ω *h"*, ω*h'"* al círculo de base, los puntos de tangencia, nos determinarán con evidencia las generatrices de contacto O*h"*, O*h'"* y

con ellas los planos tangentes al cono, cuyas trazas horizontales son la una *h"*ω y la otra la *h'"*ω. Mas estos dos planos no son tangentes á la superficie, y sólo sí paralelos á los dos tangentes que buscamos; mas eso bastará para determinarlos. Con este motivo, recordemos, que no habiendo variado la inclinación del plano tangente en *b-b'* en sus diversas posiciones, todo sistema de rectas en él contenidas guardarán las mismas relaciones angulares en el plano horizontal; así es que, fijándonos en las rectas O*h*, línea de máxima pendiente, y la O*b* tangente á la sinuosoide, su ángulo *h*O*i* permanecerá igual en el *h"*O*i"*, ó bien en el *h'"*O*i'"* cuando el punto *h*, se haya fijado en *h"* ó el *h'"*; por lo tanto, tomando la distancia *hi* y colocándola en *h"i"* y en *h'" i'"*, tendremos que las rectas O*i"*, O*i'"* serán las nuevas posiciones que tome la O*i* después del movimiento de simple rotación. Además, el punto primitivo de tangencia *b-b'* habrá descrito en el movimiento una circunferencia horizontal, viniendo á colocarse en *j* y en *p* en el encuentro de dicha circunferencia con las mentadas *i"*O, *i'"*O, para situarse en el espacio, á la misma altura del punto inicial *b-b'*. Esto basta para deducir, que estando situada la hélice △ sobre el cilindro vertical, cuya base es la circunferencia de radio O*b*, y siendo los planos tangentes al cono paralelos á los dos que buscamos, para nada variará la proyección horizontal de los mismos, así como la de las rectas en él contenidas, cuando les impulsemos un movimiento de traslación vertical; así es, que efectuándolo así, los puntos *j* y *p* recorrerán los puntos de las verticales que los proyectan horizontalmente, fijándolos definitivamente en el momento que dichas verticales corten á la hélice △ en los puntos *j'* y *p'*, en cuyo caso, éstos serán los puntos de sombra, pues que obedecen á verdaderos planos tangentes á la superficie, y al mismo tiempo paralelos á los rayos de luz.

Se comprende, pues ahora que escogiendo nuevas hélices, y con iguales consideraciones, llegaríamos á obtener tantos cuantos puntos quisiéramos, únicamente si, haremos observar con el fin de abreviar operaciones; que todos los conos auxiliares será conveniente trasladarlos de modo, que todos sus vértices pasen por un solo punto que puede ser, por ejemplo, el V-O; ó también si se prefiere trasladarlos exteriormente, de las líneas de la figura general, para que salgan más claras las operaciones, amén de que después se coloquen en su respectivo lugar los resultados que se obtengan.

Sin embargo, hay puntos especiales cuyo hallazgo puede depender de otros ya conocidos, en cuyo caso aún resultan más rápidas las operaciones. Para ello, hagámonos cargo de la forma y silueta con que aparece la sinuosoide meridiana, y no será difícil reconocer de momento, que ella es simétrica para con respecto á la horizontal EE′, que pasa por su punto c', esto es, que si dobláramos la hoja en donde se halla dibujada al través de dicha horizontal EE′, las dos mitades de sinuosoide se confundirían perfectamente. Mediante esta ligera observación, ya podemos inferir que si escogemos un punto tal como b'_1 en la sinuosoide superior, que sea el simétrico de su compañero b' de la sinuosoide inferior, y concebimos en él la tangente b'_1I′, en la sinuosoide de que se trata, esta tangente guardará simetría con la que antes hemos trazado en b'I, encontrándose como esta última igualmente inclinada para con respecto al plano horizontal, aunque dirigida en sentido opuesto; si ahora, como antes hemos hecho, se gira esta tangente en b'_1, claro está que describirá esta recta una superficie cónica recta igual en un todo á la anterior, proyectándose horizontalmente en la misma proyección del primer cono, toda vez que los dos planos de base cuales son FF′ y el horizontal de proyección se hallan equidistantes de la línea horizontal de simetría EE′.

Este segundo cono de vértice V′ simétrico con el V, puede considerarse para efecto de las operaciones ulteriores, que se mueve verticalmente, trasladándose el vértice V en V′, pues, en este caso, la nueva posición que adquiera, podrá considerarse como la segunda hoja del cono que antes hemos considerado de vértice V, sirviendo como á consecuencia todas las operaciones que hayamos hecho para éste, con las que se refieran á la hoja superior; y como quiera que los resultados han de ser completamente iguales en el plano de proyección horizontal, cualquiera que sea la posición del cono de vértice V′, mientras que su eje permanezca vertical, y V′ en un punto cualquiera del eje de la superficie O, O′O″, se infiere de ahí, que podremos deducir otros dos puntos de contacto que serán de sombra, valiéndonos de los ya encontrados en j y p. Y en efecto, la generatriz Oh'' de tangencia del plano de sombra con el cono directo, ahora prolongada hacia Oh^{IV} cual será la generatriz de contacto del propio plano con el cono invertido, y así como en la primera operación obteníamos el punto j, así también en esta segunda, obten-

dremos el punto r, observando tan sólo que la traza del plano tangente sobre el plano de base que ahora es FF′, será la tangente $h^{IV}i^{IV}$ al círculo de base del cono, igual y paralela á la que más antes se había encontrado en $h''i''$; más como en todas estas operaciones, según ya anteriormente hemos indicado, no ha de cambiar para nada el resultado de la operación cuando se traslade el cono invertido; de V en V′, de aquí es que r sea el verdadero punto de sombra, cuyo ya se puede trasladar directamente en su proyección vertical, cuya vendrá colocada en el punto de intersección de la vertical proyectante que parte de r con la hélice $\triangle'$ descrita por el punto inicial b'_1, así se obtendrá el punto r'. Con igual razonamiento obtendríamos el punto j_1-j_2, cuyo depende aquí del punto p.

Examinemos ahora lo que resulta de las construcciones sobre el plano horizontal, y ellas indican que la proyección del rayo luminoso Oω, divide en dos partes iguales al ángulo $h'''Oh''$, lo propio que á su opuesto por el vértice h_1Oh^{IV}, luego de aquí se infiere que si tomamos en cuenta los suplementos de cada uno de ellos $h^{IV}Oh'''$, h_1Oh'', estos tendrán por respectivas bisectrices, la recta GG′ conducida por O perpendicularmente á R^h, y como quiera que las tangentes tales como h_1i_1, $h''i''$ son iguales y simétricamente colocadas para con respecto á la misma GG′, se inferirá de aquí que los puntos j, j_1 se encuentran simétricos para con la GG′ y que obtenido uno de ellos, por ejemplo j, podrá deducirse fácilmente el j_1, con sólo trazar la perpendicular j-j_1 á la línea de simetría GG′ hasta que corte en j_1 á la misma circunferencia que pasa por j. Igual razonamiento produciríamos para los puntos p y r, así como también con los otros que obedecerían á la simetría de los nuevos puntos hallados por el procedimiento antes mentado de los conos auxiliares; nótese de paso que la circunferencia de radio Ob, es á la vez proyección horizontal de las dos hélices $\triangle$, $\triangle'$ de que nos hemos valido, correspondiendo ambos á dos con los puntos de simetría V′V.

173. De las últimas propiedades que acabamos de examinar, puede deducirse un teorema sentado por Blaumental que facilita en gran manera las construcciones, cual es el siguiente: *Cuando el meridiano de una superficie helizoidal tiene un eje de simetría contenido en su plano, entonces la proyección horizontal de la línea divisoria de luz y som-*

bra, resultará ser simétrica para con respecto á la recta, que partiendo de la traza horizontal O del eje de la superficie, sea perpendicular á la proyección horizontal R^h del rayo luminoso.

174. Mas á parte de todos estos puntos, aun pueden encontrarse otros con suma facilidad, estos son los que sitúan en la hélice máxima y en la de garganta de la superficie, obedeciendo también semejantes puntos al contorno aparente de la proyección horizontal. Y en efecto, en cada una de estas referidas hélices, si se conciben los cilindros circulares en donde ellas están situadas; semejantes cilindros serán tangentes á la superficie helizoidal, siendo sus líneas de contacto respectivas, las hélices que últimamente hemos mencionado. Infiérese, pues, que sobre estas hélices puede hacerse depender el plano tangente de la superficie helizoidal, del plano tangente que se refiere á los cilindros mencionados; conduciendo, pues, las tangentes á estas dos circunferencias y que sean paralelas á R^h, obtendremos así las generatrices verticales de contacto, proyectadas en los puntos n, k, q, m, y aquellas generatrices verticales de dicho cilindro, cortando á las hélices dichas en los puntos n-n', k-k', q-q', m-m', ellos serán cuatro puntos de que podemos disponer para la línea divisoria del claro obscuro. Podría suceder como en el caso actual que la curva encontrada tuviera algún punto de común con las curvas del contorno aparente, en cuyo caso estos puntos son especiales, se obtienen directamente por ser provenientes de planos tangentes á la superficie, y á la vez perpendiculares al plano vertical de proyección y con ellos vienen dados en B′, e, con solo trazar rectas paralelas á la R^v y tangente á dicho contorno aparente. Mas es bien obvio que no siempre existirá semejante circunstancia, pues tal puede venir orientada la superficie para con respecto al rayo luminoso que aquella línea divisoria de luz y sombra caiga, por completo dentro del contorno aparente, para separarse toda ella de las líneas límites del mismo.

Es lógico deducir, después de haber pasado por las operaciones de los conos auxiliares, los cuales cada uno de ellos ha sido dable conducirle dos planos tangentes, suministrando con ello dos distintos puntos, uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda del rayo de luz R^h, que dos serán también las curvas que se obtengan para dicha línea divisoria, una á cada

lado de R^h formadas respectivamente por la unión de cada serie de puntos en las dos agrupaciones encontradas. Una será, pues, la $kljnj_1l_1$, vista toda ella en proyección vertical en $j_3n'B'j'l'k'l_2j_2$... etc.; mientras que la otra rama se obtiene en $rqpm$, oculta toda ella en proyección vertical expresada, por lo tanto de trazos en $p'm'r'q'$.

Aquí en esta cuestión veríamos, tratando á esta superficie lo propio que hicimos con el Toro, que los puntos l_1-l_2, l-l', están dotados de la propiedad de que la tangente á la curva, que es á la vez paralela al rayo $R^v R^h$, como existe en cada uno de estos puntos una doble tangencia, y el plano tangente se convierte en osculador, siendo esto causa que estos puntos verdaderamente singulares, aparezcan como de retroceso en la sombra arrojada. De paso hacemos no más constar por ahora, que semejantes puntos singulares, aparecerán solamente en los sitios referentes á la parte no convexa como veremos más adelante. Aquí en este nuestro caso las tangentes encontradas, en proyección horizontal, se confunden en una sola por venir simétricas las proyecciones de los dos puntos indicados.

Así como, al encontrar puntos de la curva de sombra, lo hemos hecho sobre determinadas hélices de la superficie, así también lo hubiéramos podido practicar sobre líneas cualesquiera de la misma, como por ejemplo, sobre una sinuosoide meridiana; sobre una sección horizontal, cualquiera... etc.

Si fuera la sinuosoide á que nos referimos, la curva escogida, bastaría, considerar, los planos tangentes á la superficie, en cada uno de los puntos de la escogida sinuosoide, el lugar geométrico de todos ellos formarían una superficie desarrollable, tangente á nuestra superficie helizoidal, á lo largo de dicha sinuosoide; es evidente ahora que todo plano tangente, á la desarrollable, lo será igualmente al helizoide, y por lo tanto, resolviendo la cuestión para la primera, se habrá resuelto para la segunda, pues aquélla proporcionará, una generatriz de contacto, y la intersección de ésta, con nuestra sinuosoide, dará el punto en cuestión. Ahora bien, el plano tangente á la desarrollable, y paralelo al rayo luminoso puede resolverse, como en el (núms. 106 y 107) ó bien si se quiere como la cuestión próxima á reseñarse en donde, se hecha mano del cono director.

Finalmente de querer encontrar los puntos de sombra,

sobre una sección horizontal, precisa semejante asunto, tratarlo con párrafo especial.

175. Verdaderamente, en su síntesis, esta solución, es la del n.° 24, cuando nos valimos de las proyecciones oblicuas, y luego contra proyecciones; más el resultado que aquí obtendremos, si bien será completamente igual, al de allí expuesto. sin embargo la ley de procedimiento, se fundará estrictamente en las propiedades genéricas de la superficie, propiédades, que en general tenderán á facilitar la cuestión, por medio de operaciones breves y expeditas. Recordemos también que este método lo aplicamos en el n.° 142 á las superficies de revolución, toda vez que allí era de fácil construcción, al determinar las sombras arrojadas, de los distintos paralelos, cuando la superficie venía dada en disposición, de ser su eje perpendicular á uno de los planos de proyección; más aquí en este presente caso, quizá, las curvas horizontales, que sustituyan á aquellos paralelos, no se prestará su construcción, á un trazado tan fácil y rápido, más esto quedará compensado, por otras propiedades que se desprenden de la misma superficie helizoidal. Estas propiedades, no nos son por otra parte desconocidas, sobre todo, aquellas más fundamentales, en donde las subsiguientes se apoyan, por medio de naturales y espontáneas deducciones.

Precisa para eso, recordar aunque sea momentáneamente las conclusiones que se dedujeron en el párrafo 46, al tratar de la sombra de la hélice circular. Allí expusimos, que la sombra de la hélice, sobre un plano perpendicular al eje, es una cicloide, y como á tal; conociendo la generación, de esta curva, podríamos trazar inmediatamente, la sombra arrojada de la hélice, sin acudir siquiera al plano de proyección vertical. Semejante conclusión era consecuencia, de haber considerado á la hélice, como engendrada por el movimiento de un punto, situado sobre un círculo horizontal que se mueve de modo, girando alrededor del eje del cilindro, al mismo tiempo que asciende, ó desciende por traslación, y siendo uniformes ambos movimientos combinados. Semejante modo de engendrar las curvas, motivaba, que para cada posición del círculo generador, la correspondiera otra exactamente igual en la sombra arrojada, viniendo colocados todos estos últimos, de modo que sus centros estuviesen en una línea recta, sombra arrojada del eje, de la curva, cuya altura de dicho eje se tomaba igual al paso escogido para la misma hélice. De aquí era que el movimiento en el espacio del círculo generador, le correspondía en el plano de sombra arrojada, un movimiento rotatorio á la par que de resbalamiento sobre una recta que siendo tangente al círculo de sombra, tenía una magnitud igual á la sombra del precitado eje.

Que cuando esta recta ó sea el paso, era igual á la circunferencia generadora, rectificada, entonces la cicloide era cumplida, cuando el paso resultaba mayor que dicha rectificación, resultaba la cicloide alargada y finalmente cuando era menor, aparecía en la curva reducida. Mas de todos modos resulta indispensable el círculo generador; círculo que expresará la sombra arrojada, del que consideramos en el movimiento combinado, á que nos hemos referido poco ha. Este círculo de sombra arrojada, engendrador de la cicloide es el que conoceremos por *epiciclo* *, mientras que la recta que le sirva de apoyo en el movimiento, y á la cual se conservará, siempre tangente la llamaremos *directriz del epiciclo*.

Mediante estos precedentes sea la fig. 167, en donde se representa una hélice circular $Cp'q'$-cpq, así como una curva cualquiera *adb*, situada en el plano horizontal, relacionada de tal modo con la hélice, que ésta al moverse girando y ascendiendo en torno del eje *o*, se lleva en su movimiento á la citada curva, cual en todas las posiciones que vaya adquiriendo, se conserva constantemente horizontal; entonces es evidente, que dicha curva engendrará una superficie helizoidal, de la cual será verdadera generatriz, á la par que podrá considerarse, en todas dichas posiciones, como sección de las que convenimos en llamar *sección de base*. Sobre cada una de estas secciones de base, es ahora que nos proponemos encontrar puntos de la línea de sombra.

Las sombras arrojadas de estas diversas generatrices curvilíneas, serán evidentemente, curvas iguales á aquéllas, y la envolvente que resulta de las mismas será la sombra

* *Epiciclo* de ἐπί, sobre, y κύκλος, círculo. En realidad, aquí el círculo generador se mueve sobre una recta, conservándose, siempre tangente á ella; y no sobre la periferie del otro círculo, como así tendría de ser, conforme expresa, el significado de la palabra *epiciclo*, más hemos creído, conveniente conservar la misma denominación, conforme lo han hecho, los autores, que sobre esta cuestión, han tratado. El punto del círculo generador, describe así una *cicloide*, no una *epicicloide*.

arrojada de la superficie helizoidal. Recordemos ahora que los puntos de tangencia, entre la citada envolvente y las envueltas, eran tales, que contraproyectados oblicuamente y en dirección paralela á los rayos luminosos, daban los puntos originarios, ó sean los puntos de sombra propia, sobre la superficie de que tratábamos. Pues bien, aquí en virtud de las propiedades especiales de la hélice, estos puntos de tangencia, de que hemos hecho mención en la línea arrojada, pueden encontrarse prontamente, y aun prescindiendo de la proyección vertical; del propio modo que prescindimos de esta misma proyección, cuando se trató en su lugar del estudio de la sombra de una hélice.

En efecto, allí la sombra de la hélice, sobre el plano de base, era considerada, como el lugar geométrico de las distintas sombras de un punto, que se moviera recorriendo toda dicha hélice, concluyendo así, que dicha sombra podía considerarse engendrada, por el movimiento de un cierto círculo (epiciclo), que imprimiéndole un movimiento de rodadura, disfrutase también del movimiento de traslación, recorriendo su centro, la recta paralela á la proyección horizontal del rayo luminoso pasando por la traza o, del eje de la mencionada hélice.

Pues bien, aquí iguales circunstancias concurrirán al tratarse no ya de un punto en movimiento, sino de varios formando una curva determinada. La hélice al moverse, enroscándose en sí misma se lleva consigo, á la curva generatriz; y como quiera para cada posición del punto en la hélice, corresponde en la sombra arrojada el correspondiente epiciclo, que lo determina, claro es pues que para cada uno de estos epiciclos, existirá una posición de la sombra arrojada de la generatriz curvilínea, que se encuentre á la altura del punto considerado en la hélice. Así pues el movimiento de rodadura del epiciclo consabido, moviéndose en el plano horizontal ó sea de base del helizoide, llevará consigo, la curva que es sombra arrojada de la generatriz escogida, obtenida esta en sus varias posiciones sobre el plano horizontal; su envolvente será la sombra arrojada de la superficie. Ante todo pues, procede á la determinación del epiciclo, así como á su línea directriz; estos datos son fáciles de encontrar, recordando lo dicho en el párrafo 46. Allí vimos que la circunferencia rectificada del epiciclo, era igual á la sombra del

paso, de la hélice así como $\delta = \frac{\textit{sombra del paso}}{\pi}$, siendo δ, el diámetro, y por lo tanto inferimos el valor del radio r, cual será $r = \frac{\textit{sombra del paso}}{2\pi}$, con arreglo á esta igualdad, se infiere el valor de r, y con él y haciendo centro en o, trácese el círculo con el radio $r = o\Sigma$, y con ello tenemos que la posición inicial del epiciclo, estará determinada, siendo su directriz la tangente $\Sigma\Sigma'$, paralela al rayo luminoso Conclúyase de aquí el siguiente teorema

176. La sombra arrojada de una superficie helizoidal, sobre un plano perpendicular al eje, es la envolvente de todas las posiciones, de su sección de base, suponiéndola relacionada invariablemente, con un determinado epiciclo, el cual disfruta de un movimiento de rodadura á la par que de otro de traslación, permaneciendo tangente á la recta directriz paralela á la proyección del rayo luminoso sobre dicho plano de base.

Consideremos, pues, ahora, una posición cualquiera de la generatriz la $a'b'$, por ejemplo, esto es cuando por el movimiento de ascenso vertical se traslade en el plano horizontal $O'b_2$, situado á la altura CO' proporcional al arco de giro del movimiento circular. En este estado, la sombra de dicha curva generatriz será la $\alpha\beta$ igual á la original pudiéndose dicha sombra considerar, según el teorema últimamente expuesto, como la posición que ha tomado la curva de base ab al ser llevada en el movimiento junto con el epiciclo, el cual lo consideramos ahora colocado teniendo el centro en f y apoyándose en z sobre la directriz, y en este concepto la recta Of paralela al rayo luminoso de la proyección horizontal, será la sombra del trecho de altura de eje CO', observando de paso que $fo = \Sigma z$.

Ahora pues, si damos por supuesto, que el punto d' sea el de tangencia entre la envolvente y la envuelta $\alpha\beta$, él será sombra arrojada del punto de la línea divisoria de luz y sombra propia, cuyo punto originario quedará obtenido trazando por d' una paralela al rayo luminoso, hasta encontrar en δ á la curva $a'b'$, siendo con ello δ el punto originario que buscábamos. También conviene dejar aquí sentado que con semejantes operaciones resulta $\delta d' = fO = \Sigma z$.

Si análogas operaciones repetimos para todos los puntos

de contacto de la envolvente y envueltas, en la sombra arrojada, todos reuniendo la condición del d', claro es que obtendremos puntos como el δ, y ellos unidos, darán la proyección horizontal de la divisoria de luz y sombra propia, refiriendo luego estos puntos en proyección vertical sobre los planos horizontales de base en donde se hallen (tal como $O'b_2$ para el punto δ-δ'), y uniéndolos también lograremos la proyección vertical de dicha curva de sombra.

Las construcciones que se acaban de referir fueron analizadas por Burmester, y de ellas sacó las consecuencias más importantes de las que dedujo su famoso teorema, que más abajo enunciamos, por el que se facilitan más, si cabe, los procedimientos para determinar la proyección horizontal de la línea divisoria de sombra.

Volvamos pues á la figura 167 y tengamos en cuenta la normal c_2d' común á la envuelta $\alpha\beta$ y á la envolvente dd_1d', esta normal es visiblemente sombra arrojada de su originaria $c'\delta$ (normal á la curva originaria $a'b'$), también recordemos que se ha encontrado que $\delta d'=Of=\Sigma z$; luego infiérese que la prolongación de la normal c_2d' pasará por el punto z, mientras que por otra parte la prolongación de la normal $c'\delta$ pasará por el punto Σ, y así ha de ser, porque la envuelta $\alpha\beta$ arrastrada por el movimiento del epiciclo cuando este se mueva, rodando y permaneciendo tangente sobre la recta Σz; el punto z podrá considerarse como centro instantáneo de rotación, por el cual, á la par que se describirá el elemento infinitamente pequeño que corresponde á la envolvente en d', este elemento será el mismo que el que corresponde en el propio punto á la envuelta, y por lo tanto ambas á dos curvas tendrán unanormal $d'z$ común, cuya pasará por z que hemos llamado centro instantáneo de rotación.

Además, el punto δ el que necesitamos para la curva de sombra y por el cual se han expuesto todas las mencionadas operaciones, queda determinado desde luego conduciendo desde Σ una normal á la generatriz $a'b'$ en la posición que la hemos considerado, y así la solución del problema de la sombra á una superficie helizoidal, queda reducido á una simple cuestión de geometría elemental, cual es el trazar una normal á una curva plana desde un punto exterior Σ, cual servirá para toda otra sección horizontal que hemos llamado de base. Este punto Σ y que goza de la propiedad de ser el de concurso de todas las normales á las secciones de base, en los puntos precisos de la curva de sombra propia, es el que conoceremos por punto *polar* de las normales á la proyección horizontal de las generatrices del helizoide, que son secciones de base del mismo.

Fueron bastantes estos resultados para que Burmester expusiera su teorema diciendo que:

177. **La línea proyección horizontal de la separación de luz y sombra propias de un helizoide, constituye el lugar geométrico de los pies de las normales conducidas desde el polo Σ á las líneas de proyección horizontal correspondientes á las secciones de base, cuales pasan sucesivamente por las posiciones que resultan de girar dicha sección de base alrededor del centro O, traza aquí horizontal del eje de la superficie.**

178. En virtud del precedente teorema para buscar la línea de separación en el plano horizontal de un helizoide, no habrá más que considerar distintas posiciones de la sección de base y conducirlas normales, desde el polo Σ, las intersecciones de estas normales con las generatrices curvilíneas, determinan desde luego los puntos de la línea que se pretende determinar. Como se vé, semejantes construcciones quedan por completo independientes del plano de proyección vertical, y podemos prescindir del mismo para semejante curva de sombra.

De este importante teorema, deduce también Dunesme, dos corolarios, cuyos tienen relación con el teorema de Dunesme del n.° 143 estos dos corolarios son los siguientes:

179. 1.° **Las normales de la línea de sombra arrojada de un helizoide sobre el plano horizontal, son las sombras arrojadas de las generatrices rectilíneas de un conoide, cual se considera engendrado por una recta horizontal que se apoya sobre la vertical que parte del polo y también desliza por la línea de separación de luz y sombra de dicha superficie.**

2.° **La envolvente de todas las citadas normales, ó sea la evoluta del contorno de la sombra arrojada del helizoide, forma el contorno de la sombra arrojada del conoide sobre el plano horizontal.**

Se comprende ahora las ventajas que pueden sacarse de estas dos importantes propiedades, para estudiar en todos sus

detalles y minuciosidades la sombra arrojada de la superficie helizoidal.

180. Teorema de Mangiagalli.—Al objeto de abreviar aun más las operaciones, Mangiagalli substituyó el procedimiento del trazado directo á partir del polo Σ de las normales á las secciones de base, y en cambio dibujó un número conveniente de normales por los puntos escogidos de la sección de base inicial, moviendo luego esa última en las condiciones expuestas, esto es, en torno del centro O hasta que dichas normales vayan sucesivamente y por su orden pasando por el polo Σ. Aclaremos esta operación auxiliados de la figura 168, en ella la curva A es la sección generatriz de báse, considerada en su posición de partida ó inicial, y O la proyección horizontal del eje del helizoide, por último R, el rayo luminoso.

Con estos elementos, calcúlese luego según hemos visto anteriormente, el radio OΣ del epiciclo, trazándolo en seguida.

Concíbese ahora una normal, la *ab*, por ejemplo, en dicha sección de base A, tomando desde luego en consideración el punto *a*, intersección de esta normal con la curva A. Si en este estado de cosas se hace girar en torno de O la curva A con su normal, hasta que esta última pase por el pòlo Σ, claro es que en dicha posición el punto *a*, describiendo un arco de círculo, irá á situarse en la nueva posición que le corresponda situándose en *a'*, por el cual pasará también la sección de base, por lo que se cumplirán las condiciones requeridas para que *a'* forme parte de la línea de separación de luz y sombra, en virtud del teorema de Burmenster. Veamos pues como efectuamos este giro.

A este efecto, trácese la perpendicular O*c* á la normal *ab* antedicha y con centro O y radio O*c*, trácese una circunferencia, ahora es evidente que en el movimiento de giro la *ab* permanecerá siempre tangente al círculo de radio O*c*, y cuando llegue á la posición que deseamos habrá de pasar por Σ, siendo tangente al propio círculo, trácese pues por Σ la tangente Σ*c'* y ésta será la nueva posición de la *ab*, más para precisar ahora el punto en donde á ido á fijarse el punto *a*, obsérvese que *b* ahora se confunde con Σ, y como quiera que en este movimiento de giro la recta *ab* se ha conservado íntegra en su magnitud, claro será que tomando la distancia *ab*

y colocándola sobre la nueva tangente en *c'* al círculo de radio O*c'*, y á partir de Σ se obtendrá el punto *a'*, cuyo será perteneciente á la línea divisoria de luz y sombra.

Mas la recta Σ*a'* puede continuar moviéndose en su giro permaneciendo siempre tangente al mismo círculo hasta volver á pasar por Σ, en cuyo caso adquirirá la posición *h'*Σ en cuyo caso el punto *a'* pasará á ocupar la posición *a''*, tal, que *h'a''*=*c'a'*, entonces el punto *a''* cumple también las condiciones del citado teorema, y es, por lo tanto, otro punto de la línea divisoria que buscamos.

Con otras normales trazadas en la sección de base A y repitiendo con ellas operaciones análogas á las últimas expresadas, se obtendrán tantos cuantos puntos queramos, sin necesidad, como vemos, de complicar el dibujo con todas las secciones de base sobre las cuales se sitúen los puntos de sombra.

Pero aun hay más, cuando la sección de base A, resulta simétrica para con respecto á una recta que parta del centro O, como sucede en el caso actual con la O*x*, aun será dable lograr otros puntos, si cabe, con mayor prontitud que los obtenidos últimamente, una vez éstos sean encontrados.

En efecto, fijémonos en que en el plano de la curva A puédese trazar otra normal *hf*, tangente también al círculo de radio O*c*, y que esta normal sea simétrica con la *ac*, (pues ambas son tangentes á un mismo círculo trazadas desde un punto exterior, y por lo tanto se encuentran igualmente inclinadas para con respecto al radio *lo*, que pasa por dicho punto de intersección *l*, el cual constituye un verdadero eje de simetría.) En esta hipótesis, es indudable que cuando hagamos girar la curva A para situarse en sus distintas posiciones, se llevará no solamente consigo á la *ab*, sino que también á la recta simétrica *gf*, la cual conservará su simetría con la primera, sea cual fuera la posición en que se fije semejante sistema de líneas. Así, en la misma posición de la sección de base en la cual se ha situado la *c'a'*, se situará también la *hf* pero guardando la simetría con aquélla, esto es, en Σ*f'* y tal, que *h'f'*=*hf* y también *hg*=*h*Σ, quedando con ello Σ*a'* y Σ*f'*, completamente simétricas para con la recta ΣO su eje de simetría; con ello deducimos la simetría del punto de sombra *f'* para con *a'*, y así obtenido este último, de momento puédese determinar el segundo. Del propio modo, cuando la recta normal *ab* tome la posición de *a'b'*, entonces su simétrica *gf*

tomará también la posición simétrica $f''g'$ en el nuevo sitio de parada, encontrando con ello un punto de sombra f'' simétrico al obtenido más antes en a''.

Finalmente, teniendo en cuenta ahora que cualquiera que sea la normal que se escoja sobre la curva inicial A, así como su simétrica, todas en sus nuevas posiciones han de pasar por Σ, quedando allí también simétricas para con respecto al radio OΣ perpendicular al rayo luminoso, fueron estas propiedades bastantes para que Mangiagalli enunciara el siguiente teorema:

181. Cuando la sección de base de un helizoide es simétrica, para con respecto á una recta que pase por el punto O, la proyección horizontal de la línea divisoria de luz y sombra es simétrica, para con respecto á la recta que pasando por el centro O, sea perpendicular á la proyección horizontal del rayo luminoso.

182. Pongamos pues en práctica las propiedades que se desprenden del teorema de Mangiagalli, en el helizoide representado en la fig. 169, el cual tiene por curva meridiana ABCD, sinuosoide que se proyecta en el plano vertical A'O, y teniendo en cuenta en dicha superficie las distintas hélices que parten de los puntos de la indicada sinuosoide, cuando esta línea describe la superficie girando, y ascendiendo en movimiento helizoidal. Sabido es que todas estas hélices se proyectarán horizontalmente según circunferencias concéntricas, por estar situadas sobre cilindros circulares. Si tomamos ahora en consideración los puntos en donde todas estas hélices cortan al plano horizontal, cuales puntos son los representados verticalmente en A, 1, 2, 3, 4..... etc.; así como ellos, proyectados horizontalmente en sus respectivas circunferencias, darán la curva *A'bcde*, cual no será otra que la traza horizontal de la superficie, cuya, es la que hemos denominado sección de base. Sea pues, ahora el rayo luminoso R^v, R^h, proponiéndonos con esta dirección, determinar puntos de la línea de sombra de la mentada superficie.

Mas ante todo se hace preciso describir desde el centro O el epiciclo HH'G', con el auxilio de su radio, que calcularemos del modo como hemos indicado anteriormente, fijando en seguida el polo Σ, por medio del diámetro perpendicular á la proyección horizontal del rayo luminoso.

Mediante estos precedentes, escójase un punto cualquiera de la sección de base, el *e*, conduciendo por él la normal *e*H á la sección de base *.

En virtud de lo expuesto, se hace girar la sección de base junto con esta normal, hasta tanto que esta última recta logre pasar por el polo Σ, y será cuando el punto H, describiendo un arco circular, llegará un momento que pasará por Σ y entonces G, pasará á G'; viniendo la normal inicial HG*e* á tomar la posición ΣG'φ, encontrándose φ en la misma circunferencia descrita por *e*; el punto φ será pues un punto de la sombra, y como sabemos por otra parte, en cual hélice está colocado, no habrá más que trasportarlo en φ', en proyección vertical, valiéndonos de una simple proyectante. De este punto φ, puede deducirse ahora aprovechándonos del teorema de Mangiagalli, el punto simétrico φ_1, así como también su proyección vertical.

De igual modo, cuando sea G el punto que al moverse la sección de base pase por Σ, en este caso, H pasará por H', la recta GH irá á colocarse en ΣH' y la totalidad de ella H*e*,

---

* Mas para eso, convendrá conocer de antemano la tangente á la curva en el punto *e*. Esta tangente, como es sabido, quedará determinada por la traza horizontal del plano tangente á la superficie. Pero este plano queda conocido por medio de dos tangentes á la superficie en el citado punto. Estas dos tangentes pueden ser la correspondiente á la hélice, y la otra á la sinuosoide, mas como estas dos tangentes cortan al plano horizontal en un mismo punto *e*, no basta éste, para determinar dicha traza, y será preciso recurrir á un nuevo plano de proyección horizontal tal como indica el M'N', conducido á una altura determinada por una relación exacta con el paso, (aquí la cuarta parte de éste). De este modo, la traza horizontal de la tangente á la hélice, será el punto *t*, situado en la proyección horizontal *et* de la tangente á la hélice, y á una distancia *et*, igual á la rectificación de la cuarta parte de la circunferencia correspondiente á la proyección horizontal de dicha hélice. En cuanto á la tangente de la sinuosoide, en el punto *e*-2, se podrá encontrar su traza del siguiente modo: haciendo mover el punto 2 sobre su hélice correspondiente hasta que vaya á situarse en el punto 2' de la meridiana, y allí considerar la tangente á ésta, buscando la traza t'' sobre un plano horizontal más bajo del nivel MN, de la cuarta parte del paso; tomando luego la proyección horizontal t''-$2''$ de dicha tangente, y suponiendo por último que dicha sección meridiana y su tangente giran helizoidalmente, hasta que el punto 2' se coloque en 2, ó sea en *e*, en proyección horizontal, entonces claro es que habiendo tomado en consideración el plano auxiliar M'N', simétrico de MN, bastará tomar la distancia $2''t''$ y colocarlo en *et'*; *t'* será con ello la traza horizontal de la tangente á la sinuosoide; referida dicha traza, lo propio que la *t* en el plano auxiliar M'N'; así pues la recta *tt'* es la traza horizontal del plano tangente, referido en el plano de proyección M'N', deduciéndose finalmente, que trazando por *e* la recta *e*T paralela á la *tt'*, esta *e*T será la tangente en cuestión; de modo, que conduciendo por *e*, la *e*H perpendicular á *e*T aquella será la normal pedida.

será en la nueva posición la H'ψ; ψ será pues el punto en donde se coloque ahora e, y por lo tanto, un punto de sombra y de él deducir inmediatamente su simétrico ψ', así como sus correspondientes proyecciones verticales de ambos, insiguiendo las indicaciones hechas últimamente.

Resta tan sólo exponer brevemente el método que de lo expuesto se deduce, para encontrar la sombra arrojada del helizoide sobre el plano horizontal, que aquí es sección de base, cuyo procedimiento puede emplearse no atendiendo para nada al plano vertical de proyección, y sea por ejemplo, proponemos determinar la sombra que arrojan los puntos a' y a'' de la (fig. 168), y para ello, fijándonos en el a', él está relacionado con el polo Σ, mediante Σa', que sabemos es horizontal, por lo que su sombra será igual y paralela á la misma, partiendo de un punto ω, situado sobre la recta Σδ, que hemos llamado directriz y en donde se apoya el epiciclo, en su movimiento de rodadura. Este punto ω, está separado de Σ, de una cantidad igual á la rectificación del arco Σb de dicho epiciclo. Y así debe ser, en atención, á que cuando el punto a se haya colocado en el a', en el movimiento de rodadura, el círculo del epiciclo habrá descrito un camino circular, medido por el arco que media desde b á Σ, y así el punto b ha venido á pasar por Σ.

Mediante estas consideraciones, hagámonos cargo ahora del movimiento helizoidal que tiene lugar en el espacio, y como hemos visto en su lugar, que se consideraba para los efectos de la sombra arrojada, que el epiciclo, rodaba alrededor de su centro, permaneciendo siempre tangente á la directriz Σδ, y que así el arco Σb, se irá extendiendo sobre la directriz, en Σω y por lo tanto Σb=Σω; si pues trazamos por ω la ωα, paralela á la Σa', é igual á esta última se tendrá finalmente con α la sombra arrojada de a'.

Del propio modo encontraremos la sombra que arroja el otro punto a'', tomando sobre la directriz la distancia Σγ, igual al arco rectificado Σbd del epiciclo, y luego, conduciendo por γ la recta γφ igual y paralela á la ΣG'', entonces el punto φ será el pedido.

En el caso, en que la normal ab vienen á ser tangente al epiciclo, entonces los puntos α y φ de la sombra arrojada quedarían confundidos en uno solo.

183. La serpentina.—Es la serpentina una superficie helizoidal engendrada por una esfera, impulsada por un movimiento helizoidal, y cuyo centro de dicha esfera recorre todos los puntos de una hélice. Esta definición ya indica de por sí que semejante superficie, entrará á formar parte, y eso exclusivamente, en la agrupación de las superficies conocidas con el nombre de envolventes, siendo aquí la esfera móvil *la envuelta*, mientras que la envolvente será la superficie helizoidal de que tratamos, y por fin serán *características* los círculos máximos de la esfera, cuyos planos sean respectivamente perpendiculares á la hélice directriz. Y así será; porque en dos posiciones infinitamente próximas de la esfera, podrá siempre considerarse que se cortan según un círculo máximo; y así, la tal superficie podrá también conceptuarse engendrada por el movimiento de un círculo máximo de dicha esfera, cuyo plano permaneciendo siempre normal á la hélice directriz, su centro recorra todos los puntos de dicha curva. De aquí se deduce otra definición de la superficie de que se trata; esta es: **el lugar geométrico de las intersecciones de las esferas sucesivas en dos posiciones infinitamente próximas, cuando al moverse recorra su centro todos los puntos de la hélice directriz.**

184. Sea (lám. 29, fig. 170) la hélice directriz la ABCD, etcétera, A'B'C'D', etc., supongamos que la esfera de centro G_o-G y de radio $G_o\alpha'$ se mueve recorriendo todos los puntos de dicha hélice, entonces bastará trazar con el radio indicado $G_o\alpha'$ una serie de circunferencias por cada uno de los puntos de dicha hélice, y eso, tanto en la proyección horizontal como en la vertical; ellas, representarán el contorno aparente de las esferas *(envueltas)*, y así, trazando las líneas tangentes á dichos contornos aparentes, nos darán el contorno aparente de la superficie. En el plano horizontal, este contorno aparente lo formarán dos circunferencias concéntricas de radios respectivos Od, Od_1, iguales á las distancias que median entre el eje O y los puntos más separado y próximo del ecuador horizontal de la esfera móvil.

En cuanto al contorno del plano vertical lo constituirán dos curvas tangentes á los mencionados contornos aparentes de las envueltas, encontrándose dichas curvas equidistantes de la sinuosoide proyección vertical de la hélice directriz; así es, que este contorno aparente podrá también formarse, tra-

zando por cada uno de los puntos de la sinuosoide la normal á la misma, tomando sobre ella hacia la parte superior é inferior una distancia igual al radio de la esfera móvil; así es evidente que dicha línea de contorno aparente, viene á ser como una evoluta de la sinuosoide. Empleándose este último procedimiento para el trazado de dicho contorno aparente, convendrá colocar muy próximos los puntos escogidos en la sinuosoide por los que han de pasar dichas normales, y esto con mayor motivo en los puntos límites A', A", E', E", etc., de mayor vuelo de dicha sinuosoide, todo eso con motivo de cambiar bruscamente la dirección de dicho contorno en las inmediaciones de semejantes puntos, pues allí aparecen puntos de retroceso análogos á los que se representa en mayor escala en la fig. 170'. En ellos hay lo notable que tiene lugar el pasaje de las ramas reales á las virtuales; así del punto *t* á δ' el contorno aparente será real y visto; el trecho que media desde δ' á δ" entre los dos retrocesos será puramente virtual, desde *t* hasta δ" la curva será real pero oculta; y finalmente, la rama *t*S prolongación de la últimamente mentada será real y vista.

Aparece muy fácil la representación de las características de esta superficie envolvente, toda vez que siendo círculos iguales, cuyos planos, por ser normales á una hélice circular, han de venir forzosamente inclinados del mismo ángulo para con respecto al plano de proyección horizontal. Semejante circunstancia hará que los círculos máximos que representen esas características, vengan proyectados horizontalmente según elipses todas iguales, y por lo tanto, conocida que sea una de ellas, podrán inferirse inmediatamente todas las demás. Así por ejemplo partamos del punto G_0-G situado sobre la sinuosoide. En él, la tangente á la sinuosoide es paralela al plano vertical, y por consecuencia el plano normal á la hélice ó sea el de la característica se encontrará perpendicular al plano vertical de proyección, proyectándose dicha curva según la recta α'β' normal á la sinuosoide. Semejante propiedad facilita inmediatamente la curva característica en proyección horizontal, resultando ser ésta una elipse de ejes conocidos, cuales son el 1-2 igual al diámetro de la esfera, y el otro el menor αβ proyección de α'β' sobre la tangente en G á la hélice media.

Ahora, toda otra característica que quisiéramos representar en el plano horizontal, se hallaría rápidamente, como por ejemplo la que pasa por el punto F, pues no habría más que suponer que el radio OG gira para colocarse junto con su esfera en OF, reproduciendo en torno de dicho radio una elipse igual á la que hemos demarcado en 1α2β. También aparece fácil la representación de esas características en el plano vertical, teniendo para ello en consideración que sea cualquiera la posición que se escoja (como no sean las principales correspondientes á G ó á C), siempre estas elipses se proyectarán verticalmente según otras elipses, cuyas serán tales que tendrán dos diámetros conjugados, que serán proyecciones verticales respectivas de los ejes que han servido para trazar las elipses de la proyección horizontal. Insiguiendo este procedimiento es como podremos obtener la característica que más nos plazca. Ya hemos dicho que con el auxilio de estas características se engendraba también la superficie, así es, que cada uno de los puntos de ella al moverse describirá su correspondiente hélice.

Queriendo ahora determinar la sombra de la serpentina, circunscribiéndonos estrictamente á sus especialísimas propiedades, quedará reducida la cuestión á echar mano de dos soluciones, la una que tendrá por objeto la determinación del punto de sombra situado sobre una característica de la superficie, mientras que la otra lo motivará el querer hallar este mismo punto de sombra sobre una hélice determinada de la serpentina; y en ambas soluciones, la construcción aparece expédita como vamos á ver inmediatamente.

185. Punto de sombra sobre una característica. (Figura 170').—Supongamos que la característica que se escoja, sea la que corresponde á la esfera ó envuelta de centro ω-ω' y que sea $R^v R^h$ el rayo luminoso. Ante todo coloquemos esta característica en situación más ventajosa para poder operar con ella, y á este efecto movamos la esfera, en donde aquélla está colocada hasta que su centro ω-ω' descienda sobre la hélice hasta colocarse en O'-O"; en semejante estado ya sabemos por lo dicho anteriormente, que dicha característica vendrá proyectada según la recta O'*g* normal á la hélice, toda vez que aquí estará contenida en un plano perpendicular al de proyección vertical. Mas como quiera que, dicha esfera ha de continuar relacionada con el rayo luminoso R^v-R^h, será preciso que este rayo luminoso gire de la misma cantidad angular, colocándose así en la direc-

ción R'^{v}-R'^{h}. Si concebimos ahora un cilindro tangente á la esfera á lo largo de esta característica, será evidente que todo plano tangente al cilindro lo será igualmente á la esfera, y de tal modo, que la generatriz que sea de contacto con dicho cilindro vendrá un momento que cortará á la característica, y entonces claro se deduce, que dicho punto será él de tangencia de la esfera con el plano. La cuestión, pues, queda reducida á trazar un plano tangente al cilindro, con la condición de ser paralelo á la dirección de la luz. Nótese bien que el cilindro auxiliar de que tratamos, se halla dispuesto paralelo al plano vertical. Con este motivo, tómese un punto b^{v}-b^{h} sobre el eje b^{h} O‴ del cilindro, conduciendo por él una recta paralela al rayo R'^{v}-R'^{h}, esta recta corta en el punto $c^{v}c^{h}$ al plano de base del cilindro ó sea al que concierne al de la característica. Si unimos este punto de traza con el O‴, es evidente que la recta que así obtengamos nos dará una dirección paralela á las trazas de los planos tangentes mencionados sobre el plano de la base del cilindro; conduzcamos pues estas tangentes en dicha dirección, mas para hacerlo con conocimiento de causa, giremos el plano $c^{v}g$ alrededor de la charnela O′ hasta que quede rebatido sobre el ecuador AB; con semejante movimiento el punto de traza viene en *c′*-*c″*, mientras que la característica vendrá confundida con el círculo de centro O‴; unamos ahora *c″* con O‴, trazando en seguida tangentes á la circunferencia ecuatorial paralelas á la *c″*O‴; así nos darán los puntos de tangencia *e*-*e′*, *d*-*d′*, obtenidos ya éstos, desagamos el giro mentado y entonces irán á colocarse en *e″*-*e‴*, *d″*-*d‴*: serán ya los puntos de sombra y restará tan sólo colocarlos á la posición que les corresponda en el espacio. Muévase pues otra vez la esfera, moviéndose el centro O″O′ sobre la hélice, pero ahora subiendo hacia la izquierda ascendiendo hasta colocarse en ω-ω̄′, los puntos citados describirán como es natural, hélices del mismo paso proyectadas horizontalmente según círculos concéntricos; el radio principal O″O se colocará en Oω, mientras que los puntos de sombra se fijarán en e^{IV}, d^{IV} guardando la misma posición relativa con el eje Oω, que la que tenían *e‴d‴* para con respecto al eje OO‴. Para con respecto á la proyección vertical, obsérvese que el plano horizonlal AB pasará á situarse en A′B′, y para con respecto á él, los puntos de que tratamos habrán permanecido constantemente á la misma altura; así, pues, trácense por e^{IV}, d^{IV} las proyectantes verticales, tomando sobre ellas y á partir del plano horizontal A′B′ las alturas á que están situados los puntos *e″*, *d″* con relación al ecuador AB, y de ese modo se lograrán los puntos de sombra definitivos en d^{v} e^{v}.

Repitiendo análogas operaciones se obtendrán nuevos puntos.

186. Mas si queremos aun hacer sobresalir más las propiedades de que goza esta superficie, puédese facilitar la solución observando que siendo la envuelta tangente á la envolvente á lo largo de la característica el punto de sombra ha de encontrarse en esta última, además si se encuentra la sombra de la esfera no hay duda ninguna tampoco que el punto de sombra que se busca ha de encontrarse précisamente en un punto de la divisoria de la sombra propia de la esfera, luego infiérese de aquí que dicho punto por precisión vendrá dado al cortarse los dos círculos máximos, cuales son el uno, el de la característica y el otro, el de la línea de sombra de la esfera, ahora bien, sabemos que los planos de las características están igualmente inclinados con respecto al plano horizontal, viniendo con ello á proyectarse horizontalmente según elipses iguales todas las características; sucediendo lo propio con los planos de las líneas divisorias de luz y sombra de dichas esferas, cuales curvas se proyectan también según elipses iguales en el plano horizontal. Tamañas circunstancias son bastantes para que podamos llevar rápidamente las operaciones, y á este efecto reproduzcamos lo que hicimos en el párrafo número 144 al tratar de la superficie tórica; á este efecto y fijándonos en el plano horizontal, movamos todas las envueltas de manera que sus centros ABC... etc., fig. 170 recorran los caminos que indican los radios AO, BO, CO..., etc., hasta que vengan á coincidir dichos centros en el punto O y en este caso, dichas esferas se confundirán en una sola central sobre la cual haremos todas las operaciones, esta es la esfera que se llama esfera *tipo*. Obsérvese bien que por lo que se refiere á la línea divisoria de luz y sombra de dichas esferas, todas ellas al confundirse en una sola, se confundirán también semejantes líneas y así esta línea divisoria vendrá expresada en *h″gh″*, más no así sucederá con las características que aunque iguales, vendrán distintamente colocadas atención hecha á lo variado de la orientación que afectan, según están colocadas, dentro del anillo, formado por la proyección hori-

zontal de la serpentina; más no obsta para que puedan dibujarse prontamente, pues se concibe perfectamente, que si cortamos una de estas elipses por medio de un patrón, éste podrá servir para dibujarlas á todas, con tal que se coloque de modo que su centro coincida con el O, dándole al mismo tiempo la orientación indicada por los radios OA, OB, OG... etcétera. Resta no más ahora combinar la elipse de sombra con cada una de estas características determinando sus respectivos puntos de intersección; así, combinando la elipse de sombra con la que ha provenido de la traslación correspondiente á la de centro G encontraremos los puntos *g*, *g*, cuales al trasladarse la esfera por medio del camino rectilíneo *o*G en G, irán á colocarse en g_1, g_1, cuyos proyectados verticalmente vienen en *g'*, *g'*. Lo mismo si escogemos la característica que provenga de la esfera B, la cual proporcionará al cortarse con la línea divisoria de la esfera los puntos *b"b"*, quienes trasladados á su lugar vendrán en *b*, *b*, y ellos proyectados verticalmente en *b'b'*. Así operaríamos con todas las demás esferas, advirtiendo solamente que ya una vez encontrados todos estos puntos de sombra en la proyección horizontal, se podrán de ellos deducir sus respectivas proyecciones verticales, mediante la consideración de que estando situados sobre una esfera se hallarán sobre paralelos de la misma, cuyos son facilísimos el trazarlos sobre cada una de las respectivas esferas, tanto en proyección horizontal como en la vertical.

187. Puntos notables de la curva son: 1.° Los que obedecen al contorno aparente del plano horizontal, los *h*, h_1, d_1, *d* en donde las tangentes á dicho contorno aparente son paralelas al rayo luminoso y á 45° (pues el rayo luminoso se ha tomado en esta dirección), semejantes puntos se encontrarán en el plano vertical, proyectándolos sobre las horizontales trazadas por H', D' proyecciones respectivas de H, D. 2.° Los puntos situados sobre el contorno aparente de la serpentina sobre el plano vertical y que obedecen por lo tanto á planos tangentes de la superficie, paralelos al rayo luminoso y perpendiculares al plano vertical; y con eso basta para inferir que se encontrarán directamente trazando todos los rayos luminosos posibles tangentes á dicho contorno, tal como indica la figura de referencia. 3.° Los puntos límites φ y ψ en los cuales el rayo luminoso resulta ser tangente á la

línea divisoria de luz y sombra en los cuales (139) se verifica un doble contacto, originando retroceso en la sombra arrojada, por la cual y por medio de contraproyecciones se deducirán los originarios.

188. Finalmente, no dejaremos de notar para la brevedad de las operaciones, que al trasladar las esferas de centros A, B, C... etc., para que se confundan con la esfera tipo, de centro O, no será necesario trasladarlas todas, pues con hacerlo con la mitad de su número bastará, dependiendo semejante hecho en que dos á dos tienen las características igual orientación, y así trasladada la A podremos dar como hecho trasladada la E, así como trasladada la H se encontrará tambien trasladada la D y así dos á dos todas las demás.

189. Acabamos de ver, pues, como los puntos de sombra vienen deducidos por las intersecciones sucesivas de cada línea de sombra de una esfera, con la correspondiente característica situada sobre esta misma esfera; sin embargo, como las dos elipses de la proyección horizontal que representan dichas curvas, se cortan ordinariamente según ángulos bastante agudos, y eso precisa un gran cuidado en el trazado de semejantes curvas, para que sus cruces sean exactamente los mismos puntos que han de representar, cabe ahora, si á tal rigorismo quiere llevarse la exactitud, á precisar aun más dichos puntos y así dar lugar á rectificaciones, admitido el caso que ellas convengan, y á este efecto pasemos á la figura 170ª en donde tenemos una esfera de centro O_1^h-O_1^v, R^v-R^h, los puntos que buscamos, habiéndose de encontrar en los círculos máximos correspondientes á la sombra y á la característica, situarán como es evidente en la recta diametral, intersección de los planos de aquellos círculos, dándonos así precisos dichos puntos en los extremos de este diámetro, encontremos, pues, estos planos. Desde luego determínese la elipse de sombra de dicha esfera, dicha línea es la señalada en la figura de su referencia; fijemos en su plano una recta cualquiera, como por ejemplo, el diámetro $O_1^v z'$ que une el punto más alto y más bajo de la misma, la traza horizontal de semejante recta es el punto *z*, así es que si por dicha traza se conduce la otra recta H^p que sea paralela al diámetro horizontal 1-2, ella será la traza horizontal del plano de la elipse de sombra. Pasemos ahora al plano de la característica; á

este efecto conduzcamos por el centro O_1^v la recta $O_1^v y'$-$O_1^h y$ que forme con el plano horizontal el mismo ángulo de inclinación de los planos de las características, cuyo ángulo lo conocemos inmediatamente por el que proporcionan una de las características principales, como por ejemplo, la *kl* de la figura 170^{II}. En este estado, búsquese la traza *y* de la recta $O'^v y'$, haciendo luego girar esta recta en torno del eje vertical O_1^h y claro es que nos engendrará un cono recto, cuyos planos tangentes, cada uno de ellos, tendrá su respectivo paralelo, á una de las características de la serpentina de que se trata.

Supongamos ahora que se trata de determinar los puntos de sombra de la esfera de centro △ de la figura 170″ en la que el diámetro horizontal de la característica es la recta MN, es evidente ahora que el plano de esta curva tendrá por traza horizontal una recta paralela á la MN; en su virtud supóngase que la esfera △ se traslade en la de centro O_1^h de la figura 170‴, y entonces resultará evidente que conduciendo una tangente H^q á la base circular del cono de que antes hemos hecho mención, cual tangente sea paralela al diámetro MN de la figura 170″, esta H^q representará la traza horizontal de la característica. Mas ahora las trazas horizontales de los planos P, Q se cortan en *x*-*x*′, y ello es bastante para indicarnos que la recta $z'O_1^h$-zO_1^v será la intersección de dichos dos planos; y como quiera que esta recta corta en φ-φ′, ψ-ψ′ á la característica, semejantes puntos serán los de sombra que buscamos. Trasládese finalmente la esfera con dichos puntos á su verdadera posición △ que les corresponda, y así se obtendrán los puntos precisados, habiendo de coincidir si las operaciones están bien afectadas con los que más antes se habían encontrado por el sistema de los cruces elípticos.

190. Puntos de sombra situados sobre una hélice determinada.—En la fig. 170″ tomamos en consideración una envuelta principal, esto es, la esfera de centro O″-O_1, y en ella la característica *kl*; sobre esta característica nos fijamos en un punto *n*, por el cual pasa una hélice de la serpentina, y sobre esta hélice nos proponemos encontrar el punto de sombra. Búsquese ante todo la proyección horizontal de este punto, la cual fácilmente encontraremos hechando mano del paralelo *tu* de la esfera, y que pase por el punto *n*; este paralelo se proyecta horizontalmente según un círculo, y en él se

va ahora á proyectar horizontalmente el mencionado punto en *n*′, si trazamos ahora una circunferencia cuyo radio sea la distancia desde O′ á *n*′, ella será la proyección horizontal de la hélice en cuestión. Resulta evidente ya, que la normal O″*n*-$O_1 n'$ á la esfera, lo es también á la serpentina, continuando esta recta cumpliendo el mismo requisito en todas las posiciones que ocupe la esfera al emprender el movimiento helizoidal, cuando engendra así la serpentina. Lo propio así sucederá con el plano tangente en el punto *n*-*n*′, pues él en todas sus posiciones guardará la misma inclinación para con respecto al plano horizontal; si pues llegamos á encontrar entre todas estas posiciones, una que sea paralela al rayo luminoso, será evidente que el plano tangente en dicho punto cumplirá los requisitos necesarios para que en la tangencia nos dé el punto de sombra. Es fácil resolver semejante cuestión, y para hacerlo más claro, daremos por supuesto que nuestra esfera principal sea trasladada en la fig. 170‴, siendo el centro O_1^v-O_1^h, el paralelo *tu*, y el punto como antes *n*-*n*′; con arreglo á la dirección del rayo luminoso, encuéntrese la línea divisoria de luz y sombra propia de la esfera; semejante curva elíptica es la que está expresada en 1-S′S-2 en proyección horizontal, mientras que en proyección vertical, es la otra elipse que también se representa. La primera ó la de la proyección horizontal, viene ahora cortada en los puntos S′, S por el círculo representación del paralelo que pasa por el punto *n*, lo cual nos indica, que trazando las normales á la esfera por dichos puntos, cuales son las F, G, ellas serán precisamente perpendiculares al respectivo plano tangente en S, S′, cuyos planos son con evidencia paralelos al rayo luminoso, toda vez que obedecen á puntos de tangencia pertenecientes á la línea de sombra.

Mediante estos precedentes, volvamos á la fig. 170″, en ella fijémonos otra vez en la normal $O_1 n'$ y hagamos girar la esfera principal con todo su sistema de líneas hasta ocupar la posición que le corresponde en el espacio. Para facilitar este giro, conduzcamos por O una perpendicular O*p* á la mentada normal; ésta al girar lo hará de tal modo, que se conservará siempre tangente (en proyección horizontal) al círculo de radio O*p*, llegando un momento en el cual tomará la posición paralela á la normal F de la fig. 170‴; habrá llegado ya en situación de cumplir con las condiciones impuestas por el problema, pues al cortar en *r* á la hélice descrita por el punto *n*′ proporcionará el punto de sombra que se deseaba.

Mas obsérvese por otra parte, que de momento puédese encontrar con esa misma recta otro punto, cual es el ρ, y es que al proyectar el punto *n* en *n'*, se hubiera podido también proyectar en ν situado sobre el mismo paralelo, por cuyo último punto pasa también su correspondiente hélice de radio Oν, y como quiera que la normal $O_1\nu$ se encuentra simétricamente colocada que la F' para con respecto al eje de simetría OO_1, claro es que será igualmente tangente al círculo *qpp'* que regula el giro, y por lo mismo vendrá un momento que se confundirá con la *pr*, dándonos así su encuentro con la hélice que le corresponda en el punto que hemos denominado ρ.

Pero aún hay más; dichas dos normales pueden continuar el movimiento de giro hasta ser paralelas á la dirección de la normal G de la fig. 170‴, colocándose con semejante movimiento en la disposición G' la cual corta en *m* y μ á las dos hélices de que hemos hecho mención, ellos serán también otros dos puntos más de la línea de sombra. Las proyecciones verticales de semejantes puntos se encuentran inmediatamente, en efecto, para el punto *m* por ejemplo; hágase pasar por él el plano vertical O*m* que contiene al eje, este plano corta en Σ-Σ' á la hélice directriz: es el punto centro de una envuelta, en ella es donde sitúa este punto, trácese en esta esfera el plano diametral XY y sobre él á partir de β' y sobre la proyectante que proviene de *m*, tómese la distancia $\beta'm'$ igual á la altura $n\beta$ relativa á la figura auxiliar 170‴. Este punto *m'* es el que buscamos. Para los otros se procederá de un modo análogo.

191 Otros muchos puntos podríamos encontrar acudiendo á la propiedad que tiene la proyección horizontal de la línea divisoria de luz y sombra de la serpentina, cual es, la de ser simétrica para con respecto á la recta ZZ que pasa por el centro O y es perpendicular al rayo luminoso R^h todo en virtud de lo dicho en el párrafo n.° 173, ya que aquí queda cumplida la condición de ser la meridiana de la serpentina, simétrica con relación á una recta perpendicular al eje.

Valiéndonos también de semejante método es como podríamos determinar el contorno aparente sobre el plano vertical.

Sombra arrojada.—También se encuentra dicha sombra fijando bien la atención sobre la índole especial que reunen las condiciones geométricas de esta superficie, en primer lugar si encontramos la sombra arrojada de la hélice directriz (fig. 170), sobre el plano horizontal se encontrará para ella (n.° 46) una cicloide $A_1B_1C_1$... ., etc., y como quiera que la envuelta al engendrar la superficie, su centro recorre todos los puntos de la hélice, claro está que las sombras arrojadas de dichas esferas serán elipses iguales, cuyos centros de sombra situarán sobre esta cicloide, mediante esta sencilla consideración determinemos aparte figura 170^{IV}, y con la debida exactitud, la elipse de sombra arrojada de dicha esfera, córtesela por medio de un patrón, colocándola en seguida de modo que su centro coincida con cada uno de los puntos de la cicloide de modo que su eje mayor coincida en dirección con la que llevan los radios R^h que aquí es la dirección de 45°, dibujando luego la curva envolvente de todas estas elipses, la línea que así obtendremos será el límite de la sombra arrojada, siendo evidente que cuanto mayor sea el número de estas elipses dibujadas, más verdad obtendremos en el contorno de la sombra.

Al colocar estos patrones en los puntos F_1,$H_1$$V_2$., etc. que corresponden al lado de la cicloide aparecerán los puntos de retroceso φ_1,ψ_1, cuales tendrán por originarios los φ y ψ cuales son de pasaje, límites en los cuales se verifica un doble contacto, hay osculación con el plano tangente á los rayos luminosos por los motivos expuestos en el número 139. He aquí porque la proyección vertical φ', ψ' de estos puntos es dable encontrarlos fácilmente empleando el sistema de contra proyección oblicua, por medio de los φ_1,ψ_1 desde los cuales partan rayos de sombra.

192 En cuanto á lo que se refiera á las sombras sobrepuestas, se reconoce en seguida examinando la rama de curva φ_1S_1 referente á la sombra arrojada en el plano horizontal, que los rayos luminosos que son tangentes á la superficie á lo largo de la línea divisoria interior, dan la sombra sobrepuesta φS-φ_1S_1, cuyo punto de partida es el φ-φ', mientras que el punto de quebranto S_1 contraproyectado por medio de un rayo SS', sobre la línea de separación exterior proporcionará el punto de perdida en donde el rayo luminoso será tangente á dicha línea. Con dos ó tres puntos intermedios que se encuentren entre los mentados, se obtendrá la sombra sobrepuesta con bastante exactitud, También fijando la atención

sobre la rama de curva arrojada é inmergida en P_1Q_1 podremos deducir que ello es causa de una sombra PQ-P'Q' sobrepuesta sobre la misma superficie y hacia la línea divisoria exterior, señalando con ello á la vez los puntos de perdida P_1Q_1, los puntos originarios encontrados en P-P', y QQ' deducidos por medio de contraproyecciones oblicuas.

HELIZOIDES REGLADOS

192. Helizoides desarrollables—Dos hay solamente, de esta naturaleza, el uno propio denominado *Helizoide desarrollable*, y el otro el conocido por *cono helizoidal*.

El primero constituye, el lugar geométrico, de todas las tangentes á una hélice y del cual hemos hecho algún recuerdo en los párrafos 105 y 107; allí hemos visto y conforme sabíamos por la Geometría Descriptiva, que este helizoide, venía cortado por el plano horizontal, (plano perpendicular al eje del cilindro, plano que hemos denominado de base), en una envolvente, del círculo de base, cuyo punto de origen será aquél en que la hélice, era cortada por dicho plano. Más de emplear otro plano paralelo á este último, también él nos da una sección á la superficie, con idénticas condiciones; así es que establece por deducción la G-D, que *todos los planos perpendiculares al eje del cilindro, cortan al helizoide desarrollable, según envolventes del círculo*, de base del *cilindro, en donde sitúa la hélice directriz, que es á la vez arista de retroceso.*

De aquí resulta, que si se comunica un movimiento, á una de estas curvas envolventes, de modo que su plano conservándose siempre perpendicular al eje, ascienda ó descienda de modo que el punto de origen de dicha envolvente, recorra todos los puntos de la hélice, entonces ella irá engendrando, el mismo helizoide, obtenido antes, por el movimiento de la tangente de la arista de retroceso.

La envolvente ahora, ó la sección de base, nos va á auxiliar para encontrar prontamente las líneas divisorias de luz y sombra. En primer lugar, tratándose de una hélice circular, como arista de retroceso de un helizoide desarrollable, aquella será tal, que todas las tangentes á dicha curva, que no son otra cosa que las generatrices de la desarrollable, estarán igualmente inclinadas, con respecto al plano de base

ó sea aquí, el de proyección horizontal, además los planos tangentes al helizoide, lo serán á la largo de aquellas generatrices, mientras que las trazas horizontales de dichos planos que las contienen pasarán por las trazas horizontales de las generatrices correspondientes, siendo á la vez tangentes á la envolvente de base, efectuándose el encuentro de cada traza, con la respectiva generatriz, según un ángulo recto, luego infiérese de aquí, que los planos estarán todos igualmente inclinados al horizonte, pudiéndose considerar, cada generatriz como á línea de máxima pendiente, de su respectivo plano tangente.

De lo dicho resulta, que si escogemos un punto exterior V-V' (Lám. 30, pág. 171) y trazamos por él una recta *V'a'-Va* inclinada con respecto al plano horizontal del mismo ángulo, del que forman las generatrices de la desarrollable, con el referido plano y hacemos luego girar esta recta alrededor de la vertical que pasa por el punto V, engendraremos un cono de revolución, cuyos planos tangentes serán paralelos á los que se hayan trazado en la desarrollable, será pues cono director de la superficie dada y formará parte de la agrupación de las conocidas de *igual pendiente*; podremos pues, resolver la cuestión como allí. Todo queda reducido á encontrar las líneas de separación de luz y sombra para con respecto á la superficie cónica, á este efecto trácese por V-V' un rayo luminoso, su traza horizontal está en t^h, las tangentes á la base circular dirigidas desde el punto t^h, son $t^h c'$, $t^h b'$ cuales nos proporcionan ya desde luego las generatrices *Vc'-V'c*, *Vb'-V'b*. Búscanse ahora las que siendo generatrices de la desarrollable sean paralelas á estas dos rectas, Lo conseguiremos conduciendo las rectas A'A'', B'B'' tangentes á la traza de la desarrollable y respectivamente paralelas á las $c't^h$, $b't^h$; y así tanto la AA', como la BB'' representarán trazas horizontales de planos tangentes á la superficie y paralelos al rayo luminoso, puesto que ellos á su vez son paralelos á los dos tangentes conducidos poco ha á la superficie cónica.

Sabemos ahora por las propiedades de la superficie, que sus generatrices son tangentes á la línea de retroceso, trácense, pues, partiendo de los puntos de tangencia A'', B'', últimamente encontrados dos tangentes á la circunferencia que es proyección horizontal de dicha línea, y ellas nos proporcionarán las generatrices *de'-d'e*, *g'*B''-*g*B_1, respectivamente paralelas á las dos generatrices consabidas del cono, y sien-

do ya en definitiva las líneas de separación de luz y sombra propia; en cuanto á la primera, veremos muy en breve que va á quedar parásita y por lo tanto su construcción bajo este punto de vista es inútil.

Si bien observamos, será preciso ir con mucho cuidado al trazar tangentes á la envolvente, paralelas á las $c't^h$, $b't^h$ toda vez que la envolvente admite otra tangente en la misma dirección de AA', cual es la que tendría el punto de tangencia en A_2 y en él la generatriz que trazáramos, ya no sería paralela á la Vc'-$V'c$, pues precisamente vendría en dirección contraria, lo cual se descubre inmediatamente comparando la dirección de estas dos rectas al partir de los puntos de traza A'', A_2 para con respecto á la dirección de Vc' partiendo del punto de traza c'; en una palabra y más claro, las proyecciones horizontal y vertical de la generatriz que resulte de contacto en la desarrollable, han de ser paralelas á las proyecciones homónimas de la generatriz correspondiente del cono director. Lo mismo argüiríamos para con respecto al punto de tangencia B_2, producido por una tangente á la envolvente paralela á BB'.

194. Sombras arrojadas.—Desde luego se comprende que la que concierna al plano horizontal de proyección, quedará concretada á la figura, ó contorno que se obtenga en dicho plano, por la sección del mismo con los cilindros paralelos á los rayos luminosos, cuyas directrices sean las tres hélices de la superficie, cuales son, la límite de la hoja inferior CDEFG, la límite de la hoja superior HI*g*JK, las dos proyectadas horizontalmente en el mismo círculo de radio *o*D' y finalmente la hélice de retroceso que se proyecta horizontalmente en el círculo de radio O*f*. Sabemos por otra parte (núm. 46), que las sombras arrojadas de estas hélices, serán cicloides alargadas ó peraltadas las dos primeras, puesto que el ángulo del rayo luminoso con el plano horizontal, es mayor que el que forman con el propio plano las tangentes de las dos hélices límites de las dos hojas, mientras que la cicloide arrojada por la arista de retroceso, será rebajada ó reducida porque en ésta, el rayo luminoso forma con el plano horizontal, un ángulo menor que el que forma la tangente á dicha hélice, y con ello pasaremos á construirlas, insiguiendo todo lo dicho en el número 46, y reproduciendo todas las observaciones y detalles vistos en aquel particular estudio, y en-

contraremos la curva C'MNαhUPQ... etc., para la sombra arrojada de la hélice CDEF... etc.; la H'RSMUVX... etc., para la sombra arrojada de la hélice HI*g*J*e*... etc. de la hoja superior; y la YSZ*hij*, para la sombra arrojada de la hélice de retroceso Y'*mnpqr*... etc., y el contorno curvilíneo envolvente de estas tres curvas será la sombra arrojada de la superficie. Por él podremos pasar á descubrir por medio de las sombras que quedan parásitas en el plano horizontal, cuales son aquellas que les correspondan, sobrepuestas en la misma superficie. También será necesario combinar dichas sombras con los trechos rectilíneos que arrojan las generatrices divisorias de luz y sombra.

Así, si nos fijamos en la hélice que parte del punto C-C' esta en el trecho CDE el rayo luminoso que sobre ella se ha apoyado, no habiendo encontrado ningún obstáculo, ha podido llegar al plano horizontal, produciendo su sombra arrojada C'*u*M, más al llegar al punto E-E', el rayo luminoso nos da por traza horizontal el punto M y él nos indica que dicho rayo luminoso, además de pasar por E, lo hace también por E'', sobre la hélice límite de la hoja superior. Además, fijándonos en el plano horizontal, vemos que toda la parte de cicloide MS, sombra de la hélice superior, está sumergida en la masa de sombra, y por lo tanto, de ello podremos concluir, que todo el trecho de hélice E''*g*S_1 (S_1 es el punto originario del arrojado S, por el cual pasa un rayo de sombra que se apoya también por *s* sobre la hélice de retroceso), caerá arrojado sobre la hoja inferior, siendo la curva E$\varphi' n$-E'$\varphi n'$, esta sombra arrojada, de la cual, E'-E', es el punto de partida. Para encontrar un punto intermedio tal como φ-φ' procederemos del siguiente modo: Escójase una generatriz cualquiera, la $\gamma\beta$-$\gamma'\beta'$, por ejemplo, y propongamos encontrar el punto de sombra arrojada situado sobre dicha recta, y para ello búsquese ante todo la sombra arrojada $\gamma\mu$ de esta generatriz, ella, una vez encontrada, cortará á la cicloide concerniente á la sombra arrojada de la hélice superior, en el punto φ'', indicando este solo hecho, que si hacemos partir del punto de traza φ'', un rayo de sombra, éste cortará en φ' á la generatriz escogida, apoyándose á la vez en φ''' sobre la hélice directriz, luego φ' es sombra arrojada de φ'''; lo mismo encontraríamos los demás puntos hasta llegar el rayo luminoso á apoyarse en el punto *g*-*g'*, en el cual, continuando el movimiento el rayo de sombra resbala á lo largo de la generatriz divisoria de luz y sombra

gB_1-$g'B''$ describiendo un plano de sombra, el cual corta á la hoja superior según la curva *nmh-n'm'h'*, cuya, termina en *h-h'*, pues á partir de este punto, el rayo continua resbalando por la prolongación de esta generatriz misma, pero pasando ya á interesar en el trecho correspondiente á la hoja inferior en *h'*B'', así es que, parte de esta sombra cae arrojada en el plano horizontal según el trecho de la traza del plano tangente, entre el punto B'' y δ', correspondiendo el punto δ' al original δ; más en δ', en donde dicha traza corta á la traza de la superficie Yδ'H' de la hoja superior, el resto de la generatriz original δ*h'* caerá arrojada sobre la hoja superior antedicha, produciendo así la línea arrojada que empieza en δ' y concluye en el mismo punto *h h'*, curva de muy ligera curvatura y oculta tanto en el plano de proyección vertical como en el horizontal, un punto de ella se obtendría, escogiendo una generatriz cualquiera intermedia entre *h'* y δ' y proponiéndonos encontrar el punto precisamente situado sobre dicha generatriz. El procedimiento es fácil é igual á tantos otros casos análogos empleados hasta aquí; búsquese la sombra arrojada de dicha generatriz, obtenida que sea, ella cortará á la traza B''δ' en un punto por el cual haciendo pasar un rayo de sombra, él irá á cortar á la generatriz escogida, siendo el punto de intersección, el de la sombra que buscamos, cuyo originario estará en otro punto de la línea de contacto *h'*B''. Estas construcciones no constan en la figura, por no sobrecargarla demasiado de líneas, y evitar confusión con la aglomeración de líneas en un espacio tan reducido.

Obsérvese ahora que á partir del punto *f*, la generatriz de contacto *fd*, perteneciente á la hoja inferior del helizoide, que se encuentra debajo del plano horizontal (no confundirla con la *d'e* que se proyecta, según hemos visto, con la misma *fd* en el plano horizontal perteneciente á la misma hoja, pero á la altura del paso), pasa en *fe'* á formar parte de la hoja superior, apareciendo en el plano horizontal por el punto *i*, el cual es traza de la misma, quedando con ello limitada en la porción *ie'*, cuya proyección vertical es *i'e''*. Esta porción de generatriz *ie'* siendo línea divisoria de luz y sombra, arrojará ésta en el plano horizontal según la *i*R, puesto que *i* es sombra de sí mismo y R lo es de *e'-e''*, por el cual se ha conducido el rayo de sombra cuya traza horizontal es el mentado punto R.

Mas á partir del punto *e'-e''* el rayo de sombra resbala por

el trecho de hélice *e'*H', *e''*H, describiendo el cilindro de sombra, cuyo corta al plano horizontal en la curva R*x*H', sombra arrojada de aquélla.

Sin embargo, en el punto *y* se inmerge en la sombra general quedando parásita la porción *y*H', y es á causa que en dicho punto *y*, aparece la curva *y*S, arrojada por la hélice que media entre *y'-y''* y S_1-S_2, quedando también inmergido el trecho de la misma curva en R*zy*.

Semejante hecho significa que la curva originaria de la R*zy* cae sobrepuesta en la misma superficie, produciendo así la sombra arrojada *e'z'y'''-e''z''y*$^{\text{IV}}$, haciendo con ello que la línea *e'y'''* quede línea divisoria de luz y sombra para arrojarse según la que más antes hemos indicado en R*xy*.

Un punto intermedio *z z''* de esta curva se encontrará, proponiéndonos encontrarlo en una generatriz escogida, por ejemplo, en 1-2, 1'-2', buscando la sombra de ésta en 1''-2' y combinándola con la curva R*zy* y su punto de intersección *z* será tal, que contraproyectándolo por medio de un rayo de sombra en *z'-z''* sobre la generatriz escogida, proporcionará finalmente el que queríamos.

Pero volviendo á la posición del rayo luminoso, cuando lo hemos dejado pasando por el punto E-E', podremos ver fácilmente que emprenderá el camino recorriendo en la hélice superior el trecho E''U'', dando con ello la sombra arrojada en la curva MU; pero el rayo de sombra que parte de U se apoya en U'' sobre la hélice límite de la hoja superior, al paso que también se apoya en U''' sobre la hélice límite de la hoja inferior, motivando ello que el rayo de sombra abandone la directriz primera E''U'' y emprenda el camino recorriendo la curva U'''Q', en cuyo caso produce la curva arrojada UQ.

Mas por otra parte, en el punto U, la hélice límite de la hoja inferior, se interna su sombra en la masa general de la arrojada en UN, así como también hace lo mismo en la línea UV la hélice límite de la hoja superior, estas dos últimas líneas, según ello, son parásitas en el plano horizontal, indicando que hasta allí no llegan por oponerse al paso de los rayos de sombra el mismo cuerpo de la superficie, la cual las recibirá sobrepuestas; y así es efectivamente, pues la UN viene á ser substituída por la sobrepuesta U''h_1N'', que cae arrojada sobre la hoja superior é inferior, sufriendo en el punto h_1 un retroceso, pues dicha curva; parte de ella la h_1U'' cae sobre la hoja superior, y la h_1N'' sobre la hoja inferior.

La originaria de dicha curva es el trecho de hélice $U'''N_1$. El medio de encontrar puntos de esta curva es el mismo que los practicados poco ha en otras curvas análogas; esto es, por medio de la sombra de las generatrices intermedias buscan su sombra, y combinándola con la de la hélice originaria.

En cuanto á la rama inmergida en UV, ésta queda completamente parásita sin ninguna otra que la substituya sobrepuesta, á causa de que su original $V''JU''$, queda completamente cubierta por los rayos de sombra que pasan por las aristas superiores.

Pero V es un punto múltiplo en el plano horizontal, y por él parte un rayo de sombra que se apoyará en dos puntos de una misma hélice, esto es, el V'' y luego el V''', por lo tanto nos encontraremos aquí en las mismas circunstancias que hemos visto al principio con la sombra $yxRz$; así la línea Vx_1X será la sombra arrojada del trecho de hélice $V''e$ al llegar el rayo de sombra en el punto e, emprende dos caminos, el uno á lo largo de la generatriz de tangencia ed' y ésta produce la sombra arrojada rectilínea $X\mu$ paralela á la $R\delta'$ y el otro, por el trecho de hélice $e\psi V'''$, el cilindro de sombra así engendrado, no llega á cortar al plano horizontal, quedando así sobre éste dicha sombra parásita, pero que en cambio queda antes sobrepuesta sobre la parte cóncava de la hoja superior, mediante la curva arrojada $e\psi' V''$, reproducción, si se quiere, de la encontrada más antes en la misma hoja pero considerarla más inferior, cual curva era la $e''z''y^{IV}$.

Lo dicho basta ya para comprender el resto de las sombras que han de completar el problema, toda vez que ahora las operaciones son todas análogas, reproduciéndose todas ellas para la continuación de las dos hojas en los pasos distintos de hélices que se consideren.

195. Hemos hecho depender, las construcciones hechas para encontrar la línea de sombra; del cono director de la desarrollable, habiéndolo preferido á la construcción indicada en el párrafo n.° 109 cuando allí empleábamos dos cilindros paralelos á los rayos de sombra; todo con el objeto, de ser ahora más expeditas las consideraciones á que se prestan, al considerar las distintas inclinaciones del rayo luminoso.

En efecto, en el caso que acabamos de analizar, el ángulo que forma el rayo luminoso, con el plano horizontal, es menor que el que forman con el propio plano las generatrices de la desarrollable, y eso ha motivado poderse trazar dos tangentes á la base del cono director, cuales tangentes, han originado dos líneas de contacto ó de separación de luz y sombra en dicho cono, y por lo tanto, dos generatrices análogas en la desarrollable; pero si los ángulos á que aludimos fuesen iguales, entonces existiría no más una sola generatriz como línea divisoria de luz y sombra, distinguiéndose este caso, en que la curva, producida por la intersección del plano horizontal, con el cilindro auxiliar de sombra (del párrafo 109) cuya directriz es la línea de retroceso, vendrá acusando un punto de retroceso, en el cual la tangente á las dos ramas del retroceso, será también tangente á la envolvente del círculo de base; caso muy notable, que determinara inmediatamente la traza precisa de la generatriz única de sombra, y por lo mismo, el plano tangente que la corresponda. Analicemos, pues, á parte este curioso caso.

En la lám. 12, fig. 101. El círculo de centro O es la base del cilindro, que contiene la hélice directriz; esta hélice cortará á todas las generatrices del cilindro bajo un ángulo constante α. Las tangentes á esta hélice, verdaderas generatrices de la desarrollable, se proyectarán en el plano de la base según las tangentes del círculo O, en bg, le, cj... etc.; éstas vendrán cortadas según lo dicho por una serie de puntos, a, g, f, j,... etc., que unidos nos darán una envolvente del círculo O, teniendo el origen en a en donde el plano de base corta á la hélice.

Demos por supuesto ahora que el rayo luminoso, sea paralelo á una de las generatrices últimamente expresadas, y que sea R su proyección sobre el plano de base; con ello será evidente, que este rayo, en el espacio, formará con el plano de base un ángulo β, complementario de α. Desde el momento que sabemos ahora el límite en proyección horizontal de las generatrices, cual es la circunferencia, á la cual son tangentes y la traza $agfj$..., etc., y ya que partimos del supuesto que el rayo ha de ser paralelo á una de ellas, la línea divisoria de luz y sombra quedará completamente definida, trazando paralelamente al rayo R, la tangente lf al círculo O, y ella será la que resuelva la cuestión Mas de preferir adoptar la solución del n.° 109, se adoptará la envolvente $agfj$... etc., como á base de un cilindro, teniendo sus generatrices paralelas al rayo de luz, así como considerar á la hélice directriz, como directriz también de un cilindro paralelo á los rayos

luminosos. Este último, vendrá cortado por el plano de base, según una curva Δ; y finalmente, la tangente común á la envolvente *agfj*... etc., y á la curva Δ nos dará la traza del plano tangente, á la superficie helizoidal, dándonos con la generatriz de contacto, la línea divisoria de luz y sombra.

Pasemos, pues, á la determinación de la curva Δ, á este efecto, escójase un punto cualquiera *b* sobre la hélice del espacio, construyendo por él la generatriz *bg*, la cual corta en *g* á la envolvente, es la traza, pues, de la generatriz; trácese ahora por *b* una paralela al rayo luminoso, y haciendo centro en *b* con el radio *bg*, trácese un arco circular, que cortará en *h* á la *bk*, este punto *h* será la traza del rayo R, que pasa por *b* (lo será, pues, aquí en la hipótesis de que partimos, generatriz y rayo luminoso, formando un mismo ángulo con el plano de base, y partiendo de un mismo punto, formarán las generatrices de un cono de revolución cuya traza ó base será la circunferencia *gh*).

Mas si prolongamos el rayo R hacia la parte opuesta, vendrá á cortar en *c* á la citada circunferencia, á partir del cual, podrá trazársela una tangente *cj*, será otra generatriz de la superficie, cuya corta á la envolvente en *j*, luego *j*, es su traza sobre el plano de base; por lo tanto, haciendo centro en *c* con el radio *cj*, trácese un arco de círculo hasta que llegue á cortar en *i*, á la *bk*, este punto *i* será pues la traza del rayo luminoso que parte del punto *c* (téngase en cuenta que si bien su proyección horizontal se confunden, son completamente distintos en el espacio, los rayos que pasan por los puntos *b* y *c*).

De ésto, inferimos, que se pueden considerar dos agrupaciones de rayos luminosos; naturalmente, teniendo todos la misma dirección, y recorriendo todos los puntos de la hélice del retroceso; unos serán tales que sus trazas, sobre el plano de base, serán como el punto *h* interiores á la envolvente, mientras que las de la segunda agrupación, sus trazas serán exteriores tal como *i*, luego, claro es, que entre estas dos series de puntos, existirá uno por el cual se hará el pasaje de la parte interior á la exterior; este punto es el *f*, traza de la generatriz *le* confundida con un rayo luminoso, en cuyo punto tiene lugar un retroceso en la traza *hfi* del cilindro luminoso que se apoya sobre nuestra hélice; en este punto *f*, hay pues una tangente común á las dos curvas de traza, y además ellas son entre sí tangentes.

La recta *if*, es la línea de separación de luz y sombra, y aquí en este caso especial, se encuentra inmediatamente sin necesidad de recurrir á la curva Δ, y ella por si sola determina el punto *f*, de contacto común á las dos curvas. Es también evidente que dicha curva Δ, no aparecerá en ella ningún retroceso, mientras no exista una generatriz de la superficie desarrollable, paralela al rayo luminoso.

Finalmente, cuando la recta que representa el rayo de sombra, forma con el plano horizontal, un ángulo mayor que el que forman con el propio plano, las generatrices de la desarrollable, entonces según vimos en el n.° 93 no podrán trazarse las tangentes á la base del cono director, pues el punto de traza del rayo de sombra que pasa por el vértice del cono, cae en el interior de su base y en este caso, claro es que no existirán líneas propias de sombra sobre la superficie desarrollable, ésta quedará superiormente toda iluminada, como no fueran las líneas de sombra que se arroja sobre sí mismo la propia superficie *.

---

* La superficie del helizoide desarrollable, es de bastante uso en las aplicaciones de la mecánica, y uno de los principales ejemplos que pueden recordarse, es cuando constituye el filete del llamado tornillo ó rosca de Arquímedes, formando con ello un aparato ó máquina para los agotamientos.

Se compone de un cilindro, que sirve de alma y eje del aparato, por lo general este cilindro es de madera, y lleva incisa una ranura en forma de hélice á todo lo largo de dicho eje; ésta es precisamente la hélice de retroceso, de la superficie desarrollable que ahora vamos á colocar, fijándola en dicha hélice. Para eso, córtense una serie de discos circulares anulares, en hojas de palastro cuyo radio interior ρ, del círculo, sea el que corresponda á la circunferencia en que se desarrolla la hélice del retroceso, mientras que el radio ρ' de la circunferencia exterior, sea igual también al radio que resulte en la circunferencia, que es transformada de dicha hélice, cuando el cilindro donde está situada, se someta al desarrollo.

Colócase luego esta serie de discos planos, de modo que forzándolos, entren por su canto en las ranuras helizoidales practicadas, y unos á continuación de otros, y entonces ellos naturalmente van adquiriendo la forma del helizoide desarrollable, formando en su conjunto el filete del tornillo de Arquímedes. Además, un cilindro de palastro ó madera, encierra todo este helizoide, fijándole en él, por medio de hierros de ángulo con tornillos que van contorneando toda la línea helizoidal de mayor radio, girando así todo el helizoide, al girar este cilindro que lo encierra. El aparato se coloca inclinado al horizonte, al querer operar con él, haciendo luego girar el cilindro alrededor de su eje.

Al imprimir, pues, al eje un movimiento de rotación, el agua se eleva por esta pared helizoidal, viniendo á descargar de una manera continua por la boca superior. Este aparato, va provisto por la parte superior de una manivela, que sirve para ponerle en movimiento. Como su posición inclinada embaraza la maniobra, se la

196. Conoide helizoide.—Es este helizoide, reglado y alabeado, utilizándolo para las hojas del tornillo de filete triangular, el cual constituye uno de tantos organismos den-

hace girar por medio de una manecilla llamada *muleta*, á cuya extremidad, aplican su fuerza los peones.

Véanse las figs. 171'. La inclinación del eje del tornillo con el horizonte, puede variar de 30° á 45°, funcionando el aparato, en las mejores condiciones, cuando el nivel del agua se eleva algo sobre el centro de la circunferencia de la base del alma, sin que por otra parte, quede inmergida completamente dicha base.

Las dimensiones, datos y resultados ordinarios, suelen ser de unos 4 á 5 metros de longitud. El diámetro exterior 0'49m. El número de vueltas por minuto, unas 40. La altura de elevación de agua 3'30m. Cantidad de agua elevada, por hora, unos 45 m. c.

El radio ρ puede calcularse fácilmente, á este efecto hallemos la longitud de una espira completa de esta hélice. Al efecto observemos que cada uno de sus elementos, infinitamente pequeños, tiene una misma inclinación α, para con respecto al plano horizontal que sirve de base á la hélice, así es que llamando L la longitud correspondiente á la hélice del espacio, esta misma longitud proyectada sobre el plano de base será: L cos α; más como este elemento proyectado ó sea la hélice proyectada, viene á ser la circunferencia de base del cilindro, ó bien $2\pi r$, se tendrá que podremos establecer la igualdad L cos $\alpha = 2\pi r$ ó bien $L = \frac{2\pi r}{\cos\alpha}$ (1).

Sea ahora fig. 171''', $A_1 B_1 C_1$ ... esta circunferencia de radio ρ incógnita.

La hélice comprendida en un solo paso AE, da desarrollada el sector $A_1 E_1$ de la circunferencia de ρ.

Designemos ahora por ω, el ángulo central comprendido entre los radios extremos O_1A_1, O_1E_1, y como hemos llamado L, la longitud, que ahora consideramos en todo un paso, tendremos:

$$L = \rho\,\omega \quad (2)$$

Mas de otra parte, tengamos en cuenta, que si hubiéramos desarrollado, el correspondiente cono director fig. 171 IV de la superficie, hubiera dado por resultado, otro sector de círculo del mismo ángulo ω, pudiendo establecer para dicho cono director la siguiente igualdad:

$$\omega \times S\,a = 2\pi \times a\,I$$

$$\omega = 2\pi \times \frac{a\,I}{a\,S} = 2\pi \times \cos.\ \alpha$$

igualemos ahora los segundos miembros de las igualdades (1) y (2) y será:

$$\omega\rho = \frac{2\pi r}{\cos.\ \alpha}$$

sustituyendo en este el valor de ω, dará por resultado:

$$\rho = \frac{r}{\cos.^2 \alpha} \quad (3).$$

Este radio puede ahora construirse fácilmente, fig. 171", para eso tómese KT=r trazando la KP inclinada al ángulo α, lo cual dará KT = KP, cos. α, ó bien:

$$KP = \frac{r}{\cos.\ \alpha}.$$

tro de una máquina; para producir grandes presiones (figura 172, lám. 31). El conoide helizoide tiene grandes é importantes aplicaciones, no solamente en la mecánica, sino que también en la arquitectura, así las juntas normales de la bóveda de San Gil son superficies de este género, también lo son las juntas continuas de los puentes oblicuos, aparejados por el sistema helizoidal; igualmente constituyen semejante superficie las generatrices de intradós, que en su lugar geométrico forman los intradós de las bóvedas de las escaleras llamadas vulgarmente de caracol... etc , si bien que en estos últimos casos el helizoide es de plano director, diferenciándose del que ahora nos ocupamos, en el cual la superficie directora es un cono recto.

Estudiaremos pues en detalle la sombra, sobre la superficie del conoide helizoide, siendo después fácil y breve aplicarla á la del tornillo de filete triangular, á la par que en la primera recordaremos de paso alguna de sus propiedades más principales que interesan sobremanera á la resolución del problema de la sombra.

El conoide helizoide de que tratamos (lám. 31, fig. 172') está engendrado por el movimiento de una recta BO-B'V, resbalando por la hélice circular A'BCD-AB'C'D'A"... etc., y por la recta vertical O-AC", eje de la misma; y al mismo

Trácese en seguida PS, perpendicular sobre KP, y podremos establecer $KS = \frac{KP}{\cos.\ \alpha}$, y también de ella, $KS = \frac{r}{\cos.^2 \alpha} = \rho$.

Ahora podremos ya desarrollar inmediatamente, el helizoide con las siguientes breves y fáciles operaciones:

1.° Trácese la circunferencia (fig. 171''') que tendrá el radio igual á ρ.

2.° Trácensele las tangentes, cuyas representarán, la disposición que toman en este desarrollo, las correspondientes generatrices.

3.° Queriendo limitar al helizoide, por una hélice exterior como así sucede en el tornillo de Arquímedes, cuya hélice exterior está sobre un cilindro, concéntrico con el del alma, y de un radio R, por ejemplo, entonces puede construirse la (fig. 171"), midiendo directamente, sobre la generatriz paralela al plano vertical, la magnitud constante que se quiera tengan ellas, y ésta colocada en el desarrollo á partir del punto de tangencia, proporcionará en el punto extremo, unido con el centro O_1, el radio ρ' de la circunferencia, desarrollo de la mencionada hélice exterior.

El tornillo de Arquímedes, lo describe ampliamente Vitruvio, quien explicó el modo de construirle, así como sus distintos usos.

Sin embargo de atribuirse la invención de tan ingenioso aparejo al renombrado geómetra griego, parece que ya muy anteriormente era usado por los egipcios, que de ella se valían con gran ventaja y excelentes resultados, para el desviamiento y agotamiento de los terrenos que inundaba periódicamente el caudaloso Nilo.

tiempo en todas sus posiciones forma con dicho eje un ángulo constante

Por lo tanto, esta definición vale tanto como decir, que la recta generatriz al moverse y apoyarse sobre las indicadas hélice y su eje, permanece siempre paralela á alguna de las generatrices de un cono recto director.

Se concibe ahora que el trazado de generatrices de esta superficie, tanto en el plano vertical como en el plano horizontal, se presenta muy fácil, toda vez que en proyección horizontal serán rectas A'O, BO, CO... etc., todas concurrentes al centro O, proyección horizontal del eje; mientras que en el plano de proyección vertical, la facilitará la diferencia constante de nivel que exista entre los puntos extremos; y así debe ser por la misma definición, ya que habiendo de formar un ángulo constante con el eje vertical, ó si se quiere con el plano horizontal, resultará de aquí, que en todas las posiciones que adquiera la generatriz OB, B'V, conservará siempre su misma magnitud comprendida entre las dos directrices curvilínea la una, y rectilínea la otra. Así, si queremos dibujar verticalmente la que pasa por el punto E.-E', escogido en la hélice, bastará hacernos cargo de la diferencia de nivel 2-V, que media entre los puntos extremos B' y V de una generatriz paralela al plano vertical (ya que en esta disposición puede trazarse formando con el eje el mismo ángulo impuesto por el dato); colocando esta distancia en altura, á partir del punto 1 (por donde pasa el plano horizontal trazado á la altura de E) sobre el eje, en 1-5, entonces el punto 5 será el que, unido con E, dará la generatriz 5-E.

La marcha y regularidad de las operaciones conducirá para el mejor trazado de dichas generatrices, á dividir la base de la hélice en un número de partes iguales, dividiendo luego en el mismo número de partes iguales, el intervalo comprendido en el eje vertical entre los dos puntos V, V', en donde es cortado el eje por dos posiciones de la generatriz B'V, B"V', paralela al plano vertical, separadas de la altura de un paso de la hélice; y luego unir los puntos de división de la hélice con los correspondientes últimamente indicados en el trecho de eje VV', reproduciendo luego estas operaciones para los restantes pasos.

Que la superficie así producida es alabeada no ofrece ninguna duda, toda vez que dos generatrices que se consideren si bien se cortan en O, en proyección horizontal, dejan de

hacerlo en el plano vertical, por tener precisión de cortar al eje á distintas alturas cada una de dichas generatrices.

Si consideramos un punto cualquiera *a-a'* sobre una generatriz BO, este punto lo propio que el B, al girar la generatriz, lo hará permaneciendo siempre á igual distancia del eje de giro, así como también sobre el cilindro recto circular *a'*F, cuyo radio es aquella distancia. Además, en el movimiento de ascenso ó traslación se elevará de las mismas cantidades que lo haga el propio punto B, (pues éste y el otro extremo V así lo hacen, elevándose uno y otro y al mismo tiempo de las cantidades 1 2, 2-3, 3-4... etc.

Así, pues, tenemos que cuando B' se eleva de una cierta cantidad, una altura 2-3 por ejemplo, para con respecto al plano horizontal B'-2; el punto *a* se habrá elevado de la misma cantidad para con respecto al plano horizontal *at"*, y así como el primero habrá hecho el recorrido girando para trasladarse en B_1, el *a'* lo hará colocándose en a_1, esto es, colocado siempre sobre el cilindro concéntrico con el de radio OB, y describiendo la misma cantidad angular.

Ahora bien, las distintas alturas A-1, 1-2, 1-3... etc., son por el dato respectivamente proporcionales con los arcos BB_1 B_1 C, CI... etc.; más estos últimos lo son también con los $a'a_1$, a_1C_2, C_2I_2... etc., que ha recorrido el punto *a-a'*; luego resulta que los arcos descritos por el punto *a-a'* son respectivamente proporcionales con las alturas en donde sucesivamente ha ido trasladándose, y por lo tanto se infiere de aquí que el camino recorrido por el punto *a* es una hélice concéntrica á la directriz del conoide, y además de igual paso que ella. Semejante propiedad es bastante para dejar sentado que:

Todo cilindro, concéntrico con el de la hélice directriz, cortará al helizoide según una hélice de la misma dirección y paso que la mentada hélice directriz.

197. El contorno aparente sobre el plano vertical queda determinado por la intersección sucesiva de las generatrices en sus proyecciones verticales, dando lugar con ello á un polígono *jj'j"j'"*, polígono que se convertirá en una curva envolvente de las intersecciones de dichas rectas en proyección, si ellas se trazan en tan gran número, de modo que aquellos puntos de corte se multipliquen sin interrupción. Dicha curva concluirá por ser tangente en *j'"* á la proyección del eje, así

como tendrá por asíntota á la generatriz OB, paralela al plano vertical. Y así se comprende que suceda toda vez que á medida que las generatrices van haciendo el recorrido en todas sus posiciones, pasando por los puntos B', B'_1, G', C' de directriz, ellas en proyección vertical van encontrando al eje en ángulos cada vez menores, hasta llegar á la generatriz de perfil que pasa por C', en cuyo caso el ángulo se ha reducido á cero, y en esta posición le corresponde el punto j''' como á extremo superior de la misma insiguiendo ella la misma ley de alturas que las demás que la precedan. Resulta de ello que en sus encuentros han de formar la línea curva $jj'j''j'''$, cuya convexidad se halla hacia al eje; al paso que considerándola hacia la parte inferior, ó sea B', su inclinación para con respecto al eje es la máxima, encontrándose dicha generatriz B'V en un plano paralelo vertical, cual plano resultando ser asintótico de dicha generatriz en su proyección, la curva envolvente $jj'j''j'''$ la tendrá por asíntota, esto es, será tangente á ella al infinito, siendo pues el último punto real el j_1, en donde una de las generatrices restantes sea tangente á la sinuosoide proyección de la hélice directriz, en cuyo punto dicha generatriz se confundirá sensiblemente con la mencionada envolvente $j_1jj'j''j'''$.

198. Todo plano P, perpendicular al eje, corta al conoide helizoide según una espiral de Arquímedes.

En efecto, sea (fig. 172") O el punto en donde la hélice directriz corta al plano P, tomando al mismo tiempo la dirección del radio aOX para eje polar. Ahora concibamos una generatriz cualquiera AB, siendo su traza sobre dicho plano el punto T, el cual pertenecerá ya á la curva y que ahora probaremos ser una espiral.

Para eso, en virtud de los elementos coordenados de que partimos las coordenadas, las llamaremos la una ρ (radio polar) y ω, (el ángulo al centro, que mide el camino recorrido por el punto en cuestión para con respecto al eje fijo aOX), así tendremos

$$\rho = a\mathrm{T}, \quad \omega = \mathrm{X}a\mathrm{T}.$$

Más examinando la fig. 172" se infiere que

$$\rho = ab + b\mathrm{T} = \mathrm{R} + \mathrm{B}b \text{ cotg. } \beta, \quad \text{pero como } \mathrm{B}b = \frac{\mathrm{H}}{2\pi}\,\omega$$

se tendrá

$\rho = \mathrm{R} + \dfrac{\mathrm{H} \text{ cotg. } \beta}{2\pi}\,\omega$, cual visiblemente es la ecuación de una espiral de Arquímedes. Para abreviar haremos $\dfrac{\mathrm{H} \text{ cotg. } \beta}{2\pi} = p$, y entonces la ecuación será $\rho = \mathrm{R} + p\omega$.

La cantidad p es lo que conoceremos por parámetro de la espiral.

Establezcamos ahora las dos definiciones siguientes:

199. Paso total de una hélice ó sea H, la altura á que asciende, ó baja un punto (situado sobre el cilindro en donde sitúa la hélice) después de haber girado de una revolución completa, esto es, la recorrida de 360° ó sea 2π, ó si se quiere también por un camino igual á 2πR recorrido por el pie de la generatriz que contiene el punto en cuestión.

200. Paso unitario ó reducido, ó sea, h; la altura á que asciende el punto por un camino angular igual á la unidad, esto es, 2π veces más pequeño que 2π, ó bien 360° : H :: 1 : h, de la cual se infiere $h = \dfrac{\mathrm{H}}{360°} = \dfrac{\mathrm{H}}{2\pi}$ (1).

De esta expresión inferimos que si h es la altura á que el punto asciende en un camino angular igual á 1; para otro ángulo igual á ω la altura h' será $h' = h\omega$.

El paso unitario se substituye ahora en la expresión de parámetro p encontrado poco ha, al objeto de facilitar y hacer más breve la aplicación del mismo, y así será

$$p = h \text{ colg. } \beta. \quad (2).$$

201. Para hacer más construible el valor de h, observaremos en virtud de la igualdad (1), que la altura ó paso total H corresponde á un camino angular 2πR, recorrido sobre la base; luego para un camino R, tomado sobre dicha base le corresponderá una altura $\dfrac{\mathrm{H}}{2\pi}$, valor que antes hemos encontrado igual á h, paso unitario; por lo tanto, si imaginamos desarrollado el cilindro que contiene la hélice, y en donde ella se desarrolla en línea recta; y tomamos á partir del órigen una abscisa igual á R, levantando en su extremo una ordenada, ésta, junto con la mentada abscisa y el trecho de recta que corresponde á la hélice desarrollada; formarán un triángulo

rectángulo, cuyos catetos serán R y h, y la hipotenusa dicho trecho de hélice, suponiendo ahora que α es el ángulo que forma la hélice con el plano horizontal; se inferirá de este triángulo la igualdad $h = \text{R tang. } \alpha$ (3).

Podremos pues con ello construir h, y obtenido que sea construir p, de la igualdad (2).

Mediante semejantes antecedentes pasemos á la determinación de la sombra en la superficie de que se trata, siendo R^v-R^h el rayo luminoso.

202. 1.° **Procedimiento general.**—Es el que sirve para todas las superficies alabeadas, reducido ha hacer pasar un plano paralelo á R^v-R^h, por cada generatriz escogida, será ya un plano tangente, bastará solamente encontrar el punto de contacto; encontrando la intersección del mismo con las demás generatrices; así obtendríamos uniendo todos los puntos de intersección, una curva C, que cortaría en un punto x, á la generatriz G, escogida. Este procedimiento, es en general defectuoso en extremo, pues á parte de proporcionar los puntos, con mucha indecisión, por los cruces de líneas en ángulos sumamente agudos, ocurre las más de las veces, que dichas líneas van á encontrarse á distancias inaccesibles y fuera del plano donde se opera. Queda en su virtud desechado por improcedente.

203. 2.° **Método de inducción.**—Consiste en analizar, las propiedades geométricas que ligan á varios planos tangentes, conducidos por los diferentes puntos de una misma generatriz. y ellas una vez averiguadas, hacer que tengan lugar conduciéndolas de una manera inversa, esto es así como, en su origen partíamos del principio de conocer los puntos de contacto, y por ellos hacíamos pasar los planos tangentes; ahora por la inversa se nos proporcionará el plano ó planos tangentes y será menester ir á deducir los puntos de tangencia.

Empecemos tomando en consideración, una generatriz cualquiera, la que por ejemplo, pasa por el punto G G′ tracemos ahora el plano tangente, que contengan á dicha generatriz, y cuyo punto de tangencia sea el punto G G′; y empleando la línea de tierra en la recta T‴-2, todo con objeto de reducir las operaciones á más estrechos y cómodos límites.

Ya sabemos que para determinar este plano tangente, se

ha de combinar la generatriz GO-G′F′, con la tangente G′T‴ á la hélice, ahora bien las trazas horizontales, de estas dos rectas, son la una en τ-τ_1 y la otra en el punto T″ encontrada según sabemos, tomando, sobre la tangente en G, al círculo de base la distancia GT″, igual á la rectificación del arco BG toda vez que el punto B es ahora el origen, en virtud de la línea de traza elegida en T‴-2. Así pues T″τ será la traza horizontal del plano tangente, en G G′.

Consideremos ahora otro punto en dicha generatriz; tal como el F-F′, y en él determinemos también el plano tangente. Por dicho punto es evidente, que pasará una hélice (n.° 196) será la que, se proyecta horizontalmente según la circunferencia de radio OF, ésta por ser concéntrica y del mismo paso que la de la directriz, tendrá por origen el punto a-a', á una altura igual, á la horizontal que pasa por el punto a-a' en donde la circunferencia Fa', corta á la generatriz inicial OB. Si ahora insiguiendo lo hecho anteriormente tomamos como á línea de tierra la at'', que pasa por el punto a, de arranque, entonces encontraremos ser la traza de la generatriz, el punto τ''-τ', mientras que la traza correspondiente á la tangente á la segunda hélice en el punto F, será t', habiendo colocado para ello, la abscisa curvilínea Fa' rectificada en Ft'; y con ello tendremos que uniendo τ' con t' tendremos con ello en $\tau' t'$, la traza horizontal del plano tangente en el punto nuevamente escogido en F-F′.

Ahora, la traza de este plano, referido en el plano primitivo de origen cual era T‴-2, será evidente la recta τt, conducida por τ, paralelamente á la encontrada en $\tau' t'$.

Obsérvese ahora, que si escogiéramos aún otro y otros puntos sobre la misma generatriz, repitiendo análogas operaciones, siempre tendría lugar, que GB, a'F... etc., se encontrarán en la misma relación, que sus radios OG, OF... etc., resultando de aquí que igual relación subsistirá con las τ′T″, Ft'... etc., que podemos considerar como abscisas, y las GO, FO... etc., que podemos igualmente tomar como ordenadas, resultando de aquí, que existiendo entre unas y otras, una relación constante, todos los pies de las tangentes, trazadas en G, F... etc., estarán situados en una misma recta cual es la T″t'O-T‴t'', y esto tanto en proyección horizontal como la vertical, en virtud de que las alturas, de los puntos situados en la generatriz B′V, guardan una relación constante con las respectivas abscisas contadas sobre su proyección hori-

zontal BO, y como quiera que éstas últimas están también en una relación constante con las T″O, t′O... etc., de aquí se infiere, que éstas últimas están de igual modo en relación constante con las alturas de los puntos proyectados horizontalmente en T″, t′... etc.

Y para más claridad, y comparando los datos de la figura en cuestión, pueden establecerse las siguientes analogías $\frac{V\text{-}2}{a'\text{-}2}=\frac{VB'}{aB'}=\frac{BO}{Ba'}=\frac{OG}{GF}=\frac{OT''}{T''t'}$, de ellas resulta que la igualdad de la primera y última relaciones, indican que las ordenadas verticales de los puntos O-V, y t′t″, son proporcionales con las abscisas contadas, á partir del punto T″-T‴, luego los tres puntos O V, t′-t″, T-T‴ han de situar en líneas rectas. *

* Se desprende de esta singular propiedad, que todas las tangentes, á las hélices concéntricas, en los puntos de una misma generatriz GO-G′F′, se apoyan sobre dos rectas, fijas de posición tales como GO-G′F′ y OT″-VT‴, y siendo todas estas tangentes paralelas á un mismo plano, cual es, el vertical que se levanta sobre la traza GT″, de aquí resulta, que forman en su conjunto un paraboloide hiperbólico cuyo plano director del primer sistema, es el vertical antedicho.

Este paraboloide, será pues de acuerdo con el conoide, á lo largo de la generatriz GO-G′F′, pues tienen las dos superficies, los mismos planos tangentes, sobre todos los puntos de la citada generatriz.

En cuanto al plano director del segundo sistema, es evidente que será paralelo á las dos directrices T″O-T‴V, GO-G′F′, así es que si escogemos el mismo punto V, para que por él pasen, dos rectas paralelas á aquellas la una será la misma T‴V, y la otra la VG″, que será tal, que cortará al plano de arranque T‴-2, en un punto G″, cuya proyección horizontal será el mismo G que antes (pues todos los puntos de G′F′, es lo mismo que si bajaran por traslación vertical, de la misma altura G′G″) resultando con ello, que el segundo plano director, continúa teniendo por traza horizontal, la que tenía el primero en la recta GT″, cuyo plano del segundo sistema, está empero inclinado para con respecto al plano horizontal, del mismo ángulo VB′2 que forman las generatrices del conoide, para con el mismo plano horizontal. Infiérese pues, que los dos planos directores, se cortan según la recta GT″ cuya será por lo tanto horizontal, y eje del paraboloide, encontrándose en tal disposición ambos planos de ser perpendiculares, al vertical OG, proyectante de la generatriz, horizontalmente, toda vez que la GT″, es de hecho y por construcción perpendicular á dicho plano vertical GO.

De aquí se desprende, que si hubiéramos acudido en auxilio del conoide, recurriendo á una superficie alabeada de 2.º grado y de acuerdo con la primera; á lo largo de una generatriz, conforme hacemos en las demás superficies alabeadas, nos hubiéramos igualmente encontrado, con el paraboloide mencionado, pues entonces, tomando como á directrices, dos de las hélices, así como el eje O, tendríamos tres directrices, cuales sustituyendo las dos primeras, con las tangentes en los puntos F y G, estas y el eje O siendo paralelas al plano vertical GT″, hubieran formado el mismo paraboloide.

Mediante semejantes precedentes, podemos ahora fijarnos, que se habrán formado, una serie de triángulos τGT″, τ′Ft′... etcétera. cuales tendrán sus vértices T″,t′... etc., sobre la recta T″O, luego uno de sus lados respectivamente paralelos dos á dos, y un segundo lado, en una misma recta cual es la generatriz GO; además estos dos últimos lados τG y τ′F iguales; deduciéndose de aquí, que si concebimos que el triángulo Gt′F resbala á lo largo de OG, hasta que el vértice F, del ángulo recto, se confunda con el G, entonces todo el lado Fτ′ se habrá superpuesto con el Gτ del otro triángulo; al mismo tiempo el Ft′, habrá venido en Gt, sobre el GT″ y finalmente la hipotenusa τ′t′ habrá venido á colocarse en la disposición de τt, cuya última ya hemos visto que representaba la traza horizontal, sobre el plano de origen T‴-2; del plano tangente en el punto F-F′

Así pues por la inversa, si se nos da, la traza horizontal τt, de un plano tangente, al conoide y pasando por la generatriz GO, G′F′, se podrá deducir el punto de contacto, con trazar. 1.º La tangente GT″ á la hélice directriz en el punto G. 2.º La recta T″O, que una la traza horizontal de esta última tangente, con el punto O, traza horizontal del eje del conoide. 3.º Tomar en consideración, el punto t, intersección de la traza dada con GT″. 4.º Por t, trazar una paralela á la generatriz GO, hasta que corte en t′ á la T″O; el punto t′ será ya el pie de la tangente á la hélice, que pasa por el punto de contacto incógnito, y por lo tanto, sabiendo de antemano, que dicha tangente tiene dirección paralela á la GT″, trácese por dicho punto t′, esta paralela hasta que corte en F, á la generatriz en cuestión, deduciéndose en seguida la proyección vertical F′ de dicho punto.

Esta operación es general y conviene á todos los puntos de una misma generatriz cualquiera que ella sea.

Apliquemos pues semejante procedimiento en la generatriz que pasa por el punto H-H′. En primer lugar, hágase pasar por ella un plano paralelo al rayo de luz, escogiendo en ella, un punto O-v, y conduciendo por él, un rayo luminoso, las trazas de éste, y las de dicha generatriz determinarán el plano tangente cuya traza horizontal será k′i, (tomando como á línea de tierra la L′T′ al objeto de facilitar operaciones.)

Determínese ahora la Hl, tangente, á la hélice directriz en el punto H, siendo su pie el punto l, para con relación á L′T′ (Hl, rectificación de HC). Unase l, con O, y así lO, es la

recta en donde se apoyan las tangentes al conoide, en todos los puntos de la HO.

La traza *k'i*, de nuestro plano tangente, corta en el punto *m*, á H*l*; de modo que conduciendo por él, la *mn*, paralela á la HO, ella cortará en *n* á la *l*O y así *n*, será el pie de la tangente respectiva.

Finalmente, por el punto *n* condúzcase la paralela á la H*l*, y ella cortando en *p* á la generatriz HO, nos proporcionará el punto de contacto, ó de sombra.

Así repetiríamos semejante operación escogiendo nuevas generatrices, y obtendríamos nuevos puntos. Semejante procedimiento, despojado de todas las consideraciones que han sido necesario hacer para la debida demostración, y aprovechando tan sólo la parte puramente práctica y de resultado, no puede negarse que es sumamente fácil y breve; y puede emplearse alguna que otra vez, que no se opongan á ello el especial modo como vienen los datos de la cuestión.

En efecto, no siempre hay ventajas en dicho procedimiento; los motivos principales son, el que en general los cruces de líneas, como por ejemplo la *k'm* con la H*m*, son inaccesibles, caen fuera los límites del dibujo; otras veces, aunque esta contrariedad no suceda, en cambio, los encuentros se verifican en ángulos sumamente agudos, siendo muy indecisos los puntos que proporcionan, y ello da lugar á algún error para las operaciones ulteriores; y como quiera que la línea divisoria de luz y sombra es en general de relativa, escasa curvatura, de aquí, que dicha falta de exactitud motiva tome dicha línea exagerada concavidad ó convexidad en detrimento de lo real y verdadero que tiene lugar en el espacio.

No es pues este método en absoluto recomendable, y puede tan sólo echarse mano de él, en ciertas y determidadas circunstancias particulares, que el modo de ser de los datos lo permita.

204. 3.° **Procedimiento del cono director.**—Este método lo motiva al querer encontrar un punto de sombra que esté situado sobre una determinada hélice de la superficie. Favorece el procedimiento, y realmente es su origen y punto de partida la propiedad que tienen los planos tangentes al conoide, cuando se les considera en todos los puntos de una misma hélice, cuya propiedad es la de encontrarse todos ellos inclinados igualmente, ó formando el mismo ángulo con el

plano horizontal (dado que se escoja el conoide, de modo que su eje sea perpendicular á dicho plano). Que están igualmente inclinados, se infiere en seguida desde el momento que para todo punto de una misma hélice pasan dos rectas, la una tangente á dicha curva, y la otra una generatriz de la superficie conoide; en cuanto á la primera, forma un cierto ángulo α con el plano horizontal, cuyo ángulo es siempre el mismo para todas las otras tangentes que se consideren á la hélice, y en cuanto á la segunda forma un cierto ángulo β, constante siempre para las demás generatrices; resulta pues, que cualquiera que sea el punto que se considere en la hélice, siempre por él pasarán dos rectas situadas en el plano tangente al conoide, cuyas formarán con el plano de base ú horizontal los mismos ángulos una α y la otra β, y por lo tanto habrán de ser iguales también á un cierto ángulo γ los ángulos que formen dichos planos tangentes con el horizontal. De aquí proviene según esto, que si á partir de un punto del espacio se traza un plano que forme un ángulo γ con el plano horizontal y lo hacemos girar luego alrededor de la vertical que pasa por el punto escogido, engendraremos de este modo un cono recto envolvente de todas las posiciones de dicho plano, y este cono será tal que, para cada plano tangente al conoide en un punto de la hélice escogida, habrá su correspondiente plano tangente al cono, siendo paralelo á aquél. Por lo tanto, podremos hacer depender el plano tangente al conoide del plano tangente al cono.

Se comprende ahora, que cada hélice tendrá su distinta agrupación de planos tangentes, y por lo tanto cada agrupación de éstos, su respectivo cono director.

Semejantes propiedades, pues, son bastantes para resolver la cuestión del siguiente modo.

Sea por ejemplo encontrar el punto de sombra situado sobre la hélice directriz; supongamos al efecto, que el punto incógnito de tangencia; junto con su plano tangente, lo hacemos deslizar bajando por dicha hélice hasta alcanzar el punto B-B', entonces la generatriz, en donde aquél esté situado, irá á situarse confundiéndose con la generatriz inicial BO-B'V. En este sitio, será fácil conducir el plano tangente dado por la generatriz B'V, y la tangente á la hélice en el punto B-B'. La primera, tiene por traza horizontal el punto *d*, y la segunda que se encuentra en un plano de perfil, tendrá por traza la *c*, á una distancia B igual á la rectificación del arco BA'. La

recta que una estas dos trazas, será con evidencia la traza horizontal del referido plano tangente en el punto B-B'.

Ya éste obtenido en dicho sitio, remontémosle de nuevo, de modo que ascienda el punto de tangencia sobre la hélice en cuestión, hasta que venga un momento en el cual dicho plano sea paralelo al rayo luminoso, claro es entonces, que el punto de contacto será el de sombra buscado. Veamos pues, el medio de que nos valemos para impulsar á dicho plano con tal movimiento helizoidal. A este efecto, descompondremos este movimiento en dos, análogamente como lo hicimos en el párrafo núm. 172, uno de ellos será de revolución en torno del eje vertical O, y para efectuarlo cómodamente imaginemos por O la perpendicular O*b* sobre la traza horizontal del plano, haciendo luego girar todo el sistema alrededor de O, en cuyo caso, el punto *b* describirá una circunferencia que será base de un cono recto, cuya generatriz es la O*b* y cuyo vértice es O V; en dicho movimiento la traza horizontal *dbc* del plano tangente al cono, gira también, conservándose en todas sus posiciones tangente al cono, y por lo mismo formando constantemente aquella generatriz el mismo ángulo γ con el plano de la base; ángulo que como sabemos es el mismo que forman todos los planos tangentes que corresponden á la hélice directriz. En semejante situación, conduzcamos un rayo luminoso por el vértice de dicho cono; este rayo tiene por traza horizontal el punto *e-e'*, y es tal, que se sucederá un momento que al girar la traza *bd*, pasará á la posición *b'd'* pasando por el punto *e*, en cuyo caso el plano se encontrará ya paralelo al rayo luminoso, si bien es verdad que habrá dejado de ser tangente á la superficie, toda vez que el punto de tangencia se habrá colocado en h-h_1 el cual ya no se encuentra en la misma, mas eso no importa, pues encontrándose el plano en cuestión con la inclinación debida, y que corresponde al que es realmente tangente, se encontrará paralelo á él, y un simple movimiento de traslación en el sentido vertical, bastará para que el punto h_1 se mueva sobre la vertical que por él pasa, hasta colocarse definitivamente sobre la hélice en el punto h''; teniendo en cuenta que su proyección horizontal *h* persistirá la misma; en semejante situación, el punto h-h'' será el definitivo de sombra, pues las operaciones que hemos efectuado, son bastantes, para corroborar que el plano tangente que por él pasa, reune las condiciones, para que así suceda. El modo de encontrar el punto *h* es bien fácil por

cierto, no hay más que examinar para ello las nuevas posiciones que toman en el giro el sistema de rectas contenidas en el plano en cuestión. En efecto, el punto *b* toma la posición en *b'*, y así *bO* línea de máxima pendiente del plano que se considere, ó si se quiere generatriz del cono director, adquiere la posición de O*b'*, el trecho *bd* de la traza horizontal va á colocarse en *b'd'*, y de este modo la recta O*d* viene en O*d'*, mientras que el punto B que era el de tangencia auxiliar se colocará en h-h_1; ahora de éste ya hemos visto como va á colocarse en h''.

Pero aún hay más; la traza *b'd'* puede continuar girando hasta pasar á la nueva tangencia b_1d_1, la cual pasa también por el punto *e*, y así, haciendo en esta nueva posición los mismos razonamientos que hemos hecho con la primera, podremos venir á deducir otro punto de sombra h'-h_2 situado en la misma hélice.

Se comprende con lo dicho, que escogiendo nuevas hélices junto con sus nuevos conos directores, y reproduciendo análogas operaciones encontraríamos tantos puntos como quisiéramos en la línea de sombra.

Unicamente haremos constar que á medida que las hélices se aproximarán más al eje, siendo por lo tanto cada vez más pequeño el radio del cilindro respectivo que las contiene, las agrupaciones distintas de los respectivos planos serán tales, que en cada agrupación estos planos formarán ángulos cada vez mayores con el plano horizontal, ó lo que es lo mismo el ángulo al vértice de los respectivos conos, irían sin cesar cerrándose, hasta que en el límite, la hélice se confundiría con el eje vertical del conoide, siendo entonces el punto de tangencia ó sea de sombra la intersección de la generatriz correspondiente con el precitado eje vertical; este punto que aquí es el O-j''' lo proporcionará la recta OB cuando al girar se coloque en la disposición confundiéndose con R^h, en cuyo caso el punto de tangencia que ahora es O-V, se habrá elevado de la misma cantidad que lo habrá hecho B-B' al trasladarse en B_1-B'_1; por lo tanto, tómese sobre el eje y á partir de la horizontal que pasa por B'_1 la altura citada; el punto j''' que así resulte será también de la curva.

Si las hélices de que hemos hecho mención en lugar de aproximarse al eje se alejan de él, creciendo sucesivamente los radios de los cilindros en donde sitúan aquéllas, en este caso, los planos tangentes, formarán ángulos cada vez más

agudos con el plano horizontal; sucediendo lo mismo con los conos directores los cuales sus ángulos al vértice irán abriéndose, hasta que en el límite cuando se conciba aquella hélice imaginaria que pase por el punto situado al infinito de la generatriz OB-VB', entonces en este límite la generatriz correspondiente se confundirá con la línea de máxima pendiente del plano, en cuyo concepto le correspondería un cono director cuyas generatrices estarían inclinadas con la base de un ángulo, igual al que forma la generatriz con el plano horizontal.

205. 4.° Procedimiento de la Sección de base.— Es realmente la aplicación del sistema de *Burmester*, aunque aquí, aun más expedito, por la índole y propiedades especiales de la superficie de que se trata. Sabido es, que para ello precisa tener á mano la sección de base (esto es una sección producida, por todo plano perpendicular al eje del conoide), y luego conducir normales á dicha curva; que aquí es según hemos visto una espiral de Arquímedes; ahora bien, dichas normales están relacionadas de tal modo con la índole de esta curva y su parámetro, hasta al punto, de desprenderse importantísimas propiedades que trascienden, y facilitan las construcciones hacederas, de los planos tangentes al conoide y sus correspondientes puntos de sombra.

Para ello, recordemos como se obtiene la normal y la tangente á dicha curva. La fig. 172'', Ox, es un eje polar, M, un punto cualquiera de una curva plana; Mθ la tangente y MN la normal en dicho punto.

En este estado, se llama subnormal de la curva dada, el segmento ON, interceptado por el ángulo OMN, de la perpendicular ON al radio sector OM (en coordenadas polares). Ahora bien, en todos los tratados de análisis se demuestra, que esta subnormal tiene por expresión la de $\frac{d.\rho}{d.\omega}$, así es que en nuestro caso de la espiral de Arquímedes, habiendo encontrado ser su ecuación $\rho = R + p\omega$, se infiere de ella que $\frac{d.\rho}{d.\omega} = p$, luego infiérese de aquí, que *en la espiral de Arquímedes, la subnormal es constante é igual al parámetro*.

Para construir la tangente en un punto cualquiera M, de la espiral, colóquese sobre la perpendicular á OM, y en el

mismo sentido en que ω haga el crecimiento, una longitud ON $= p$; así NM, será la normal, y su perpendicular Mθ la tangente.

Sea ahora en la figura 172[IV] m - m' un punto cualquiera de la generatriz del conoide, y se trata de encontrar el plano tangente á esta superficie en este punto. Conteniendo dicho plano, semejante generatriz, bastará encontrar la dirección de las horizontales de este plano II. Si ahora imaginamos el plano horizontal que pasa por el punto escogido m - m', sabemos ya, que cortará á la superficie según una espiral de Arquímedes, bastando conocer la dirección de la tangente, ó lo que es lo mismo de la normal á esta curva en el punto considerado. Mas según hemos visto poco ha, esta normal se obtiene llevando perpendicularmente á om una longitud oN igual al parámetro p, y uniendo luego N con m. De aquí se infiere, que las horizontales del plano tangente son perpendiculares á Nm, pudiendo obtener así, la traza del plano tangente que se desea, con solo conducir desde la traza t de la generatriz la perpendicular tH sobre Nm.

Ahora bien, sea cual fuere el punto m-m' que se escoja, para conducir por él el plano tangente, será siempre preciso recurrir á la misma longitud p, llevándola sobre una recta que parta del punto o, y cuya dirección dependa de la generatriz que se elija y que contenga el punto considerado. He aquí porque es sumamente ventajoso, á la par que cómodo, en el caso que sean muchos los planos tangentes que hay que trazar; el que se describa desde el centro o con un radio igual á p, una circunferencia que en este caso llamaremos circunferencia paramétrica.

Fijándonos en la generatriz oq—$o'_1 q'$ si la suponemos fija, mientras que el punto m-m' adquiere distintas posiciones en esta misma recta, N quedará fijo, así como también el punto t; pero no así la Nm y la tH, cuales variarán pero permaneciendo siempre perpendiculares entre sí. Si el punto m-m' se aleja hasta al infinito, entonces Nm tomará la posición paralela á la generatriz oqt, al paso que la traza tH del plano tangente se colocará perpendicular á dicha generatriz. De aquí se infiere que se pueda establecer el siguiente principio, del cual ya hemos hecho mención anteriormente.

El plano asintótico correspondiente á una generatriz del helizoide, es precisamenle el plano cuya línea de máxima pendiente es esta misma generatriz. Más esta pro-

piedad resulta también á priori, desde el momento que el plano asintótico es paralelo al plano tangente al cono director, según la generatriz correspondiente.

El plano *central* de una generatriz siendo perpendicular al plano asintótico, será pues aquí el plano que proyecta á la generatriz horizontalmente, y como quiera que este plano vertical es tangente en el punto en donde la generatriz encuentra el eje, infiérese de aquí ser este eje una *línea de estricción*.

Propongámonos ahora resolver el problema inverso, y así sea tH la traza horizontal de un plano que pasa por una generatriz oqt-$o_1q't'$. Para encontrar el punto de contacto de este plano, condúzcase perpendicularmente sobre oq el radio oN de la circunferencia paramétrica. La perpendicular bajada desde N sobre tH cortará á oq en el punto m, cuyo será el de contacto ó sea de sombra.

Con los precedentes datos, y aprovechándonos del solo resultado de las consideraciones expuestas, podemos ya pasar á la fig. 172', para aplicar dicho procedimiento. Mas ante todo, precisa tener á mano el círculo paramétrico; y al efecto no hay más, según dijimos en el párrafo 201, que construir la fórmula que nos proporciona el radio paramétrico $p=h$ cot. β; para lo cual se deducirá antes geométricamente la línea que representa el paso unitario h, por medio de la igualdad $h=$R tag. α.

Veamos, pues, la fig. 172^{v} en ella trácese la recta $xy=$R (radio del círculo de base del cilindro, en donde se encuentra la hélice directriz), trácese luego la recta que parta del punto x formando un ángulo α (ángulo de las tangentes á la hélice directriz con el plano de base), con la xy; levántese por y, la perpendicular sobre la xy; su encuentro v con la xv dará la recta $vy=h$, como á cateto del triángulo vxy cuyo cateto proporcionará el valor de h.

Obtenido h, trácese por v la vz que forma con xy el ángulo igual á β (ángulo que forman las generatrices del conoide con el plano horizontal), y entonces el cateto zy, del triángulo formado en vzy, dará el valor lineal de p y en efecto en él se cumple la igualdad $p=h$ cot. β.

Teniendo ahora $p=zy$, tómese esta cantidad lineal y haciendo centro en O, en la fig. 172', descríbase la circunferencia kk', y ella dará el círculo paramétrico.

Supónese ahora dada la generatriz OH-H'v, en la cual

se quiere determinar el punto de sombra. Con arreglo á lo indicado más arriba, determinaremos ante todo la traza horizontal $k'm$ del plano que pasa por esta generatriz y al mismo tiempo paralelo á los rayos luminosos. Hágase luego partir desde el punto O, la Ok', perpendicular á la proyección horizontal de la generatriz escogida, hasta cortar en k' á la circunferencia de los parámetros; y finalmente, desde el punto k', trácese la perpendicular á la traza horizontal mk' del plano tangente, y el punto p en donde corte á la generatriz citada, será el de sombra definitivo, el cual valiéndonos como siempre, de una proyectante perpendicular á la LT se obtendrá su proyección vertical p', cual punto es el mismo que habíamos encontrado, valiéndonos del procedimiento de inducción.

Repítase, pues, semejante procedimiento, valiéndonos de nuevas generatrices, y lograremos tantos puntos como se deseen de la curva de sombra. En la misma figura constan también las operaciones para el punto φ-φ', situado sobre la generatriz OM'-Mv'.

Esta curva, según ya hemos anunciado, consta de dos ramas HpO-H'$p'j'''$ la una y $h'\varphi$O-$h_2\varphi'j^{IV}$ la otra; vistas las dos en la proyección horizontal y al parecer una sola rama, mientras que en proyección vertical, una de las ramas aparece vista y la otra oculta.

Aquí hay sombra sobrepuesta de la hélice superior B''QC'', sobre la superficie inferior, cuya línea de sombra es la $\nu\pi\mu$, la cual en el punto μ en donde la curva arrojada encuentra á la propia, el rayo luminoso, es tangente á la primera (n.° 27), la sombra propia queda inmergida en el campo, donde se extiende la primera. El procedimiento para hallar esta sombra sobrepuesta es análogo á los expresados en ocasiones semejantes; así dos cilindros paralelos á los rayos de luz, teniendo el uno por directriz la hélice B''QC'', y el otro la $j'''\mu p'h''$, se cortarán según un rayo luminoso, el cual se hallará su traza sobre un plano horizontal auxiliar, cuyo plano reciba también las trazas de dichos dos cilindros; ahora el punto de traza mencionado, servirá para hacer partir el rayo en cuestión, en sentido inverso, y entonces él irá á cortar en μ, la línea de sombra propia; será el primer punto de sombra arrojada que cae sobre la superficie. Para otro punto tal como π, combinaríamos el mismo cilindro luminoso cuya base es la hélice B''QC''; con el plano de sombra

de la recta generatriz I'-8, y como quiera que la curva traza horizontal del primero, y la recta traza horizontal del segundo se cortarían, este sería el punto de traza del rayo de sombra de intersección de cilindro y plano. Finalmente el rayo de sombra, contraproyectado, partiendo de dicho punto de traza, acaecerá un momento en que irá á cortar á la generatriz I'-8 en dicho punto π, y así los demás.

Podría aprovecharse, también, el procedimiento del círculo paramétrico, para encontrar ó rectificar, si se quiere, las curvas del contorno aparente. Así aplicando el procedimiento, para la generatriz OB_1, y teniendo en cuenta que ahora los rayos luminosos, vienen sustituidos por rectas de dirección perpendicular al plano vertical, y por lo tanto los planos tangentes, son los proyectantes de las rectas generatrices, sobre el plano de proyección vertical, cuales tienen sus trazas horizontales perpendiculares á la línea de tierra, quedará reducida la cuestión al siguiente sencillísimo procedimiento: 1.° Por O, la perpendicular Oδ á la proyección OB_1 de la generatriz. 2.° Por δ, la perpendicular á la traza horizontal del plano tangente; ó lo que es lo mismo, una paralela á la L de T el punto de intersección de esta última con la generatriz, será ε cual proyectado verticalmente en ε' proporcionará el del contorno aparente.

Aquí es, en donde podemos corrobar, como el plano vertical, que pasa por la generatriz inicial OB-B'V, es asintótico de esta generatriz, toda vez que si aplicamos el procedimiento, para hallar el punto de tangencia, que le corresponde, para el contorno aparente, tendremos que la paralela á la línea de tierra, y que parte del punto ζ, es igualmente paralela á nuestra generatriz OB, y por lo tanto, el punto de tangencia se traslada al infinito.

206. Sombra del tornillo de filete triangular.—Supongamos un triángulo isósceles (L.ª 32. F.ª 173) B AB', cuya base coincida con una generatriz, de un cilindro vertical á base circular; y que el plano de dicho triángulo, pasando constantemente por el eje, gira alrededor del mismo, con un movimiento uniforme; ascendiendo el triángulo, alturas que sean proporcionales á las cantidades angulares, descritas durante el giro, y de modo tal, que al haber efectuado una revolución entera, dicho triángulo se haya elevado de una altura precisamente igual á la base $B'B''_1$ del mismo, en cuyo caso el

triángulo se colocará en la disposición del expresado por B'A'B". En este concepto, el sólido engendrado por el triángulo BAB', será lo que se conoce por filete del tornillo, el cual vemos que está completamente adherido al cilindro central, del cual forma parte, siendo este cilindro el que se conoce por el *alma del tornillo*.

Durante el precitado movimiento, el vértice saliente A, habrá descrito una hélice, situada en un cilindro concéntrico con el del alma, siendo su paso igual á la base BB' del triángulo generador. Además, los dos lados AB, AB' del triángulo, como están igualmente inclinados para con respecto al eje del cilindro, cortándole, por lo tanto, en puntos distintos, resultará, que en el movimiento engendrarán dos conoides helizoides opuestos, cuales se cortarán, mediante la hélice situada en el alma; y aparecen tales, que la hoja superior de uno de ellos constituye la cara inferior del filete, mientras que la hoja inferior del otro sirve para formar la cara superior del propio filete.

Para el contorno aparente, sobre el plano vertical, téngase bien en cuenta, y conforme exige la realidad de los hechos, que no lo formarán los lados AB, AB' de los respectivos triángulos, y sí; vendrá originado según hemos visto por las curvas envolventes, de las distintas posiciones de las generatrices, cuyas curvas ya hemos visto tenían por asíntotas, las generatrices iniciales, cuyas no son más que los referidos lados.

Estas curvas son las αβ, α'β'... etc. Sin embargo, observando que los trechos reales de los conoides aprovechables dentro de los límites de superficies del filete, son relativamente muy poco extensos, mediando por otra parte alguna distancia del eje, (en cuyas proximidades la curva es más acentuada) no hay ningún inconveniente en que se las sustituya por las dos rectas tangentes αβ, γδ, tangentes á la hélice máxima y á la mínima, observando para su mejor trazado, del modo como están relacionadas en el espacio, y como se acusan en el contorno aparente vertical; y así observaremos que aparecerán conforme muestra la fig. 173', en donde αβ, se antepone á la γδ, dejando parte de esta segunda oculta. Semejante propiedad en los ángulos entrantes de la izquierda, se reproducirá en los ángulos entrantes de la derecha, con la variante, de que sucederá inversamente, esto es, el conoide directo, quedará oculto por el inverso.

Con semejantes datos se ha proyectado el tornillo en la

figura 173, coronándolo con un prisma exagonal, concéntrico con el cilindro del alma, y con la altura S'S''; con cuya cabeza se logra comunicarle movimiento, auxiliándole con un brazo de palanca.

En esta disposición, le suponemos iluminado con los rayos de dirección R-R', proponiéndonos encontrar las sombras que se originan, y como quiera que las operaciones en su mayor parte las hemos ya estudiado en detalle en la figura 172', nos limitaremos á reseñarlas, por el orden que resulte más ventajoso.

En primer lugar, y valiéndonos del tercer procedimiento (n.° 204) ó sea *de los cono directores*, se encontrarán los puntos de sombra ν'_1-ν, y μ'_1-μ, situados el primero sobre la hélice máxima y el segundo sobre la mínima, concernientes á la parte vista, así como también los situados en las mismas hélices, pero correspondiendo á la parte oculta, que serán los otros dos puntos ξ-ξ' y τ-τ'. Sabido es que cada operación de cono director, nos da dos puntos en una misma hélice, y aquí habrán sido precisos dos conos directores, uno para la hélice máxima y otro para la mínima. Esto para con respecto á la hoja de filete superior ó sea el formado por el conoide directo.

Ahora esta operación se repetirá para la hoja invertida ó el conoide limitado por las hélices C'E', B'v'_1, sobre la primera se encontrarán los puntos de sombra λ-λ', XX', mientras que en la segunda serán los φ-φ'_1, ψ-ψ'_1.

Como vemos, hemos empezado por dichos puntos, pues que ellos nos indican ya los extremos de las pequeñas curvas de sombra propia, en el justo límite aprovechable dentro del ancho que se extiende cada hoja ó superficie de los filetes. Ahora todo quedará reducido á buscar un punto intermedio, entre cada dos de los encontrados, y eso bastará, pues como decimos, las curvas son de poca longitud y de muy escasa curvatura, amén de que en general, parte de dicha curva de sombra, va á quedar muy luego inmergida, en las sombras arrojadas, de los conoides invertidos, sobre los directos.

Este punto intermedio es conveniente, que lo tratemos de buscar, sobre una generatriz del conoide, fijándola de modo, que sea intermedia, entre dos de los mencionados puntos, como por ejemplo en μ'_1 y ν'_1, así ahora hay seguridad, que las operaciones se aprovecharán, pues el punto de sombra que encontremos ha de caer forzosamente dentro el trecho

de μ'_1 y ν'_1, pues de no haber encontrado éstos con antelación, nos exponíamos á que el punto de sombra, se encontrara fuera del estricto trecho de superficie que aprovechamos. El procedimiento que puede seguirse es el que expusimos en segundo lugar y llamábamos de induccción, esto en el caso que las líneas de operaciones lo permitieran, esto es que fueran accesibles, y á más que los cruces aparecieran francos, sin ambigüedad en los ángulos agudos, de no suceder así, lo abandonaríamos por completo, acudiendo al cuarto procedimiento ó sea de la *sección de base*, procediendo ante todo, y según se dijo en el n.° 205, á determinar el parámetro p, y con él, el radio y círculo paramétrico, el cual trazaremos de centro o y radio $p = o\sigma$, valiéndonos de él para determinar conforme ya sabemos el punto de tangencia con el conoide helizoide, del plano que pasa por la generatriz de que se trata y paralelo á la vez al rayo luminoso.

Sin embargo, este procedimiento, á pesar de su sencillez, aun se presta á modificación que logra si cabe, aún más rapidez y lo conoceremos por quinto *procedimiento ó del polo*, es el del n.° 182, pero llevado aún con más facilidad; pues de todos modos está dentro el procedimiento del de la *sección de base*. Sea la fig. 172$^{\text{iv}}$, recordemos como hemos encontrado el punto de sombra m-m', sobre la generatriz Oq-O'$_1q'$. Después de determinada la traza horizontal He, del plano tangente, así como el círculo paramétrico, se ha trazado la ON perpendicular á Oq, y luego por N, la perpendicular á la He, el punto m, de intersección de esta perpendicular, con la generatriz, era el punto de sombra. Pues bien, tomemos ahora en consideración la Od que partiendo de O sea perpendicular al rayo R^h, hasta que corte en d á la Nm, entonces habremos formado el triángulo ONd, que será semejante, con el Ote, y lo serán por tener por construcción los lados del uno respectivamente perpendiculares á los lados del otro, de esta semejanza se infiere $\frac{Od}{ON} = \frac{Oe}{to}$, ó bien $Od = \frac{ON \times Oe}{to}$, sustituyendo valores tendremos:

$$Od = \frac{h \text{ cot. } \beta \times O'O'_1 \times \text{cot. } \delta}{O'O'_1 \times \text{cot. } \beta} = h \text{ cot. } \delta$$ cantidad constante, sea cualquiera la generatriz que se adopte, el punto d es *el polo de los puntos de sombras*, y, una vez determinada la distancia od, los puntos de sombra se encontrarán rápidamente, haciendo partir del punto d invariable.

una serie de rectas perpendiculares á las trazas horizontales de los planos tangentes, pasando por las generatrices escogidas, y las intersecciones de estas perpendiculares, con cada una de las proyecciones horizontales de las generatrices, que á cada perpendicular concierna, serán en virtud de lo dicho los puntos de sombra consabidos; método breve, fácil y el más conciso que pueda desearse *.

207. De estas construcciones, Mangiagalli dedujo su teo-

---

* Hemos indicado que este procedimiento es el general, para los helizoides cuando se recurre á la sección de base en el n.° 205, y en efecto, no hay más que atender á las construcciones que allí tienen lugar, comparándolas finalmente con el resultado que hemos obtenido, usando el punto llamado *polo*. Sea al efecto la fig. 172, en la cual consideramos tan sólo la planta, partiendo del supuesto de tener como á dato la sección de base DEFG... etc., obtenida por la intersección con el plano horizontal de las generatrices prolongadas del conoide; también sabemos que esta curva es una espiral de Arquímedes. Con arreglo á lo dicho en los n.os 180 y 182, empezaremos trazando el epiciclo $aba'b'$ (círculo paramétrico en el párrafo 205), y luego, el polo que allí designábamos por Σ y aquí en el presente párrafo por P (polo de los puntos de sombras). El círculo 1-2-3-4... etc., es la proyección horizontal de la hélice máxima.

Bajo este supuesto, concibamos una normal cualquiera á la curva de base, como por ejemplo, la CB haciendo luego girar esta normal en torno de O, hasta que el punto B, intersección con el círculo polar, pase por P, en dicho instante, el otro punto A se situará en A' también sobre el círculo polar y á una distancia $PA'=AB$; así como el punto b se trasladará en b', sobre el epiciclo, á una distancia $Pb'=Bb$. Mas insiguiendo el giro, la generatriz CO del conoide correspondiente al punto C por donde pasa la normal escogida, viene á colocarse en la dirección Om perpendicular al radio en el punto b' del epiciclo, indicando desde este instante la intersección m de Om con la normal PA', como es el punto de sombra definitivo. Esta construcción, pues, equivale á trazar ya desde luego por P una recta cualquiera PA', por ejemplo, tomar luego en consideración el radio Ob' que pasa por el punto b' del epiciclo, trazar luego desde O una perpendicular á este radio, y finalmente encontrar la intersección de esta última, con la normal PA', así se obtiene el punto p.

Comparemos ahora esta construcción con la del presente párrafo. Determínese ante todo el círculo paramétrico, el cual se encontrará ser el que hemos llamado antes epiciclo, pues obedece á los mismos datos. Dedúzcase en seguida el polo **P**, cuyo cumplirá las mismas condiciones que el Σ de los párrafos anteriores; esto es colocado en un radio perpendicular al rayo luminoso, y á la misma distancia de O, pues si se comparan el modo de encontrarlos, se verá también que obedecen á los mismos datos. Con semejantes elementos, queriendo encontrar el punto de sombra que se halla sobre la generatriz OC', empleando ahora el epiciclo como á paramétrico; trazaremos el radio paramétrico Ob' perpendicular á OC'; uniremos luego b' con el polo **P**, y según hemos visto, la intersección de Pb' prolongada, con OC proporcionará el punto m de sombra. Las mismas construcciones y líneas que se empleaban cuando el epiciclo, el procedimiento es pues el mismo. Lo mismo hubiéramos evidenciado si hubiéramos tenido en cuenta el punto A que pasara por **P**, lo cual daría el punto m'.

rema que le llama **teorema del polo. 1.° Las líneas de máxima pendiente de los planos tangentes á un conoide helizoide, cuales pasando cada uno por una generatriz, son paralelos á un rayo luminoso; se encuentran todas ellas en un punto P, llamado polo de sombra. Este punto se encuentra á partir del punto O (traza del eje sobre la base), en dirección perpendicular á la proyección horizontal del rayo luminoso, y á una distancia de O, igual á $h \times \cot. \delta$, siendo h el paso unitario, y δ el ángulo que el rayo luminoso forma con el plano horizontal.**

208. 2.° Cuando se consideran varios planos tangentes en una misma generatriz de un conoide helizoide (también por un helizoide alabeado cualquiera que él sea), entonces las líneas de máxima pendiente de dichos planos pasan por un mismo punto Π llamado polo de esta generatriz. Este punto Π se encuentra situado en el radio que une el centro O, con la proyección horizontal del punto central (punto de la hélice exterior en donde se apoya la generatriz) y á una distancia de O (ó lo que es lo mismo del eje), igual á R $\cot. \beta$, siendo β el ángulo que forman las generatrices con el plano de base.

209. Las líneas de sombra encontradas en $\nu'_1\mu'_1$, $\lambda'_1\chi'_1$... etcétera, situadas en un filete, se reproducirán ahora para los otros en $\nu'_2\mu'_2$, $\lambda'_2\chi'_2$... etc., y para ello bastará comunicar á las primeras un movimiento de traslación vertical, hasta que dichas curvas, ya subiendo ó ya bajando se vayan colocando sucesivamente dentro las dos hélices que limitan los filetes inferiores ó superiores. La proyección horizontal no varía, queda la misma para todos los filetes.

210. Insiguiendo pues dichos procedimientos, y en el concepto que para el mejor trazado de las curvas de sombra las extendiéramos más allá, de su justo límite aprovechable, dentro el reducido espacio del conoide del filete, encontraríamos la curva proyectada horizontalmente en $\nu\mu OP\xi\tau$, para la hoja inferior ó directa, y luego la curva $\lambda\chi OP\psi\varphi$ para la hoja superior ó inversa; ambas tendrán un punto común, será el mismo polo P de sombra, en donde se cortarán formando como una suerte de lazo.

Aquí nos podemos aprovechar de las ventajas de la superficie, cual es de reunir la condición del párrafo 180 por la cual la curva de sombra de la proyección horizontal, es si-

métrica, para con relación á la recta QQ_1 trazada por O, perpendicular á la proyección horizontal del rayo de luz R^h, y en este caso, claro es que á medida que se encuentren puntos por los procedimientos indicados, pueden encontrarse en seguida sus simétricos, con sólo hacer el traslado de los primeros hacia la otra parte de QQ_1 y perpendicularmente á dicha recta; así, por los puntos ν y μ obtendremos los λ y $\varkappa$ por medio del trazo de las perpendiculares, conducidas á QQ_1, situando sobre ellas los λ y $\varkappa$, á igual distancia de QQ_1 que lo están las ν y μ, lo cual hasta cierto punto constituye otro procedimiento de investigación que podríamos llamar de simetría; aunque sería forzoso al ponerlo en práctica, conocer de antemano, otros por alguno de los procedimientos anteriores.

211. Pasemos á determinar ahora las sombras arrojadas. En primer lugar, como á base de operaciones, empezaremos encontrando la sombra arrojada sobre el plano horizontal de la hélice exterior ó de radio máximo, ya sabemos que dicha sombra (n.° 46) será una cicloide alargada, la cual aparece en $K\tau''kn''k_1$... etc., y cual podría considerarse como si fuera engendrada por el punto K, cuando el epiciclo de radio OP resbala en su rodadura sobre la tangente PP_1 paralela á R^h. El punto K siendo la traza horizontal de la hélice de que se trata.

Búsquense luego las sombras de los trechos de curva $\nu'_1\mu'_1$, $\lambda'_1\chi'_1$, $\psi'_1\varphi'_1$, $\tau'\xi'$; cuales resultan ser las líneas $\nu''_1\mu''_1$, $\lambda''_1\chi''_1$, $\psi''_2\varphi''_1$, $\tau''\xi''$... como se comprende ya desde luego, estas líneas corresponden á dos curvas distintas correspondientes á la parte superior é inferior del filete, y que habrían de ser las envolventes de las sombras arrojadas de las líneas trazadas sobre los dos helizoides, ya se consideren en rectas generatrices ó ya también hélices, ó ya también si se quiere secciones de base. Con este motivo, estos trechos de sombra, son curvas arrojadas, tangentes á la arrojada de la hélice exterior, en los puntos precisos de encuentro λ''_1, ν''_1, τ'' y φ''_1.

Las sombras de las aristas, ST-S''T'', TU-T''U'', de la cabeza del tornillo, aparecen en S_1T_1, T_1U_1, por medio de ellas, venimos en conocimiento del límite de la sombra arrojada sobre el plano horizontal, pudiendo con las mismas, venir á determinar las sombras propias correspondientes.

Ahora por medio de todas estas líneas de sombra arrojadas sobre el plano horizontal, es que nos será fácil deducir las que se arroja el tornillo sobre sí mismo, estas son las sombras sobrepuestas. Así, las curvas $\nu_1''\mu_1''$, $\lambda_1''\chi_1''$, representan las trazas de los cilindros de sombra, circunscritos, cuyas líneas directrices ú originarias son las $\nu_1'\mu_1'$, $\lambda_1'\chi_1'$; dichas trazas cortan ahora en el punto ω'', á la cicloide que proviene de la hélice exterior, y por lo tanto inferimos que los cilindros de sombra de la hélice mentada, y la línea divisoria del conoide, tienen una generatriz común, cuya traza está en ω''-ω_1'', de modo que el rayo de sombra que parte de este punto, prolongado en sentido opuesto, se apoya en ω_1' así como en ω', resultando con ello, que este último es sombra arrojada del primero, y así ello por sí solo demuestra, que á partir de ω_1', la sombra del trecho de curva $\omega_1'\chi_1'$ cae arrojada sobre la hoja directa del filete, en la curva $\chi_1'd'\omega'$. Un punto intermedio d', lo obtendremos escogiendo una generatriz rectilínea del helizoide que pase por las posiciones comprendidas entre χ_1' y ω', esta generatriz, aquí es la recta mn-$m'n'$ buscando luego su sombra $m''n''$; ahora esta, corta á la arrojada $\lambda_1''\chi_1''$, en un punto d'', y por lo tanto el rayo de sombra cuya traza horizontal es este punto dirigiéndole en sentido de contraproyección oblicua, vendrá un momento que cortará á la línea de sombra propia $\lambda_1'\chi_1'$, á la vez que á la de igual denominación $\nu_1'\mu_1'$ á esta última en d', será la sombra arrojada del primero situado en la curva $\lambda_1'\chi_1'$.

Se comprende, pues ahora, el modo de llevar las operaciones, para los demás trechos análogos, tanto de la parte anterior, como de la posterior. El punto g'' proporciona el originario g', por medio del cual, el plano de sombra de la arista ST-S''T'', corta á la hélice máxima, de modo que haciendo partir desde este punto un rayo de sombra, éste cortará á la arista S''T'' en un punto intermedio entre S'' y T'', indicando ello que parte de esta arista caerá arrojada en el conoide inverso; en la línea $g'f'$ y parte en el conoide directo en la línea cuya parte vista en el plano vertical es la $g'e'$.

Los distintos puntos de estas curvas, se encontrarán combinando las sombras arrojadas, de las generatrices rectilíneas de los helizoides, próximas á uno y otro lado del punto g', con la T_1-S_1 sombra arrojada de la T''S''. Mas á partir de f', será la otra arista T''U'', que cae arrojada en parte en $f't'$, sobre la hoja inversa del filete. Así las líneas T_1U_1 y $\lambda_2''\chi_2''$ se

cortan en un punto t'', el cual se referirá en t_1'' y luego en t', y sucesivamente en t_1' y t_2'. Ello demuestra ser el punto t' el último de la curva arrojada en la hoja inversa, pero que muy luego el rayo prosigue su marcha en el espacio, deteniéndose en t_1' desde el cual la continuación de la arista horizontal T″U″, cae arrojada en $t_1'\rho'$ sobre la hoja del filete en la parte del helizoide directo, modificando con ello la sombra propia mas antes encontrada en $\nu_3'\mu_2'$ así como también la primera arrojada de filete sobre filete, las cuales casi en su totalidad caen sumergidas en dicha sombra arrojada $t_1'\rho'$. Los puntos de la sombra $t_1'\rho'$, se encontrarán análogamente cómo hemos indicado para las otras del mismo género, cuales hemos detallado convenientemente.

Finalmente, las sombras arrojadas sobre el plano vertical, se explican por sí mismas y por su facilidad elemental podemos excusarnos de decir nada sobre ellas.

212. Tornillo de filete rectangular.—Si en lugar del triángulo generador, que empleábamos en el tornillo anterior, echamos ahora mano de un cuadrado, para que verifique el mismo movimiento helizoidal, entonces será cuando iremos formando el filete rectangular del tornillo fig. 175, lámina 31.

Tenemos, pues, como allí, el cilindro de alma fig. 174 L.ª 32 de centro O y radio Oa; adjunto á él, imaginemos un cuadrado ab-$a'b'c'd'$ en el que uno de sus lados a-$a'd'$ coincida con una de las generatrices de dicho cilindro, y así en esta disposición, los lados de base $b'a'$-ba, $c'd'$-ba, serán horizontales y cortarán prolongados, al eje O-O′Z en ángulo recto. Impulsemos ahora á este cuadrado, con un movimiento de ascenso y giro á la vez, de modo que el lado $a'd'$, siempre coincidiendo con alguna de las generatrices del cilindro del alma, recorran sus puntos extremos a', d', hélices situadas sobre el propio cilindro, y en este caso será evidente que los otros vértices b', c', trazarán también hélices de mayor radio, y del mismo paso que las primeras, proyectadas aquellas según la circunferencia de mayor radio Ob. Ordinariamente se suele tomar como á paso de las hélices directrices, una altura a'-a_1' igual al doble del lado $a'd'$ del cuadrado. El sólido engendrado, según las indicadas condiciones, será el filete del tornillo de que se trata, y si bien consideramos, podremos observar aquí, que las superficies helizoidales, en-

gendradas por las rectas horizontales $b'a'$, $c'd'$, bases del cuadrado generador, son del género de los conoides rectos y de plano director, esto es un caso particular del conoide del tornillo de filete triangular con cono director. Si suponemos, pues, en este último, que la recta generatriz forme con el eje un ángulo recto y la impulsamos un movimiento helizoidal, conservándose en todas las posiciones, perpendicular al eje, será cuando el cono director se convertirá en un plano y la superficie alabeada que se obtenga, será la que pertenece al filete del tornillo de rosca rectangular.

Siendo ahora R^v-R^h el rayo luminoso, procedamos á determinar la sombra propia de la superficie alabeada del helizoide, escogiendo cualquiera de los procedimientos vistos para el caso anterior.

Así, escojamos en primer lugar el de *inducción*, y sea escogida una generatriz cualquiera, la AO-A′O′ por ejemplo, y veamos cual es el punto de sombra que la corresponde. Ante todo, valgámonos de la L′-T′, como á plano horizontal, al objeto de que las operaciones queden más circunscritas al límite del papel. Si por el punto O-O′ se traza un rayo luminoso, este tendrá por traza el punto C-C′ y trazando por él, la C′D paralela indefinida á la generatriz AO, ella será la traza horizontal del plano tangente que pasa por AO-A′O′ y á la vez paralelo á los rayos luminosos.

Conforme digimos en el n.° 203, trácese la tangente AB, en el punto A á la hélice máxima, así como su traza horizontal para con respecto á L′-T′; esta traza será el punto B, resultado de colocar sobre AB, la rectificación del arco circular AF, únase luego F con O, y la recta así producida OF prolongada, quedará cortada en D por la traza horizontal del plano tangente, quedando finalmente fijado el punto de contacto E por la intersección de la generatriz OA, con la paralela á la AB, conducida por el punto encontrado en D. Con estas construcciones hemos querido seguir paso á paso el procedimiento de inducción originado por las mismas propiedades de la superficie y que en su lugar se evidenciaron. Sin embargo, este mismo procedimiento, resulta de querer acudir en auxilio de la superficie, valiéndonos de una superficie de acuerdo de 2.° grado; á lo largo de la generatriz AO, insiguiendo el sistema general para las superficies alabeadas.

En efecto, podemos echar mano de un paraboloide hiperbólico cuyas directrices sean la vertical O ó sea el mismo eje

del helizoide, y la tangente AB á la hélice directriz en el punto A, escogiendo por plano director el mismo horizontal. Entonces será evidente que en el punto O-O' y en el A-A' los planos tangentes serán comunes al helizoide y al paraboloide; es que tienen también un mismo plano director, luego las superficies serán de acuerdo á lo largo de la recta AO-A'O'. Ahora hagamos resbalar la generatriz AO-A'O' por la vertical O y por la tangente AB, conservándose siempre paralela al plano horizontal, y detengámosla en el momento que pase por B; entonces la posición que tomará será la BO, cual prolongaremos hacia la parte opuesta. Mas como en esta posición viene cortada por la traza del plano tangente en el punto D, resulta que por este punto pasará la recta con que corta al paraboloide dicho plano tangente. Ahora atendiendo que el segundo plano director ha de ser paralelo á la AB y al eje O, luego será un plano vertical de dirección AB en su traza horizontal, y por lo tanto, conduciendo por D un plano vertical, paralelo al mentado últimamente, este DE, cortará en E á la generatriz escogida, y en su virtud será el punto de sombra ó de tangencia, toda vez que él está originado, por el encuentro de dos generatrices AE, DE, de sistemas distintos en el paraboloide hiperbólico.

Por estar situado este punto de sombra, en el interior del alma del tornillo, deducimos que quedará inútil para los efectos utilitarios de la sombra que necesitamos; y como quiera que de escoger una nueva generatriz y repetir semejante operación, nos expondríamos á resultados análogos, de aquí que para saber á que atenernos y no incurrir en operaciones inútiles que al fin no nos servirían; convendrá buscar un límite, el cual nos indique cual será la extensión mayor á que pueda alcanzar dicha sombra, y así obtenido, seguir ó abandonar la construcción de los planos tangentes, según indique el resultado.

213. Este límite, depende de la relación que entre sí guarden los ángulos que hemos conocido con las letras β y δ, el primero, el que forman las generatrices del helizoide con el plano horizontal, y el segundo el que forman con el propio plano los rayos luminosos, de ser ellos uno mayor ó menor que el otro, ó de ser iguales, la curva de sombra aparece de distinto modo, así como también, el límite de dicha sombra.

Veamos, pues, someramente estos casos, y consideremos en primer lugar que el ángulo $\beta > \delta$. Recordemos ante todo, que los planos tangentes al helizoide, en todos los puntos de una misma hélice, forman con el plano horizontal un ángulo constante.

Que si los puntos de tangencia se toman sobre una misma generatriz rectilínea, entonces el ángulo que forma cada plano con el horizontal es distinto, y que esta variación, está comprendida entre los valores de 90° y el ángulo β, el primero que corresponde á un plano vertical, cuyo punto de tangencia con el helizoide está en la intersección de la generatriz con el eje de la superficie, y el segundo se refiere al punto de tangencia que situado sobre la generatriz escogida, se halla á una distancia infinita (n.° 204).

Si concebimos ahora, que por cada punto de la mencionada generatriz rectilínea, pasa la hélice correspondiente, claro está, que inferiremos que cada hélice llevará consigo, una agrupación de planos tangentes igualmente inclinados con el plano horizontal; y así diremos que existe una hélice, cuyos planos tangentes forman ángulos de 90° con el plano horizontal. (En este caso la hélice se confunde con el eje), otra cuyos planos estarán inclinados del ángulo β, (hélice situada al infinito), y finalmente, otras hélices intermedias, entre las dos mencionadas, que cada una de ellas tendrá una agrupación de planos tangentes al helizoide, cuyas inclinaciones con el plano horizontal, estarán comprendidas y pasarán sucesivamente de unas á otras, por todos los valores angulares, comprendidos entre los ángulos de 90° y β.

Tengamos también á la vista, el procedimiento (n.° 204) del *cono director*, para cuando se querían encontrar puntos de sombra situados sobre una hélice determinada de la superficie. Hacíamos bajar el punto incógnito hasta confundirse (fig. 172), con el inicial B-B', en él construíamos el plano tangente y luego éste lo movíamos helizoidalmente, hasta que se colocara en su sitio. Mas para ello descomponíamos dicho movimiento en dos, uno de revolución, y otro de traslación vertical. Para llevar á cabo el primer movimiento, recurríamos al cono director, cuyo ángulo á la base, era siempre algo menor que el ángulo β. (Pues sabido es, que si desde un punto situado sobre un plano, se trazan en él rectas distintas, todas ellas formarán con un plano horizontal, ángulos diversos, pero que todos serán mayores, que

el que forma la correspondiente perpendicular á la traza horizontal, ó sea línea de máxima pendiente).

Así pues, para cada hélice, teníamos su respectivo cono director, y en él, estaba reducida la cuestión á trazarle planos tangentes paralelos, al rayo luminoso. Si concebimos según ello, efectuadas todas las operaciones referentes á todas las hélices de la superficie comprendidas entre 90° y β=50° (suponiendo ser este ángulo el que forman las generatrices con el plano horizontal), entonces claro está, que habremos tenido que pasar por una serie de conos, que fluctuarán en el ángulo de su base entre 90° y 50° (este último correspondiente á la hélice del infinito) en cuyo caso, suponiendo ser 30° el ángulo δ, al trazar por el vértice (ó vértices) de dichos conos el rayo luminoso, siempre este, cortará al plano de su base en un punto exterior, desde el cual, se la podrán trazar dos tangentes, y así obtener dos puntos de la línea de sombra, cuales son los *h*, *h'*, de la (fig. 172'), y como el número de conos se extiende para una serie de puntos, en que dos de ellos (uno á derecha y otro á izquierda), se hallan al infinito con sus correspondientes hélices, y en este caso la curva se compondrá de dos ramas infinitas, cual es el caso de la fig. 172'.

2.° Caso β=δ, los dos ángulos iguales á 50° por ejemplo. En este caso, al determinar los planos tangentes, resolveremos la cuestión con una serie de conos que fluctuará su ánguló de base de 90° á 50°, de modo, que interin no alcancemos al cono de 50°, siempre podremos disponer de dos puntos de tangencia, los cuales serán originados por la posibilidad de trazar dos tangentes á la base del cono, desde el punto exterior, traza horizontal del rayo luminoso, más estos dos puntos, es visible que van aproximándose más y más á cada operación, hasta que en el límite cuando se acuda al cono de 50°, que será correspondiente á la hélice de esta inclinación y trasladada al infinito, entonces los puntos de tangencia *h'*-*h''*, fig. 172', tenderán á reunirse al infinito cual lo hacen dos líneas paralelas, de modo que la curva tendrá una sola rama y esta infinita.

3.° Caso en que β<δ, y dando por supuesto que β=30° y δ=50°. En este caso es evidente que como existen hélices: cuya inclinación fluctúa entre 90° y 30° entre ellas, existe la que afecta la inclinación de 50°, la cual como todas las demás tendrá su respectivo cono director inclinado de igual

cantidad, para con respecto de sus generatrices con el plano horizontal; y en este caso claro es que al ir á trazar un rayo luminoso, por el vértice, este rayo se confundirá con una de sus generatrices, por lo cual, no más cabrá una tangente á la traza del cono conducida por el pie del rayo luminoso, resultando con ello, que no más encontraremos un punto de sombra situado en la hélice que hemos llamado de 50° de inclinación, y que conoceremos también por hélice límite, pues al llegar á ella la curva de sombra, queda cerrada, no existiendo ya más puntos referentes á las hélices de 50° para abajo. La curva pues no admite en este caso ramas infinitas, queda como á curva cerrada. Lo cual se comprende perfectamente, pues todos los conos auxiliares que trazaríamos de desde 50° á 30° de inclinación, el rayo luminoso que pasara por el vertice, iría á encontrar al plano de base en un punto interior de la circunferencia de la propia base, no siendo entonces posible el trazado de tangente á dicha curva; para semejantes hélices pues hay completa iluminación. Esta hélice inclinada de 50°, en el caso presente, es la que hemos llamado límite y á partir del cual, ya no hay puntos de sombra.

Si pues buscamos esta determinada hélice en la fig. 174, ella nos indicará una vez obtenida, hasta donde alcanza la extensión de la sombra.

Esta curva, la buscaremos prontamente, si partimos de su cono director; la inclinación de este cono la tenemos, es la misma que forma el rayo luminoso con el plano horizontal, toda vez que aquí nos encontramos en el tercer caso, de los que hemos examinado, cuando β<δ, esto es β=θ porque las generatrices del helizoide actual son perpendicular al eje, ó lo que es lo mismo paralela al plano horizontal. La hélice que vamos á determinar habiendo de tener la inclinación del ángulo δ, procederemos del siguiente modo. Al objeto de facilitar la operación escojamos un punto O-O', sobre el eje, cuyo punto de la proyección vertical, sea al mismo tiempo proyección de una recta generatriz rectilínea del helizoide, que se halle en disposición perpendicular al plano vertical, por ejemplo la GF. Conduzcamos ahora por O-O', una recta OC''-O''C''', paralela al rayo luminoso la cual cortará al plano horizontal de operaciones, (que lo escogemos ahora en L''T'', en el punto C''-C'''. Si hacemos girar, luego esta recta en torno del eje O-O'O'', formaremos con evidencia, un cono, el cual

no hay duda ninguna, que tendrá todos sus planos tangentes, paralelos á los que corresponden á la hélice límite; luego será un cono director. En su virtud, si trazamos á dicho cono, el plano tangente que contenga la generatriz O″-GF, este plano tendrá por traza horizontal la recta MH, paralela á GF.

Mas por otra parte, teniendo en cuenta, que el punto de origen de la hélice exterior, lo tomamos en el punto *c′-b*, se verá que al querer trazar la tangente FI, en el punto F, á dicha hélice, esta tangente, cortará al plano horizontal L″T″, en el punto I, á una distancia de F, igual al cuadrante F*b*, rectificado, resultando de ello que uniendo, I con O, la recta OI, que así resulte, contendrá, según sabemos (n.º 203) los pies de las tangentes á las hélices, que pasen por todos los puntos comprendidos entre F y O, luego claro está que contendrá también el de la tangente á la hélice límite; si logramos pues encontrar este pie H, con sólo luego trazar una paralela HG á la IF, obtendremos el punto G, por donde pasa la hélice y por lo tanto su radio OG, quedando con ello completamente determinada.

La cuestión en este estado, recordemos tan sólo, el procedimiento empleado en el sistema de inducción, cuando nos proponíamos encontrar el punto de tangencia, cuando nos era conocido el plano tangente, y de allí deduciremos que siendo aquí, el plano tangente, que contiene á la generatriz FO-O″, el que es tangente al cono referido, y cuya traza de dicho plano es la recta M′H, esta en el caso especial en que nos hallamos, es perpendicular á la IF, y por lo tanto esta misma traza encontrará en proyección horizontal, á la IO, siendo el punto de encuentro H, el que nos da en él, el pie de la tangente y por lo tanto, la paralela GH, á la IF nos dará definitivamente, el punto de tangencia G; por lo tanto la circunferencia del radio OG, será la proyección de la hélice límite, esto es aquella en que los planos tangentes al helizoide estarán inclinados para con el plano horizontal, el ángulo δ de los rayos de luz.

Obsérvese bien, que efectivamente el punto H, será el pie de la tangente GH, toda vez que las operaciones son tales, que siendo FI la rectificación del cuadrante F*b*, la GH, lo será del cuadrante GQ.

Por lo tanto, la hélice límite, vemos que cae entera dentro el alma del tornillo, de lo cual inferimos que no habrá puntos utilitarios de sombra, y habremos de renunciar á resolver el problema de los planos tangentes.

214. Semejante resultado, hubiéramos también obtenido de adoptar el procedimiento de la sección de base, para la determinación de dicha sombra. En efecto, recordémosle brevemente. Fijemos ante todo los parámetros, así el que corresponde al círculo paramétrico de tangencia, cuyo radio es $p=h$ cot. β, es aquí infinito pues $\beta=o$. En cuanto al parámetro de sombra que nos da el polo de sombra P, queda como antes, en todos los helizoides, esto es *h* cot. δ; en la fig. A, consta la construcción del paso unitario *h*, y luego conociendo éste; la del parámetro de sombra en la cantidad lineal *cd*, con arreglo á esta cantidad lineal, fijemos el polo P, de sombra en la fig. 174′, tomando perpendicularmente, á R^h y desde O la línea OP igual á dicho parámetro. Ahora las normales de la sección de base (Espiral de Arquímedes), son todas las rectas que parten del punto P, luego insiguiendo, el sistema explicado anteriormente en el tornillo de filete triangular, pero adoptando la marcha de las construcciones para los datos de nuestro conoide de plano director, tendremos que los puntos de sombra vendrán dados por los pies de las perpendiculares trazadas desde el polo P, á los distintos radios que pasen por el punto O, y así los puntos E, J, K′, etc., serán los puntos de sombra. Será pues un lugar geométrico una circunferencia de centro, el punto medio del parámetro de sombra, y por radio este semiparámetro.

Siendo esta circunferencia la línea de sombra, y de ella el punto P el más separado del eje, infiérese que la hélice límite será en proyección horizontal la circunferencia de radio OP, la cual, como anteriormente habíamos deducido, está comprendida dentro el contorno del alma del tornillo *.

* Se infiere del resultado obtenido, que de ser aprovechable la línea de sombra, producida en el helizoide de plano director, se encontraría ser ella una hélice, proyectada horizontalmente según la circunferencia, cuyo diámetro es el parámetro de sombra. Semejante resultado se apoya en dos interesantes teoremas debidos á Teodoro Olivier, cuyos son:

1.º ***Cuando una generatriz de un cilindro de revolución se confunde con el eje de una superficie del filete del tornillo rectangular, la intersección de estas dos superficies es una hélice, cuyo paso es la mitad del paso del helizoide.***

En efecto, sea la lám. 31, fig. 174′, lám. 31. O-O′Z el eje y AB-A′B′B″, la hélice directriz del helizoide; veamos ahora cual será la intersección de esta superficie con el cilindro vertical, cuya base sea el círculo de diámetro AO.

Consideremos para ello el punto *m-m′* en que una generatriz tal como OM-O″M′ corta á este cilindro. Es evidente que se encuentra á la misma altura que el M-M′ de

Las sombras, según las superficies que restan, son ahora cuestión facilísima y entran las operaciones en otras elementales que hemos visto en el decurso de este tratado. Así, para los cilindros rectos que forman ya las caras laterales ó exteriores del tornillo, ó ya también, el correspondiente al alma del mismo, serán las verticales nn'_1, $n'_2n'_3$... etc., para el primero, y las verticales $m'\gamma'$, $m'_1\gamma'_1$... etc., para el segundo ambas líneas de contacto de ambos cilindros, con planos tangentes paralelos al rayo luminoso, y cuyas trazas horizontales, serán las rectas paralelas á R^h y tangentes en n y m á los círculos de base.

Luego hay la sombra arrojada de las hélices salientes sobre el cilindro del alma, así para un punto; trácese el rayo luminoso pq-$p'q'$ que parta de una hélice saliente, este rayo corta al cilindro ae, cuya proyección horizontal q, hará conocer la vertical q'. Análogamente se determinará la línea $\tau'\sigma'$, sombra de ST-S'T', así como los arcos $\sigma'\varphi'$ y $\varphi_1\psi_1$, ambos sombras de la recta TU.

215. La sombra que cae arrojada (fig. 174) sobre la cara alabeada del filete superior $c'_1d'_1g'_1h'_1$, la encontraremos valiéndonos de proyecciones oblicuas ó de contraproyección de la arrojada sobre el plano horizontal; así escojamos un plano horizontal arbitrario L‴T‴ las líneas $\mu\alpha''$, T″U″, $\lambda''\beta''$, sombras

la hélice directriz, así como el ángulo ACm es doble del AOM (ángulo en la planta que forma la generatriz escogida con la inicial AO); pero por otra parte sabemos, que la ordenada y la cantidad angular AOM ó sea abscisa curvilínea; están siempre en una relación constante, luego se inferirá que la ordenada del punto m y su abscisa curvilínea; tomando ahora como á origen de dichas coordenadas el punto C, centro del círculo AmO, están también en una constante relación, pero que ahora será igual á la mitad de la precedente; resultando de aquí que el lugar geométrico de los puntos m-m' en sus posiciones distintas, es una hélice, cuyo paso es la mitad de la hélice directriz. Así una revolución de la hélice excéntrica cortará en dos puntos á cada una de las hélices generatrices, cuya distancia al eje sea menor que OA, y será tangente en A á la que se desarrolla en ANB.

2.° ***En un punto de la superficie conoide del tornillo de filete rectangular, es susceptible de pasar por él, infinidad de hélices excéntricas, siendo dichas curvas tangentes á las hélices generatrices del helizoide en los puntos de la sección hecha por un plano principal, tal como FH.***

Tomemos para ello, fig. 174″, lám. 31, el punto D-D′ del helizoide, trazando luego dos rectas perpendiculares á OD, la una pasando por D, y la otra por el punto medio L de la misma OD. Ahora todo punto de esta última tal como E, será el centro de un círculo que pasará por los puntos O y D; y este círculo será tangente en F, á aquel otro círculo de centro O y de radio OF.

respectivas de las originarias $m'_2\psi'_1$, TU-T′U′, $c'_1\beta'_1$. La intersección β'' dará á conocer el punto β', en donde la sombra de la arista inferior de la cabeza del tornillo, alcanza ó corta á la hélice en cuestión.

Considérense luego en el helizoide distintas generatrices rectilíneas que se hallen comprendidas, entre los puntos m'_2 y β', construyendo sus sombras sobre el plano L″T″, ahora los puntos donde estas últimas encuentren á la línea quebrada $\mu\alpha''\beta''$, serán las proyecciones oblicuas de los puntos, que situados sobre las generatrices rectilíneas escogidas, pertenecerán á la línea de sombra arrojada en $m'_2\beta'$. De modo que si bien se considera, esa línea se compondrá de dos partes, una la que arroja la generatriz vertical $m'_2\psi'_1$ del cilindro del alma, y la otra en muy pequeña parte, la que arroja la horizontal ψ′U′... el trecho que le corresponda.

De igual modo encontraríamos la arrojada $m'_1\delta'$ sobre el segundo filete, la cual tiene por originaria la vertical $m'_1\gamma'_1$, y el trecho de hélice saliente que le corresponda, y aquí el plano horizontal más á propósito para efectuar las operaciones será el L″T″, el cual se ha escogido más bajo que el primero L‴T‴, igual al paso de las hélices, pues así, la línea $\lambda''\delta''$ sirve de sombra de la hélice $c'\delta'$.

Constrúyase luego la curva $\gamma''\varepsilon''$, sombra del arco $b'_1f'_2$, y trazando como antes las proyecciones oblicuas de algunas generatrices del helizoide, en el trecho que consideramos estas últimas, encontrando á la $\gamma''\varepsilon''$ en distintos puntos, ellos contraproyectados oblicuamente, sobre las generatrices escogidas, nos irán dando la curva de sombra arrojada $m'_1\delta'_1$.

216. Podríamos también ocuparnos de la sombra del helizoide alabeado general, esto es; aquel que está engendrado por el movimiento helizoidal de una recta cualquiera, que no encuentre al eje del giro helizoidal. (Esta recta así considerada, se conserva tangente constantemente á un cilindro que se llama *alma* del helizoide; luego resbala por una hélice situada sobre dicho cilindro; pero, sin ser tangente á ella, pues si así fuera, tendríamos el helizoide desarrollable; y finalmente el ángulo β, que hace con el plano de la sección recta del cilindro la generatriz de que se trata, es siempre el mismo); mas daríamos quizá demasiada extensión á nuestro trabajo; y por otra parte, viene llenada dicha laguna, continuando como apéndice del presente capítulo, el concienzudo

trabajo que sobre la sombra de los helizoides hizo nuestro apreciado y aventajado alumno D. Félix Cardellach, hoy distinguido Arquitecto, Ingeniero y Catedrático por oposición en la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona.

En dicho trabajo, empléase exclusivamente el método analítico, deduciendo fórmulas que luego corrobora con la geometría cinemática; y para ello empieza partiendo de la ecuación más general de los helizoides, la cual deduce para un helizoide cualquiera, esto es, el que hemos definido al principio de este párrafo, y una vez establecida, infiere fácilmente las demás que corresponden á los casos particulares, referentes á los helizoides que sirven para constituir el filete de los tornillos para roscas triangulares ó rectangulares, en donde la arista de estricción quedará reducida al simple eje de la superficie, anulándose el alma del helizoide, pasando los helizoides generales á conoides helizoides, ya de cono ó ya de plano director.

Simplifica también la cuestión, introduciendo dos helizoides desarrollables que llama *derivados*, y de ello infiere los radios centrales derivados, el uno en función del ángulo que forman las generatrices del helizoide del dato con el plano perpendicular al eje, y el otro en función del ángulo que forman con el mismo plano los rayos luminosos.

Estos radios son los que proporcionan los círculos que nosotros hemos llamado círculos paramétricos de tangencia el uno, y círculo de sombra el otro, y con ellos los parámetros de tangencia y de sombra, así como el polo que hemos llamado p para el uno y el polo de sombra P para el otro, á cuyos puntos los denomina el Sr. Cardellach, extremos de los radios centrales.

Finalmente, una detenida discusión sobre las varias formas que afecta la curva de sombra en la proyección horizontal, según que las originen los distintos casos del dato, relacionados con la dependencia que entre sí tengan los ángulos de las generatrices del helizoide, y las correspondientes al cilindro de sombra ó sea de los rayos luminosos, para con respecto al plano horizontal (ya que se escoge el eje del helizoide perpendicular á dicho plano), dan motivo para ilustrar más la índole de dichas curvas en proyección horizontal, descubriendo, cuando son abiertas ó cerradas, y el fácil procedimiento para deducir las asíntotas de las primeras, ya sea una asíntota para una sola rama, ó ya de las dos cuando este número corresponde á las ramas que se extienden por ambos lados.

En suma, que es un trabajo digno de estudio que puede reportar gran servicio en las aplicaciones de la índole de que tratamos, y que nosotros con sumo gusto continuamos para que sirva de complemento al presente capítulo, dice así:

213. "Líneas de sombra propia y planos tangentes de los helizoides alabeados. Por pertenecer estos helizoides á la categoría de las superficies alabeadas, claro es que si queremos investigar en ellos la línea separatoria de luz y sombra, no habrá más que aplicarles la teoría general de los planos tangentes á dichas superficies escogiendo estos planos de modo que pasen por el foco luminoso, y tendremos la seguridad de que los puntos de tangencia que así obtengamos pertenecerán á la citada línea de sombra propia ó separatriz del helizoide en cuestión.

Mas como la aplicación de la aludida teoría, con todo y ser fácil, es eminentemente laboriosa por el gran número de generatrices del helizoide, de que debemos disponer y cuyas intersecciones con el plano tangente de que se trate se ha de determinar, resulta que se ha procurado simplificarla, sustituyendo al efecto y por un momento á la superficie alabeada propuesta, otra de 2.º grado alabeada también y de acuerdo con la primera á lo largo de la generatriz que ha de contener el punto de sombra que se busque.

Realmente esta sustitución nos simplifica de un modo notabilísimo el problema, no obstante lo deja aún muy penoso, sobre todo para aquellos casos en que la separatriz exija para ser trazada, el conocimiento de un buen número de puntos de sombra.

Mr. Gascheau, aunque sin inventar ningún método ha contribuído, empero, poderosamente á acabar de simplificar el problema que nos ocupa, merced á haber observado ciertas propiedades homológicas en el plano de proyección horizontal (suponiendo el eje del helizoide vertical) entre las líneas determinativas del punto de sombra. De tal modo quedó simplificada la cuestión con este último paso, que ha constituído por mucho tiempo el único medio práctico que se ha seguido para resolver el laborioso problema de la investigación de la separatriz de los helizoides conoides, y no solamente en el terreno práctico, sino hasta en el didáctico, es decir, que en las doctrinas de sombra y estereotomía sigue aplicándose este método como uno de los aún en boga y sin relegarlo por tanto al olvido.

Empero, la tendencia general que observamos, al seguir siquiera sea al extremo de su estela, al progreso científico, es la generalización de las cuestiones, y en consecuencia la simplificación de las mismas haciendo depender á todas las de una misma índole de una sola compleja, la cual integrándolas á todas, las satisface y resuelve cumplidamente en sus diversos casos particulares. Pues bien; esto es también lo que se ha verificado en el problema geométrico de la investigación de la separatriz en un helizoide cualquiera, y á ello han venido á ayudar eficazmente las bellas consecuencias de las teorías de Chasles y sobre todo la moderna geometría cinemática.

Mas como estas mentadas ciencias con todo y sus grandes progresos, no son al fin y la postre más que traducciones, aunque elegantísimas, de lo que por sí sola puede expresar la geometría de Descartes, convenientemente desarrollada, y por otra parte siendo esta ciencia mucho más conocida, por su antigüedad, que las primeras, se infiere que el estudio y aplicaciones de las consecuencias de Chasles y de la cinemática se hacen pesados y dificultosos á veces, sobre todo para las aplicaciónes llamadas prácticas, y á esto ayuda el que en los programas de preparación de nuestras carreras especiales no entre con extensión la materia á que aludimos. A propósito de esto, nos parece justo observar que no es censurable ni mucho menos, que en los citados programas no entren con demasiada extensión las modernas teorías, pues que siendo exclusivamente utilitario el fin de las carreras de aplicación, entendiendo aquí por utilidad, la material, es decir, la que resulta de las aplicaciones de las ciencias exactas, se infiere que es preciso desterrar de los programas de las asignaturas toda doctrina que no tenga aplicación práctica á la carrera que es objeto de los afanes del alumno, y de no admitir esto, tendríamos dado el progreso de las ciencias, que hacer cada año más lato y profundo el curso de una asignatura, lo que no tendría razón de ser, supuesta la constante duración de la vida del hombre y capacidad de su cerebro; en una palabra que debemos sacrificar cada día más el goce que experimenta el alma con el conocimiento de la verdad pura, gracias al sabio precepto de Hipócrates: *ars longa, vita brevis.*

Todas estas razones son, sin duda de ningún género, los únicos motivos, por los cuales permanecen á veces en la obscuridad, ciertos principios ó deducciones de las ciencias modernas, y en estos casos es cuando conviene traducirlos al lenguaje clásico (digámoslo así,) é introducirlos de este modo en el campo de las aplicaciones despojadas por completo de toda su aureola de ciencia moderna, cuyo destello, de todos es sabido, molesta las más de las veces á los que están acostumbrados á una constante doctrina más ó menos generalizada.

Sin pretender ahora nosotros, ni remotamente, dar importancia alguna á estas desaliñadas líneas, decimos que presentando la cuestión que encierran, creemos cumplir un doble objeto: primero, mostrar con el lenguaje clásico á que antes aludíamos, un importantísimo punto de las aplicaciones de la geometría descriptiva, punto novísimo, á la par que hermoso por la elegancia con que trata el problema á que se refiere; y segundo, creemos con nuestro trabajo dar una demostración innegable sobre la absoluta pureza de la geometría cinemática, ya que habiéndonos fundado en ella para enunciar la regla que más tarde sentaremos relativa á la investigación de la sombra de los helizoides alabeados en general, ha venido la nunca contradicha geometría de Descartes, aseverárnosla, como veremos, de la manera más absoluta y precisa que darse pueda; y siendo así que las fórmulas matemáticas traducen siempre verdades eminentemente puras, concordando como así demostraremos, nuestras fórmulas con lo que nos dice la geometría cinemática, acabará ésta por figurar una vez más dentro del campo de las ciencias filosóficas, exactas y puras.

Hechas las precedentes observaciones, vamos desde luego á tratar el problema cuya resolución nos imponemos, y que tiene por objeto

solucionar la entretenida cuestión, en todas las obras de sombras y estereotomía expuesta, relativa á la investigación y discusión de la línea separatoria de luz y sombra de los helizoides conoides, y de paso la haremos extensiva al helizoide general, ó sea al que por arista de astringencia tiene á una hélice de radio finito. Y para no contradecir cuanto llevamos sentado nos apoyaremos para la exposición del punto á que aludimos, única y exclusivamente en la Geometría Analítica.

Mas como para estudiar una propiedad cualquiera ó cuestión inherente á una superficie, por medio de la geometría analítica, se hace forzoso el tener primero su ecuación, y la del helizoide más general, que nosotros sepamos, no está en ninguna parte deducida, nos vemos absolutamente obligados á investigarla. Pero como la acuación del helizoide general de querer hallarla por la marcha ordinaria que se sigue en analítica para la determinación de las ecuaciones de superficies, integra un caso muy complejo de eliminación, según resulta de los tanteos que nosotros hemos verificado para resolver así la cuestión, por esto es que hemos torcido el procedimiento general procurando referir los datos de tal modo, que figuren en las ecuaciones solo dos parámetros en vez de los cuatro que parece deben entrar.

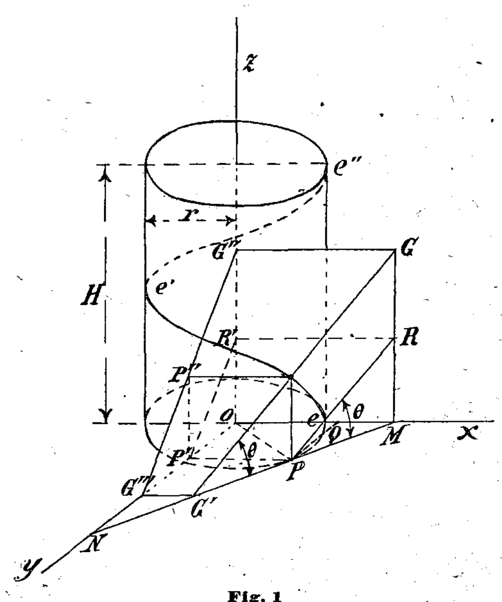


Fig. 1

Después de apuntar solamente la dificultad que este problema nos ocasionaba, vamos en seguida á exponer y desarrollar el método que hemos seguido, omitiendo desde luego toda otra observación relativa á este punto, y que pudiera tomarse como pincelada de efecto para hacer resaltar el escaso mérito de nuestro trabajo.

Para orientar mejor la cuestión, definiremos al helizoide general, como la superficie engendrada por una recta, que *tocando* siempre á un cilindro de revolución en puntos de un hélice cualquiera sobre él arrollada, va formando ángulo constante con un plano normal al eje del cilindro.

Así definida la superficie, tomemos ejes, coordenamos cartesianos y rectangulares, siendo (figura 1) el eje del cilindro que contiene á la hélice directriz el mismo de las Z, sea r el radio del cilindro; $ee'e''$ la hélice directriz y H su paso. Sean además GG′ una generatriz cualquiera y θ el ángulo que forma con el plano de las $x\,y$ perpendicular al eje del cilindro.

Fijados así los datos, tendremos como ecuaciones de la hélice directriz:

$$\begin{cases} z = \alpha\, r \text{ arc. tg. } \dfrac{y}{x} \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

siendo $\alpha = \dfrac{H}{2\pi r}$

La proyección sobre el plano $x\ y$ de la generatriz, tendrá por ecuación:

$$[\beta] \qquad y = \varepsilon\, x \pm r\sqrt{1+\varepsilon^2}$$

siendo ε el coeficiente angular de dicha proyección y representando $\pm r\sqrt{1+\varepsilon^2}$ la ordenada en el origen, de la tangente á la circunferencia de la base del cilindro (*).

Observemos ahora la (figura 1) y recordando los valores citados obtendremos:

$$\overline{OM} = \mp \frac{r\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \quad ; \quad \overline{ON} = \pm\, r\sqrt{1+\varepsilon^2};$$

$$\overline{PM} = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{OP}^2} = \frac{r}{\varepsilon} \qquad [I]$$

sin afectar de doble signo á esta última expresión por no tener que considerar á $\overline{PM}$ más que en valor absoluto.

Ahora bien, los triángulos OPQ y OMP dan $\dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{PM}{OM}$, de donde

(*) Efectivamente, para que una recta de coeficiente angular ε y n ordenada en el origen sea tangente al círculo $x^2 + y^2 = r^2$ se ha de verificar:

$$\varepsilon^2 n^2 = (\varepsilon^2 + 1)(n^2 - r^2) \text{ de donde } n = \pm r\sqrt{1+\varepsilon^2}$$

$PQ = \dfrac{\overline{OP} \cdot \overline{PM}}{OM}$ expresión que teniendo en cuenta los anteriores valores [I], y observando que $\overline{OP} = r$ se convierte en:

$$\overline{PQ} = \mp \frac{r}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \qquad [II]$$

Tracemos ahora por el punto P una paralela P R á la generatriz GG′ y tendremos, siendo R su traza sobre el plano $z\ o\ x$:

$$\overline{RM} = \overline{PM} \text{ tg. } \theta = \frac{r}{\varepsilon} \text{ tg. } \theta. \qquad [III]$$

Si nosotros observamos ahora que los valores [II] y [III] son precisamente los segmentos que sobre los ejes oy y oz intercepta la P′R′, proyección de PR sobre el plano zoy, tendremos que la ecuación de dicha proyección será:

$$\frac{y}{\overline{PQ}} + \frac{z}{\overline{MR}} = 1.$$

Ahora bien, G″ G‴ (proyección de GG′ sobre el plano zoy), paralelo á P′ R′ tendrá evidentemente por ecuación:

$$\frac{y}{\overline{PQ}\,\sigma} + \frac{z}{\overline{MR}\,\sigma} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{y}{\overline{PQ}} + \frac{z}{\overline{MR}} = \sigma;$$

siendo σ la relación de los segmentos OG‴, OP′ y OG″, OR′. Y poniendo por fin en esta última expresión los valores [II] y [III] resulta

$$\frac{\varepsilon z}{\text{tg. } \theta} \mp y\sqrt{1+\varepsilon^2} = \sigma\, r;$$

ecuación que unida á la [β] nos da el sistema

$$[\gamma] \qquad \begin{cases} y = \varepsilon\, x \pm r\sqrt{1+\varepsilon^2} \\ \dfrac{\varepsilon}{\text{tg. } \theta}\, z \mp y\sqrt{1+\varepsilon^2} = \sigma r \end{cases}$$

que representa las proyecciones de la generatriz GG′ sobre los planos xy y zy.

Vamos á hallar ahora la relación entre los parámetros de la generatriz y de la directriz del helizoide.

Obsérvemos que la ordenada z de la directriz es la P′P″ de la figura 1 cuyo valor así obtendremos:

$$\frac{\overline{P'P''}}{\overline{P'G'''}} = \frac{\overline{OG''}}{\overline{OG'''}} \text{ ó bien } \frac{\overline{P'P''}}{\sigma\,\overline{OP'} - \overline{OP'}} = \frac{\sigma\,\overline{OR'}}{\sigma\,\overline{OP'}}$$

ó lo que es lo mismo: $\dfrac{P'P''}{\sigma - 1} = \dfrac{r}{\varepsilon}\,\text{tg.}\,\theta,$

luego:

$$P'P'' = z = (\sigma - 1)\frac{r}{\varepsilon}\,\text{tg.}\,\theta. \qquad [IV]$$

Por otra parte el valor $\dfrac{y}{x}$ de la hélice directriz es (fig. 1):

$$\frac{y}{x} = \frac{PQ}{\pm\sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{QP}^2}} = -\frac{1}{\varepsilon}; \qquad [V]$$

valor recíproco y de signo contrario al que resultaría para la paralela á PM trazada por el origen O, lo cual efectivamente debía suceder por corresponder este valor á OP y por ser OP perpendicular á PM.

Combinando ahora [IV] y [V] con la ecuación de la directriz queda:

$$\alpha\, r \text{ arc. tg.}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\sigma r}{\varepsilon}\,\text{tg.}\,\theta - \frac{r}{\varepsilon}\,\text{tg.}\,\theta \qquad [\delta]$$

relación que queríamos buscar, y que como vemos no contiene más qué los parámetros σ y ε conforme con la idea en un principio apuntada.

Del sistema antes hallado [γ]

$$\left\{\begin{array}{l} y = \varepsilon\, x \pm r\sqrt{1 + \varepsilon^2} \\ \dfrac{\varepsilon}{\text{tg.}\,\theta}\, z \mp y\sqrt{1 + \varepsilon^2} = \sigma r \end{array}\right.$$

se deduce:

$$\varepsilon = \frac{xy \pm r\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{x^2 - r^2}, \text{ y}$$

$$\sigma r = \frac{z}{\text{tg.}\,\theta}\;\frac{xy \pm r\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{x^2 - r^2} \mp$$

$$\mp \frac{\sqrt{(x^2 - r^2)^2 + (xy \pm r\sqrt{x^2 + y^2 - r^2})^2}}{x^2 - r^2};$$

valores que sustituídos en la relación [δ] ofrecen:

$$\frac{H}{2\pi}\text{ arc. tg.}\frac{r^2 - x^2}{xy \pm r\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}} = z \mp \left[xy\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} + \right.$$

$$\left. + r\,(x^2 + y^2 - r^2)\right]\frac{\text{tg.}\,\theta}{xy \pm r\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}$$

ecuación del helizoide reglado más general.

De esta ecuación fácilmente se deducen la del helizoide conoide y la del helizoide de plano director. En efecto, anulando en la (fig. 1) el radio r del cilindro, se comprende que el helizoide general degenerará en el de tornillo de filete triangular; luego haciendo en la expresión anterior $r = 0$ queda:

$$\frac{H}{2\pi}\text{ arc. tg.}\frac{-x}{y} = z \mp \text{tg.}\,\theta\sqrt{x^2 + y^2} \qquad [VI]$$

ecuación del helizoide conoide.

Por otra parte, si además de la condición expuesta, de $r = 0$, supusiésemos que la generatriz del helizoide es paralela al plano de las xy (fig. 1), la superficie degeneraría en la del tornillo de filete rectangular; esto equivale en definitiva á hacer en la ecuación general, esta doble convención:

$$r = \theta = 0;$$

y así queda:

$$\frac{H}{2\pi}\text{ arc. tg.}\frac{-x}{y} = z$$

ecuación del helizoide de plano director.

Teniendo ya las ecuaciones de los helizoides, desde luego podemos plantear nuestra cuestión, demostrando al efecto un teorema cuyo enunciado simplificaremos con las siguientes definiciones:

Llamemos D al helizoide dado y cuya separatriz se trata de investigar, y continuemos llamando H al paso de su hélice directriz $ee'e''$..... (fig. 2).

Supongamos además el plano horizontal de proyección, normal al eje del helizoide D, (en caso contrario lo llevaríamos á este caso por un cambio de planos de proyección).

Imaginemos ahora un helizoide desarrollable de común eje con el D y cuyas generatrices sean respecto al plano normal al eje igualmente inclinadas que las de D, y cuya arista de retroceso tenga por paso el mismo paso H que la directriz del D

A este helizoide le llamaremos *derivado*, y á la proyección horizontal R del radio del cilindro que contiene su arista de retroceso (figura 2), le llamaremos *radio central derivado.*

Imaginemos además el helizoide *derivado* de otro cualquiera cuya hélice directriz tenga por paso H y cuyas generatrices formen con el plano horizontal ángulo igual al que con dicho plano forma el rayo luminoso, (*) y llamemos R_L al radio central derivado de dicho helizoide derivado.

Así las cosas, podemos ya enunciar el siguiente teorema que llamaremos de los *helizoides derivados.*

TEOREMA.—*La proyección horizontal del punto de sombra propia, situado sobre la proyección* G *de una generatriz cualquiera de un helizoide dado* D *(fig. 2), se encuentra en la intersección de di-*

(*) Suponemos rayos paralelos por ser el caso ordinario.

cha G *con la recta que une los extremos* Q y P *de los radios centrales derivados de* R *y* R_L *normales respectivamente á* G *y á la proyección* l *del rayo de luz.*

En efecto: lograremos demostrar este teorema si alcanzamos determinar las coordenanzas *xyz* (fig. 2) del punto de sombra en cuestión por dos procedimientos: uno, el que presentamos, y otro, el general de la geometría descriptiva, y si los dos sistemas de coordenadas que así obtengamos son idénticos, el teorema no dará lugar ya á duda alguna.

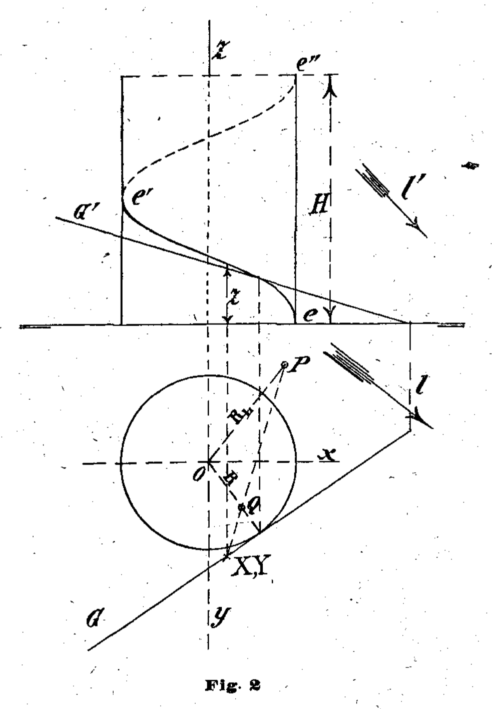


Fig. 2

Mas como es laboriosísima la marcha que indicamos, al objeto de no hacer demasiado extenso este trabajo, aplicaremos esta demostración al helizoide de cono director, en el convencimiento empero, de que el teorema es absolutamente general y de que el mismo resultado da la demostración que va á seguir, aplicada á uno que á otro helizoide, y que por tanto, repetimos, solo en obsequio á la brevedad, partiremos del conoide y no del helizoide general, cuya ecuación hemos de intento hallado en las páginas precedentes por si se quisiese á ella aplicar el método que exponemos, pues que de no regirnos esta idea, hubiésemos podido directamente buscar la ecuación de uno de los he-

lizoides particulares imponiéndonos así un problema mucho menos penoso.

Coordenadas x y z del punto de sombra por el método de los helizoides derivados.—Es muy fácil hallar estas coordenadas; para ello no hay más que hallar la posición del punto P (fig. 2), que no depende más que del rayo luminoso y es por tanto fijo para cada problema; después buscar las coordenadas de Q y hallar la intersección de la recta PQ con G.—Necesitamos pues ante todo hallar los valores de los radios centrales derivados R_L y R, lo cual no lleva dificultad alguna, pues basta recordar las definiciones que hemos dado de helizoide derivado, y por tanto, suponiendo (fig 4), que *ee'e''* es una hélice directriz de un helizoide reglado alabeado cualquiera y que tiene por paso H; la hélice $\delta\delta'\delta''$ cuyos elementos están respecto al plano horizontal inclinados igualmente (γ) que el rayo luminoso *ll'*, esta hélice decimos constituirá la arista de retroceso del helizoide derivado del primero, y por tanto al radio R_L del cilindro que contiene á dicha hélice $\delta\delta'\delta''$ valdrá:

$$R_L = \frac{H}{2\pi} \cot.\ \gamma.$$

Análogamente el radio R central derivado del helizoide dado por la cuestión, D, valdrá:

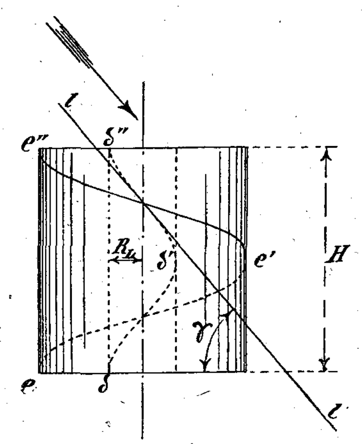


Fig. 4

$$R = \frac{H}{2\pi} \cot.\ \theta$$

siendo θ el ángulo que con el plano horizontal de proyección forman las generatrices del helizoide D dado.

Ahora bien, convengamos en que la dirección de los rayos luminosos venga dada por las proyectantes

$$\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases} \quad \text{ó bien}$$

$y = \frac{b}{a} x$ en el plano horizontal.

Evidentemente, la ecuación del radio central derivado R_L será:

$$y = -\frac{a}{b} x;$$

y su longitud

$$R_L = \sqrt{x^2 + y^2} = x \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = \frac{H}{2\pi} \cot.\ \gamma$$

pero cot. $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$, luego

$$x = \frac{bH}{2\pi} \text{ y por tanto,}$$

$$y = -\frac{aH}{2\pi};$$

valores que nos determinan la posición del punto P (fig. 2), podemos pues escribir:

$$P\left(x' = \frac{bH}{2\pi}; \quad y' = -\frac{aH}{2\pi}\right) \qquad [VII]$$

Análogamente, viniendo la generatriz del helizoide conoide expresada por los proyectantes:

$$(*) \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\lambda} z - \dfrac{\mu}{\lambda} \\ y = \dfrac{1}{\eta} z - \dfrac{\mu}{\eta} \end{cases} \quad \text{ó bien:}$$

$$y = \frac{\lambda}{\eta} x;$$

en el plano horizontal, se comprende que la ecuación del radio R central derivado será:

$$y = -\frac{\eta}{\lambda} x;$$

y su longitud

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = x \frac{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}}{\lambda} = \frac{H}{2\pi} \text{cot. } \theta;$$

y siendo

$$\text{cot. } \theta = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \eta_2}}{\lambda\eta}; \qquad [IX]$$

se comprende que

$$x = \frac{H}{2\pi\eta};$$

y por tanto

$$y = -\frac{H}{2\pi\lambda};$$

(*) λ y η representan los coeficientes angulares de dichas proyectantes, y μ la z común en el origen. Obsérvese la figura perspectiva 3.

coordenadas que nos determinan la posición del punto Q (fig. 2), tendremos pues:

$$Q\left(x_1 = \frac{H}{2\pi\eta}; \quad y_1 = -\frac{H}{2\pi\lambda}\right). \qquad [VIII]$$

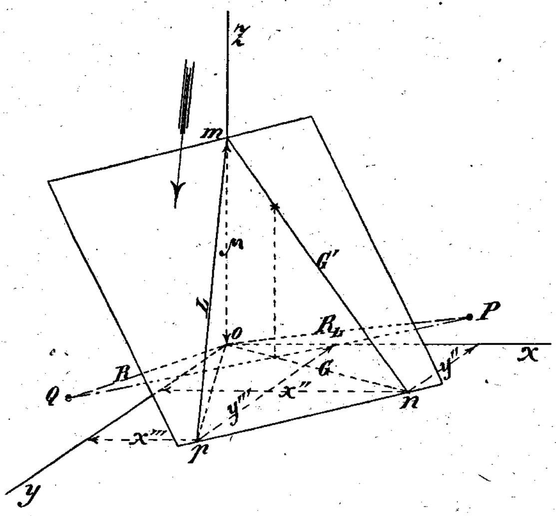


Fig. 3

Por fin, con los valores [VII] y [VIII] podremos ya sentar la ecuación de la recta PQ de la (fig. 3), y será:

$$y + \frac{aH}{2\pi} = \frac{\dfrac{1}{\lambda} - a}{b - \dfrac{1}{\eta}} \left(x - \frac{bH}{2\pi}\right);$$

expresión que combinada con la de la generatriz G (fig. 3)

$$y = \frac{\lambda}{\eta} x;$$

dará

$$\frac{\lambda}{\eta} x + \frac{aH}{2\pi} = \frac{\dfrac{1}{\lambda} - a}{b - \dfrac{1}{\eta}} \left(x - \frac{bH}{2\pi}\right)$$

de donde

$$x = -\frac{H}{2\pi} \frac{a\lambda\eta - b\eta^2}{\lambda^2 + \eta^2 - \lambda^2 b\eta - \eta^2 a\lambda}.$$

coordenada x del punto de sombra situado sobre la generatriz G–G' (fig. 3), según dice el teorema antes enunciado.

Veamos ahora si efectivamente esta x, es la del punto de tangencia con el helizoide dado *de un plano, que pasando por G—G', sea paralelo á la dirección de la luz l–l'.*

Determinación del plano que pasando por una generatriz es paralelo á la dirección de la luz.

Para hallar su ecuación no hay más que suponer (figura 3), que la recta $o\,z$ es el eje del helizoide, y que GG' es la generatriz considerada, cuya coordenada z en el origen vale μ según se desprende de sus anteriores ecuaciones.

Hagamos pasar por el extremo m de dicha coordenada un rayo luminoso L, y busquemos las coordenadas de los tres puntos m, n (traza de G sobre el plano $x\,y$) y p (traza de L sobre el $x\,y$), y el plano que pase por estos tres puntos, será el pedido:

Coordenadas de m:

$$m\,(x' = o, \quad y' = o, \quad z' = \mu).$$

Coordenadas de n:

$$n\left(x'' = -\frac{\mu}{\lambda}, \quad y'' = -\frac{\mu}{\eta}, \quad z''' = o\right).$$

Coordenadas de p:

$$p\,(x''' = -a\mu, \quad y''' = -b\mu, \quad z''' = o).$$

Ecuación del plano m, n, p (figura 3)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ o & o & \mu & 1 \\ -\frac{\mu}{\lambda} & -\frac{\mu}{\eta} & o & 1 \\ -a\mu & -b\mu & o & 1 \end{vmatrix} = o$$

ó bien desarrollando la matriz

$$x\,(\lambda - b\lambda\eta) + y\,(a\lambda\eta - \eta) + z\,(b\eta - a\lambda) + a\mu\lambda - b\mu\eta = o;$$

expresión que podemos también escribir así:

$$x\frac{\lambda - b\gamma\eta}{a\mu\lambda - b\mu\eta} + y\frac{a\lambda\eta - \eta}{a\mu\lambda - b\mu\eta} + z\frac{b\eta - a\lambda}{a\mu\lambda - b\mu\eta} + 1 = o. \qquad [X]$$

Recordemos ahora la expresión general

$$z_1 - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(x_1 - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(y_1 - y)$$

del plano tangente á una superficie, cuya ecuación esté resuelta con relación á z, y aplicándola á nuestro helizoide

$$z = \frac{H}{2\pi}\text{arc. tg.}\frac{-x}{y} \pm \text{tg.}\,\theta\sqrt{x^2 + y^2};$$

en el cual solamente consideraremos el signo superior ±, porque también en un solo sentido hemos contado el radio central derivado R_L de la (figura 2), tendremos:

$$z_1 - z = -\frac{H}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}x_1 + \frac{H}{2\pi}\frac{yx}{x^2 + y^2} + \text{tg.}\,\theta\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}x_1 -$$

$$\text{tg.}\,\theta\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{H}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}y_1 - \frac{H}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}; y +$$

$$+ \text{tg.}\,\theta\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}y_1 - \text{tg.}\,\theta\frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

ecuación en que $x_1\,y_1\,z_1$ representan las coordenadas generales ó corrientes del plano.

La anterior expresión podemos también escribirla así:

$$x_1\left[\frac{H}{2\pi}y - \text{tg.}\,\theta\,x\sqrt{x^2 + y^2}\right] + y_1\left[\frac{-H}{2\pi}x - \text{tg.}\,\theta\,y\sqrt{x^2 + y^2}\right] +$$

$$+ z_1\,[x^2 + y^2] + (x^2 + y^2)(\text{tg.}\,\theta\sqrt{x^2 + y^2} - z) = o;$$

ó así:

$$x_1\frac{\frac{H}{2\pi}y - \text{tg.}\,\theta\,x\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)(\text{tg.}\,\theta\sqrt{x^2 + y^2} - z)} + y_1\frac{\frac{-H}{2\pi}x - \text{tg.}\,\theta\,y\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)(\text{tg.}\,\theta\sqrt{x^2 + y^2} - z)} +$$

$$+ z_1\frac{1}{\text{tg.}\,\theta\sqrt{x^2 + y^2} - z} + 1 = o;$$

ecuación que identifica con la anteriormente obtenida [X], ya que ambas representan lo mismo, darán:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\frac{H}{2\pi}y - \text{tg.}\,\theta\, x\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)(\text{tg.}\,\theta\sqrt{x^2+y^2}-z)} &= \frac{\lambda - b\lambda\eta}{a\mu\lambda - b\mu\eta} \\ \frac{\frac{-H}{2\pi}x - \text{tg.}\,\theta\, y\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)(\text{tg.}\,\theta\sqrt{x^2+y^2}-z)} &= \frac{a\lambda\eta - \eta}{a\mu\lambda - b\mu\eta} \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$\frac{\frac{H}{2\pi}y - \text{tg.}\,\theta\, x\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda - b\lambda\eta} = \frac{\frac{-H}{2\pi}x - \text{tg.}\,\theta\, y\sqrt{x^2+y^2}}{a\lambda\eta + \eta}$$

eliminando ahora y entre esta ecuación, y la ya sabida de la generatriz

$$y = \frac{\lambda}{\eta}x$$

tendremos:

$$x\left[\text{tg.}\,\theta\sqrt{\lambda^2+\eta^2} + \text{tg.}\,\theta\frac{\lambda^2}{\eta^2}\sqrt{\lambda^2+\eta^2} - \text{tg.}\,\theta\frac{\lambda^2}{\eta}b\sqrt{\lambda^2+\eta^2} - \text{tg.}\,\theta\, a\lambda\sqrt{\lambda^2+\eta^2}\right] + \frac{H}{2\pi}a\lambda^2 - \frac{H}{2\pi}b\lambda\eta = o;$$

pero, recordando el valor precedentemente obtenido [IX]

$$\cot.\,\theta = \frac{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}{\lambda\eta} \quad \text{ó bien} \quad \sqrt{\lambda^2+\eta^2} = \lambda\eta\cot.\,\theta$$

se tendrá:

$$x\left[\eta + \frac{\lambda^2}{\eta} - \lambda^2 b - a\lambda\eta\right] + \frac{H}{2\pi}[a\lambda - b\eta] = o;$$

de donde

$$x = -\frac{H}{2\pi}\,\frac{a\lambda\eta - b\eta^2}{\lambda^2+\eta^2-\lambda^2 b\eta - \eta^2 a\lambda}.$$

coordenada x del punto de sombra situado sobre la generatriz GG′ (figura 3), hallado por el método de la geometría descriptiva, pero tratado por la analítica; no cabe pues duda acerca de su valor, y como vemos que es exactamente igual al hallado por el teorema de los helizoides derivados, se infiere inmediatamente de aquí, la veracidad de dicho teorema, conforme queríamos demostrar. (*)

En la seguridad ahora, de que es cierto el teorema de los helizoides derivados, podemos ya en él fundarnos para resolver todas las cuestiones relativas á planos tangentes de los helizoides, y por tanto, también, buscar y discutir la curva de contacto de los cilindros circunscritos á dichos helizoides.

Más antes, para acabar de hacer práctico el método que exponemos y descartar de él todo formulage, dejando el problema, dada su índole, únicamente relegado al terreno de las construcciones gráficas, procede el indicar la marcha que se puede seguir, para hallar fácilmente y sin auxilio de fórmula alguna, la longitud de los radios centrales derivados.

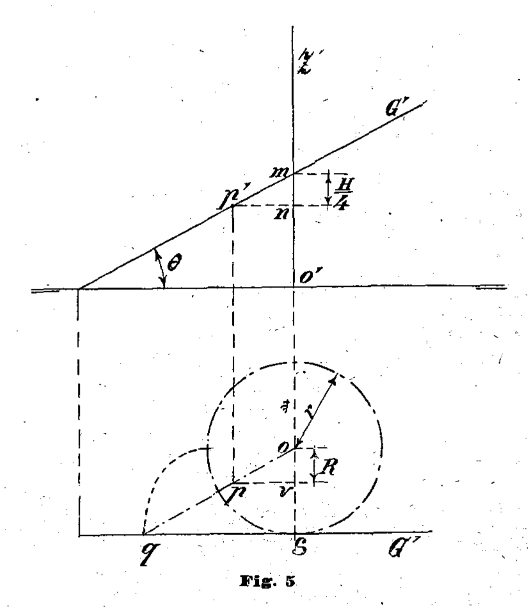


Fig. 5

Sea (figura 5) $o-o'\ z'$ el eje de un helizoide cualquiera, y G—G′ las proyecciones diédricas de la generatriz paralela al plano vertical de proyección, y sea el círculo del radio r la proyección horizontal de la arista de restricción del helizoide.

Para tener la magnitud del radio central derivado, no hay más que tomar $mn = \frac{1}{4}$ del paso de la arista de restricción, (á partir del punto

(*) No hay necesidad de comprobar la igualdad de las otras dos coordenadas z é y ya que en los dos procedimientos analíticos seguidos, hemos precisado al punto de sombra á pertenecer siempre á la misma generatriz.

m en que se cortan las proyecciones del eje y de la generatriz, proyección vertical del punto central); trácese por n la $n\,p'$ paralela á la línea de tierra, y bájese desde p' una línea de correspondencia $p\ p'$ hastar cortar en p á la línea $o\ q$ que une el pie del eje del helizoide con un punto q, tal, que $qs = \frac{\pi r}{2}$; y por fin trazando por p la $p\ v$ paralela á la línea de tierra, obtendremos el segmento $o\ v$ que es la longitud del radio central derivado que queríamos buscar. En efecto:

Observando la proyección horizontal de la (figura 5), tenemos:

$$\frac{ov}{os} = \frac{pv}{qs};$$

pero

$$pv = mn \cot.\ \theta = \frac{\mathrm{H}}{4} \cot.\ \theta, \text{ y además,}$$

$$os = r \text{ y } qs = \frac{\pi r}{2},$$

luego, poniendo estos valores en la anterior proporción y despejando $o\ v$, queda:

$$ov = \frac{\mathrm{H}}{2\pi} \cot.\ \theta,$$

expresión del radio central derivado, según queríamos demostrar. Obsérvese que $o\ v = \mathrm{R}$ es independiente de r.

Así las cosas, y en virtud de la especial manera como hemos llevado nuestra cuestión, podremos con mucha facilidad deducir del teorema de los helizoides derivados, toda la teoría de los planos tangentes á los helizoides en sus dos cuestiones de: 1.° dado el punto de tangencia, hallar el plano tangente, y 2.° dado el plano tangente hallar el punto de tangencia, y veremos cuán sencillamente se pueden resolver estos dos problemas por medio sólo de un radio central derivado; el del helizoide en cuestión.

Efectivamente: tomemos la ecuación de la recta PQ (figura 3), que unía los extremos de los dos radios centrales derivados, y que sabemos es:

$$y + \frac{a\mathrm{H}}{2\pi} = \frac{\frac{\mathrm{I}}{\lambda} - a}{b - \frac{\mathrm{I}}{\eta}} \left(x - \frac{b\mathrm{H}}{2\pi}\right)$$

cuyo coeficiente angular ω vale

$$\omega = \frac{\eta - a\lambda\eta}{b\eta\lambda - \lambda}$$

Tomemos ahora la ecuación del plano tangente al helizoide, y que conforme hemos ya deducido, sabemos que es:

$$x\,\frac{\lambda - b\lambda\eta}{a\mu\lambda - b\mu\lambda} + y\,\frac{a\lambda\eta - \eta}{a\mu\lambda - b\mu\lambda} + \mathrm{I} = o,$$

plano cuya traza horizontal, tiene evidentemente por ecuación

$$y = -\frac{\lambda - b\lambda\eta}{a\lambda\eta - \eta}\,x - \frac{a\mu\lambda - b\mu\eta}{a\lambda\eta - \eta}$$

recta cuyo coeficiente angular ω' vale

$$\omega' = -\frac{b\lambda\eta - \lambda}{\eta - a\chi\eta}$$

valor que comparado con el de ω, da:

$$\omega = -\frac{\mathrm{I}}{\omega'},$$

por tanto la recta que une los extremos de los radios centrales derivados, es perpendicular á la traza horizontal del plano tangente, y como que en esta recta hemos antes demostrado (teorema de los helizoides derivados), que existe el punto de tangencia, se infiere inmediatamente que:

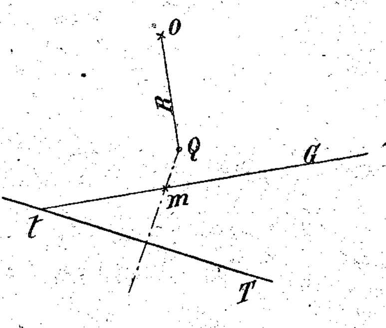


Fig. 6

1.° (figura 6): dada la traza horizontal T del plano tangente á un helizoide cualquiera, cuyo eje se proyecte en o, el punto de tangencia m se encuentra en la intersección de la generatriz G (proyección horizontal), con la perpendicular á T trazada por el extremo Q del radio central derivado R; y también,

2.° (figura 6), dado el punto m de tangencia sobre una generatriz G, para tener la traza horizontal T del plano tangente, no hay más que trazar por el pie t de dicha generatriz, una recta t T perpendicular á la m Q, que une m con el extremo Q del radio central derivado.

Si solo se nos da la dirección del plano tangente, entonces para cada generatriz del helizoide corresponderá un punto de tangencia, y el lugar geométrico de todos los puntos, formará la polar de un polo situado al infinito en la dirección dada, es decir, la curva de sombra del helizoide en cuestión, cuyo problema podemos resolver por medio del teorema de los helizoides derivados con mucha facilidad. Vamos á indicar la marcha:

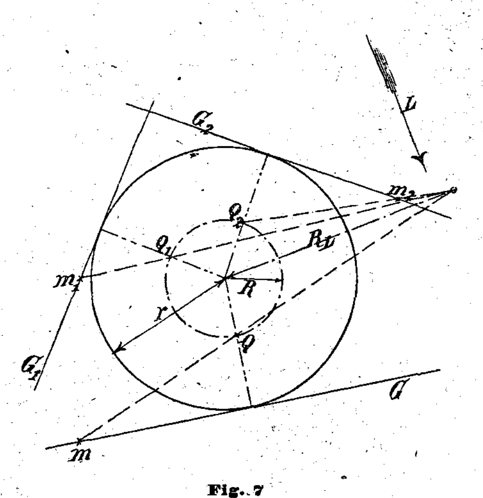


Fig. 7

Sea (figura 7) *o* la proyección horizontal del eje de un helizoide (toda la figura representa una proyección horizontal), y el círculo de radio *r* indica la proyección de la arista de astricción, siendo por tanto G, G_1, G_2, etc., las generatrices del helizoide. Sea además L la dirección de la luz, y tracemos ahora el correspondiente rayo R_L central derivado cuyo extremo es P.

Esto supuesto, comprendemos ya que el punto de sombra *m* situado sobre la generatriz G, se encontrará en la recta PQ que une P con el extremo Q del otro radio central R, (el del helizoide en cuestión) y como que todas las generatrices, por pertenecer al mismo helizoide tienen de igual longitud su correspondiente radio central derivado, se infiere que los extremos de dichos radios caerán en la circunferencia del radio R, al paso que siendo la luz, siempre de la misma dirección, el punto P, es constante, por tanto en definitiva resulta que:

Uniendo el punto P *con los extremos* Q, Q_1, Q_2, *de los radios de las diversas generatrices* G, G_1, G_2... *iremos obteniendo los puntos* m. m_1, m_2.. *de sombra, situados sobre dichas generatrices.*

Ya vemos, pues, cuan fácil y sencillo es determinar la sombra de un helizoide por general que sea, con el empleo del teorema de los helizoides derivados.

Evidentemente, por lo que antes expusimos, es este método aplicable á los helizoides conoides: el de plano director y el que informa la superficie del tornillo de filete triangular.

Mas por ser estos dos helizoides los que más generalmente se emplean, y por constituir la determinación de su sombra, capital punto en todos los programas de las asignaturas de sombras y estereotomía, vamos á detallar un poco la cuestión para estos dos casos, discutiendo al efecto la curva de sombra.

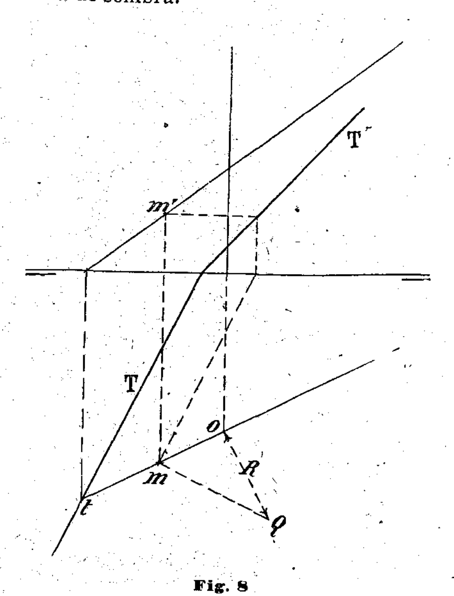


Fig. 8

Helizoide del tornillo de filete triangular.—El helizoide general degenera en éste, si la generatriz encuentra al eje. La ecuación de este helizoide ya la hemos deducido, y sabemos que es:

$$z = \pm \text{tg. } \theta \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{H}{2\pi} \text{arc. tg. } \frac{-x}{y}$$

cuyas letras conservan el significado que anteriormente las hemos asignado.

Esta superficie tiene por arista de astricción el eje del helizoide.

Plano tangente en un punto *m* (figura 8). Se investiga exactamente que en el helizoide general. Tracemos por el pie *o* del eje el radio R central derivado, normal á la generatriz G, que como sabemos tiene por valor

$$R = \frac{H}{2\pi} \cot. \theta$$

siendo θ el ángulo de inclinación de la generatriz con el plano horizontal. Ya sabemos traducir geométricamente el valor de dicho radio R.

Unase ahora el extremo Q de R con el punto m, trácese por el pie t de la generatriz G la recta t T perpendicular á Q m, y ella será la traza horizontal del plano tangente. Como vemos en la figura, por una simple horizontal del plano, determinamos la traza vertical T′ del mismo.

Si se nos diese la traza T, desde Q bajaríamos la Q m perpendicular á T y m, sería el punto de tangencia.

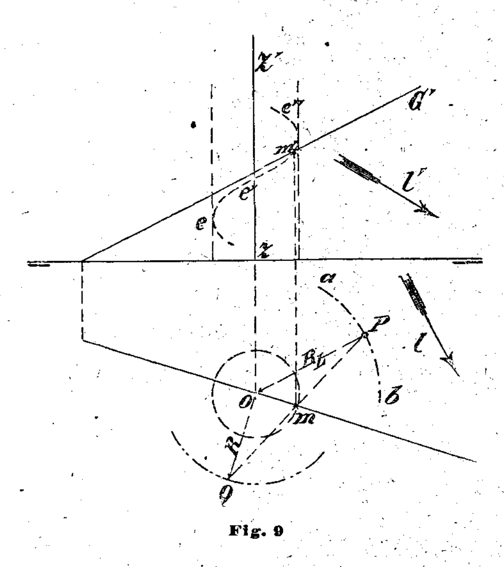


Fig. 9

Curva de sombra.—Sea (figura 9) $o—zz'$ el eje del helizoide y $l—l'$ las proyecciones del rayo luminoso; vamos á buscar el punto de sombra situado sobre una generatriz G—G′ cualquiera. Trácense los radios centrales derivados R y R_L que va sabemos valen

$$R = \frac{H}{2\pi} \cot. \theta \quad y \quad R_L = \frac{H}{2\pi} \cot. \gamma,$$

siendo θ=ángulo de inclinación de la generatriz y r=íd. íd. del rayo luminoso. Esto hecho, la recta PQ que une los extremos de dichos radios centrales derivados, cortará á G en m (punto de sombra) que en proyección vertical será m'; y exactamente como se ha obtenido el punto $m—m'$ iríamos obteniendo todos los demás de la línea de sombra; y más fácilmente aún, puesto que el punto P es fijo para todas las generatrices, y los extremos Q de los radios centrales derivados de todas las generatrices, están todas en la circunferencia del radio R, de modo, que es poco menos que instantáneo este procedimiento una vez obtenido el primer punto.

En la figura 10 presentamos la separatriz de un helizoide conoide con sus dos hojas, hallada por el procedimiento que venimos explicando, y cuyas principales construcciones quedan ya indicadas en la figura con sus letras, cotas, etc., siguiendo en un todo la misma notación que hasta aquí hemos convenido. La separatriz en nuestro caso, efecta la forma $a\ o\ b$, d P o P c en planta y $a'\ o'\ b'$, $d'\ o''\ c'$ en alzado, forma que como veremos, nos corroborará la discusion que más adelante llevaremos á cabo.

Y no insistimos ya más en la construcción de la separatriz, por no incurrir en ociosas repeticiones.

Solamente un detalle recalcaremos, y es el sentido en que deben tomarse los radios centrales derivados, porque efectivamente, hasta aquí, no hemos indicado más que el modo de hallar su magnitud y que deben ser perpendiculares á la proyección, sea del rayo, sea de la generatriz; pero esto podría dejar lugar á duda, acerca del sentido en que se han de tomar. Para saberlo, una ligera consideración cinemática será más fácil, que no volver á abordar la cuestión por el cálculo:

El helizoide puede ser engendrado por un movimiento del cilindro c (figura 11), en que está arrollada su arista de astricción; y suponiendo que en este movimiento el cilindro arrastra una generatriz G invariablemente unida á él, el lugar de las posiciones de dicha generatriz será la superficie helizoidal. Este movimiento es el resultante de una traslación á lo largo del eje e y de una rotación alrededor del mismo, movimiento que indicamos convencionalmente, en dirección y sentido, por medio de la flecha F.

Pues bien, el sentido en que debe llevarse el radio central derivado $R = o$Q, es aquel en que el extremo Q del mismo, al comenzar el movimiento citado, sigue la dirección de la generatriz G. De modo, que aplicando al extremo Q ó Q_1 del radio central derivado (en los dos sentidos en que puede tomarse), las direcciones t y r de traslación y rotación, vemos que el sentido O Q es el que satisface, por dar una resultante D de la misma dirección que G, y el otro sentido OQ_1 no satisface por dar una resultante D_1 contraria á G. El mismo resultado encontraríamos (obsérvese la figura), aunque supiésemos al helizoide engendrado en virtud del movimiento que simboliza la flecha F′.

Hecha esta indispensable digresión, entremos á discutir la forma que afectará la curva de sombra en la proyección horizontal y en los diversos casos que puedan presentarse. Estos casos dependen exclusivamente de la relación entre los ángulos de inclinación del rayo luminoso y de la generatriz, es decir entre γ y θ, distingamos pues los 3 casos siguientes:

$$\gamma > \theta; \qquad \gamma = \theta; \qquad \gamma < \theta.$$

1.er caso (figura 12).—Se comprende que dados los valores de R y R_L:

$$R = \frac{H}{2\pi} \cot. \theta \quad y \quad R_L = \frac{H}{2\pi} \cot. \gamma.$$

Fig. 10

el extremo P fijo de que nos valemos para determinar la separatriz, cae dentro de la circunferencia de radio R.

Para obtener el punto de sombra situado en la generatriz G (la figura 12 representa una proyección horizontal), tracémosle su correspondiente radio central derivado perpendicular $o\ Q = \frac{H}{2\pi}$ cot. θ, unamos Q con P y la recta QP cortará á G en m, punto de sombra. A medida que el punto Q vaya recorriendo la circunferencia descrita con

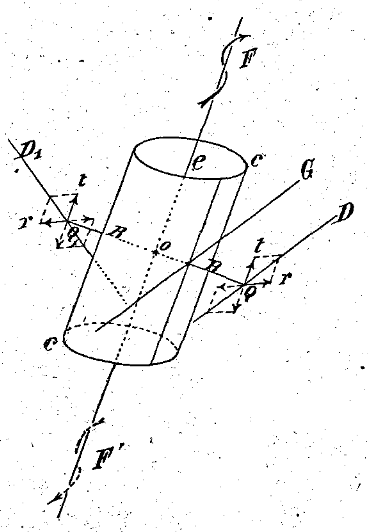


Fig. 11

$\frac{H}{2\pi}$ cot. θ, como radio, es decir, á medida que vaya haciendo referencia á los extremos de los radios centrales derivados, de otras generatrices, el punto m, vértice del triángulo rectángulo $m\ o$ Q, cuya hipotenusa pasa por el punto fijo P, describe la curva cuya forma nos proponemos determinar:

Tracemos el diámetro $d\ d_1$ paralelo á los rayos luminosos. El punto Q se aproxima á d_1 y el m á P, y cuando Q llega á d_1 el m se confunde con P, degenerando entonces la recta P m en la tangente P d_1 á la separatriz en P. Evidentemente esto es cierto también para el punto d, es decir que la recta Pd ha de ser una tangente á la separatriz en P, luego la curva de sombra ha de ser simétrica respecto al diámetro que pasa por el punto P, resultando de aquí que: La proyección horizontal de la curva tiene un punto doble en P y que las rectas que unen este punto con los extremos d y d_1 del diámetro paralelo á la proyección de la luz, son tangentes á dicha curva precisamente en el mencionado punto doble P.

Además la recta m Q corta á la circunferencia de radio R en los dos mencionados puntos Q y Q_1 para cada uno de los cuales corresponde en punto de la curva de sombra, luego, sobre la recta PQ existirán dos puntos, m y m_1 (el m_1 sobre el om_1 perpendicular á o Q_1).

Se infiere, pues, por último, que sobre dicha recta P Q hay 4 puntos, luego: La proyección horizontal de la separatriz es de 4.° grado.

Observemos ahora que las rectas o m y o m_1 siendo perpendiculares á los lados o Q y o Q_1 del triángulo isósceles o Q Q_1 determinan también con la m m_1, otro triángulo isósceles, siendo el punto j, pie de la perpendicular trazada desde o á la recta Q Q_1 el punto medio de m m_1. Se comprende ahora, como siendo o P j un triángulo rectángulo, el lugar geométrico de los puntos análogos á j será una circunferencia descrita sobre o P $= \frac{H}{2\pi}$ cot θ como diámetro; y por fin, dada la propiedad de ser el punto j, medio de las cuerdas m m_1, la mentada circunferencia será una línea diametral de la separatriz en cuestión.

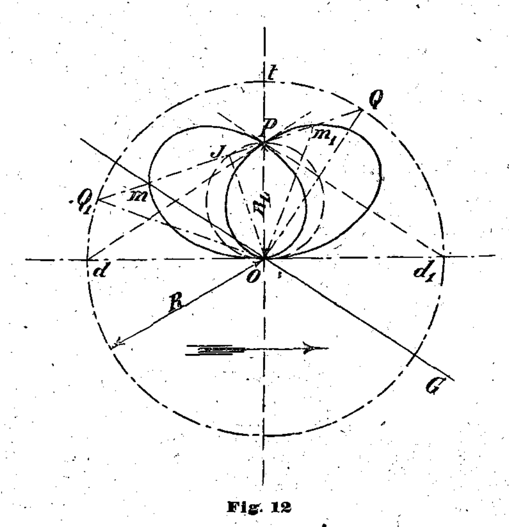


Fig. 12

En el momento en que Q alcance á t el punto m se confundirá con o, y la recta om siendo perpendicular al diámetro o t indica que la curva llegará á o tangencialmente al diámetro d d_1; y continuando el movimiento, veríamos que la curva vuelve á pasar por P, y contiene á m_1 y en fin, la acabaríamos de trazar tomando el punto Q y siguiendo su movimiento.

En resumen, que podemos ya inferir que la separatriz afectará en proyección horizontal la disposición que indicamos en la figura 12.

2.° caso $\gamma = \theta$ (figura 13). Para no hacer interminable nuestra cuestión y darle carácter más práctico, diremos que razonando exactamente como en la discusión anterior se obtiene:

Que el punto P es doble; que las rectas P d_1 y P d son tangentes á la curva de sombra en dicho punto P; que la recta a a' paralela á la proyección l de la luz y á una distancia $\delta = 2 \cdot o\ P = \frac{H}{\pi}$ cot γ del centro o, es una asíntota de la curva de sombra, y por fin, que la recta d d_1 forma parte de la curva de sombra; vemos, pues, aun marcado el 4.° grado de dicha curva.

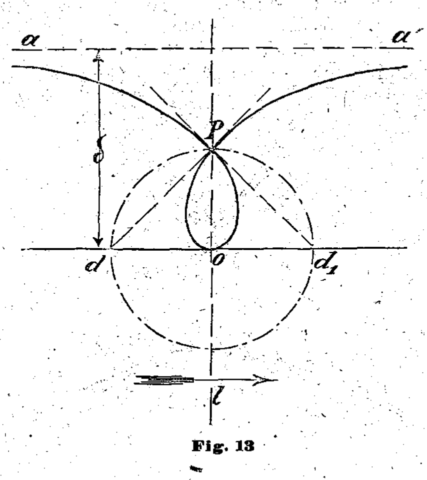


Fig. 13

3.er caso $\gamma < \theta$ (figura 14). Análogamente, en este caso se obtiene: P = punto doble; Pd_1 y Pd tangentes á la curva en dicho punto, y por fin las tangentes Pt_1 y Pt el círculo de radio o $d = \frac{H}{2\pi}$ cot θ son asíntotas de la curva. En conjunto afecta esta curva la forma de la figura 14.

Conocida ya detalladamente la forma que debe afectar la curva de sombra del helizoide conoide en los diversos casos, se hace preciso para acabar de asegurar más el buen trazado de la misma, el saber determinar con antelación cuales serán los puntos de sombra situados sobre tal ó cual hélice del helizoide en cuestión. Vamos á ver cómo podemos lograrlo por este procedimiento:

Obsérvese (figura 9) que perteneciendo el punto de sombra m á la hélice e e' e'' cuya proyección horizontal es el círculo de radio o m (radio perpendicular al central R), y sabiendo, ahora, además, que el punto P es fijo, no habrá más, para saber qué punto de sombra corresponde á dicha hélice e e' e'', que reconstituir la figura triangular o PQ, trazando al efecto un radio o m cualquiera, su perpendicular igual al central R, unir Q con m, trazar por fin desde o el arco a b de radio R_L y unir P con o. Esto hecho, hacer girar la figura o P m Q, alrededor de o, hasta que P coincida efectivamente con el extremo del

radio central derivado R_L, en cuyo giro el punto m no se moverá del círculo de proyección horizontal de la hélice á que pertenece, y formará por tanto en la última posición á que hemos aludido, la sombra que queríamos buscar.

Ahora bien, como la reconstitución de la figura triangular OPQ, (figura 9) puede llevarse á cabo de cuatro maneras distintas según se desprende claramente á la simple observación de la figura 15 (proyección horizontal), evidentemente se obtendrán cuatro puntos de sombra, lo cual corrobora el cuarto grado que hemos encontrado para dicha curva; perteneciendo dos de estos puntos á la hoja superior y los otros dos á la inferior del helizoide en cuestión. La figura 15 indica dichos cuatro puntos en proyección horizontal y vertical viéndose claramente los que corresponden á una y otra hoja del helizoide.

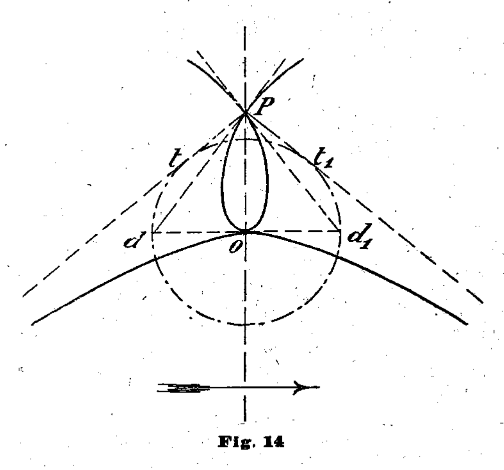


Fig. 14

Veamos ahora la curva de sombra del helizoide conoide de plano director, ó sea de la

Superficie del tornillo de filete rectangular.—Aplicaremos aquí las mismas construcciones, generalizándolas en lo que se deba, que en el caso anterior.

Construyamos como siempre el radio R_L central derivado y normal á la proyección horizontal l de la luz (figura 16) y cuyo valor sabemos que es

$$R_L = \frac{H}{2\pi} \cot. \gamma.$$

Supongamos ahora que G-G' es la generatriz cuyo punto de sombra vamos á buscar, tracémosle el radio central derivado

$$R = \frac{H}{2\pi} \cot. \theta = \infty,$$

por lo tanto, trazando por P una paralela á R el punto m será el buscado y lo referiremos verticalmente en m'.

Se comprende ahora que debiendo ser siempre rectángulo el triángulo O Pm determinativo del punto de sombra, y siendo el punto P fijo la separatriz será forzosamente la circunferencia de diámetro R_L, esto en proyección horizontal, mientras que en la vertical será una hélice de paso igual á $\frac{H}{2}$. H siempre ha representado el paso de una hélice cualquiera directriz del helizoide en cuestión.

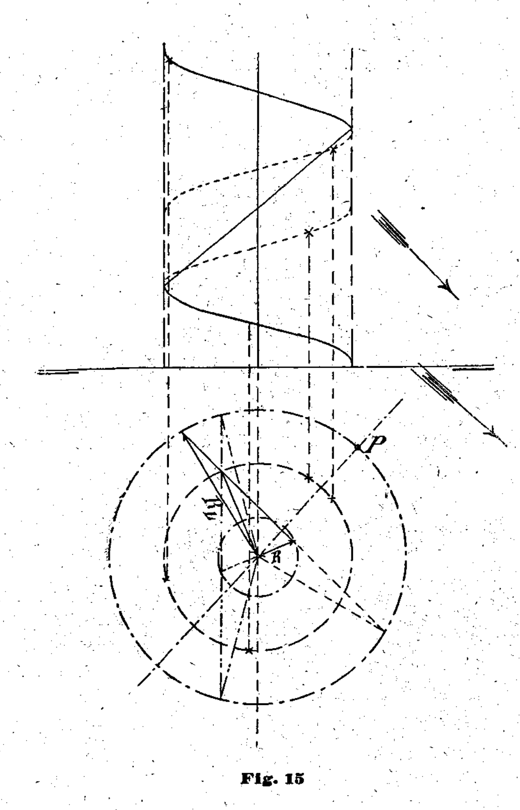


Fig. 15

Evidentemente, todas cuantas conclusiones hemos obtenido referentes á la discusión de las curvas de sombra en los dos helizoides más corrientes, el de tornillo de filete triangular, y el de cuadrado, las hubiésemos podido deducir analíticamente, para lo cual habiendo ya deducido las ecuaciones de dichos helizoides, no había más que aplicarlas la ecuación de la polar para un polo al infinito, (luz paralela),

y por fin haciendo esto mismo con el helizoide general, hubiésemos acabado por obtener conclusiones realmente bellas, aunque merced á una labor analítica bastante penosa.

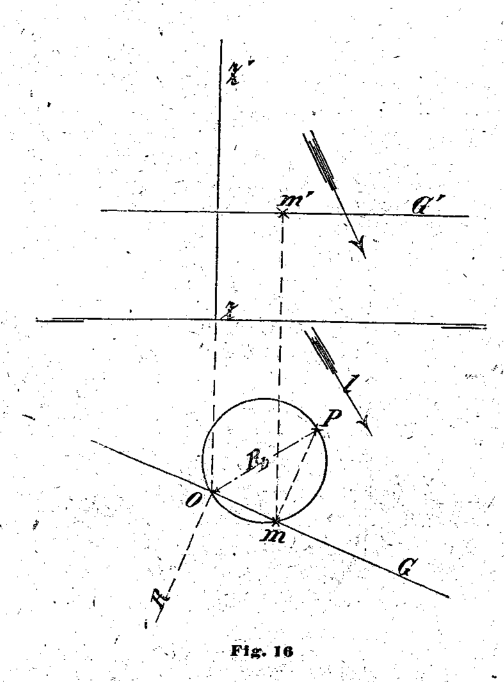


Fig. 16

No obstante, con gusto intercalaríamos este estudio aquí, si no temiésemos desvirtuar, tratando de otro modo la cuestión, la idea principal de nuestro trabajo, cual ha sido la de mostrar con un lenguaje científico arcaico, digámoslo así, la última y más elegante conclusión de la moderna geometría cinemática, haciendo de este modo asequible al que no ha tenido ocasión de profundizar las teorías modernas, la admirable facilidad con que se resuelve la separatriz del helizoide alabeado más general; separatriz cuya investigación constituye un arduo problema de las sombras, y lo decimos así, no solamente por la poca experiencia que en estas cuestiones ya tenemos, sino porque realmente, fatigosa resulta la cuestión á aquel que consulte aún los clásicos tratados de Leroy, Adhemar, etc., etc. Pues bien, merced exclusivamente á las recientes conclusiones de la geometría cinemática, que hemos integrado en nuestro teorema de helizoides derivados, y cuya demostración analítica hemos también intentado dar, queda el pesado problema de que nos hemos ocupado, figurando ahora el primero entre los más sencillos de toda la teoría de las sombras.

CAPÍTULO IX

Tangentes á las líneas divisorias de luz y sombra

214. Sabido es que cuando hay necesidad de rectificar una curva, se recurre al trazado de una tangente, cuyo procedimiento es el que igualmente adoptamos queriendo un buen trazado de la curva, al mismo tiempo que nos sirve de gran auxiliar para comprender los cambios de curvatura más ó menos acentuados, así como la explicación de los fenómenos que tienen lugar y que trascienden en el problema de sombra, cuando los rayos luminosos son tangentes á superficies especiales, cuyas curvaturas dan origen á propiedades raras y desusadas, dado que vayan combinadas con la línea separatoria de luz y sombra; nos referimos á las superficies *no convexas*.

Ya entrado el artista en la práctica de su profesión, y dado con el dominio que alcanza con los años de estudio y experiencia, y con la repetición de tan gran número de cuestiones que se ha visto obligado á resolver, adquiere tal tino é intuición para evidenciar las masas sombreadas con el verdadero límite que les concierna, dibujando así la mayor parte de líneas divisorias á mano y de sentimiento, cuales no discreparán por cierto, con las que se hubieran encontrado insiguiendo los rigurosos procedimientos descriptivos, hasta si se quiere, recurriendo al ensayo de las tangentes de que ahora nos vamos á ocupar; más para llegar el operador á tal altura, precisa haya precedido un estudio detallado y formal en el conocimiento de los cuerpos, y como en ellos viene quebran-

tada la dirección de la luz, así como el estudio de los fenómenos á que da lugar la índole geométrica de las líneas de sombra, tanto propias como arrojadas, no perdonando tampoco medio para poner en práctica lo que alcance el estudio y observación, resolviendo gran número de cuestiones, cuidando ser en ellas lo más nimio y atildado posible, para que cada línea obtenida, sea fiel consecuencia de los trabajos geométricos efectuados, y así asegurar la exactitud. La regla y el compás han de ser, pues, sus constantes auxiliares en ese período, prueba de estudio y de observación, para luego cuando llegue el momento oportuno poder desprenderse de semejante tutela y obrar espontánea y brevemente sin perjuicio de la verdad requerida. He aquí, pues, que para afianzar más y más la exactitud de los trabajos, nos propongamos el estudio de lo que anuncia el presente capítulo.

215. Teorema fundamental.—Conocido con el nombre de teorema de las tangentes conjugadas, debido al Barón Carlos Dupin, celebrado discípulo del ilustre Monge. Con la aplicación de semejante teorema se logran las tangentes á las líneas de sombra. (Véase la lám. 33, fig. 176).

Si construimos la curva de contacto de un cono con una superficie de 2.° grado (escogiendo al efecto un punto cualquiera exterior á la superficie Σ que pasa por el vértice del cono) se verificará: Que en un punto cualquiera de la línea de contacto pasan por él una generatriz del cono, y la tangente á la curva de contacto, y estas dos tangentes á la superficie Σ son tales, que se encuentran respectivamente paralelas á dos diámetros conjugados de la sección diametral conducida paralela al plano tangente, considerado en el punto escogido de la curva de contacto.

En efecto, para la demostración de tan importante proposición adoptemos como á plano de operaciones el que pasa por la recta diametral OV, que á la vez pasa por el vértice del cono, y por el punto C, escogido en la curva de contacto ABC; este plano nos cortará á la superficie Σ, según una cónica AXCY' y al cono circunscrito según la generatriz VC; en este estado, imaginemos trazada la tangente CE' á la curva de contacto, al paso que cortamos á la superficie por un plano diametral y que sea paralelo al plano tangente en C, cuyo contiene las dos rectas CV. CE'. Con esto, este último plano nos cortará á la superficie Σ, según una cónica YZF

semejante á la curva de contacto ABC, cual sabemos también que es una cónica (n.° 113). De esa semejanza resultará que en los puntos homólogos C, Y, las tangentes CE', YE, á dichas dos curvas, serán paralelas, y por lo tanto el diámetro FY tendrá por conjugado el OZ paralelo á YE, y por lo mismo paralelo á CE'; de ello ahora resulta, que los diámetros OX, OY, OZ, son recíprocamente conjugados entre sí, y de tal modo que el plano de dos de ellos, el de OX y OY, que es el de operaciones, dividirá en dos partes iguales á todas las cuerdas de la superficie, respectivamente paralelas al OZ, así como también en virtud de semejante propiedad, sucederá lo mismo para con respecto á toda recta diametral contenida en dicho plano de figura XOY, y por lo tanto una de ellas, tal como OG, paralela á VC. Esta, pues, en semejantes condiciones, dividirá en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas á OZ, cual sabemos es paralela á su vez á CE'.

Resulta, pues, demostrado que en la sección diametral, paralela al plano tangente de C hay dos diámetros OG, OZ, respectivamente paralelos á la generatriz VC y á la tangente CE' á la curva de contacto.

Estas dos últimas tangentes á la superficie en el punto C, se han llamado *recíprocas*, por la razón de que si se escogiera el vértice del cono en otro punto de la tangente CE', y se construyera otro cono, así como su línea de contacto con Σ, la tangente á dicha curva de contacto sería la misma compañera anterior VC. Y en efecto, repitiendo las consideraciones anteriores, el plano diametral trazado paralelo al tangente en C será el mismo que el anterior, cual es el GOZ, dándonos por consecuencia la misma curva de sección GZY', en la cual el diámetro OZ, paralelo á la tangente CE', continúa teniendo por conjugado al GY', y así la tangente á la nueva curva de contacto que debe por el teorema enunciado, cumplir el requisito de ser paralela á GY', no puede ser otra que la VC generatriz del mismo cono; hay, pues, completa alternativa y reciprocidad en el oficio que cada una de estas tangentes desempeña, ya consideremos el vértice del cono en una ú otra de las mismas.

216. Nos hemos concretado á exponer el teorema precedente, suponiendo un cono como superficie envolvente de segundo grado, más se comprende desde luego que sucederá lo mismo al considerar la curva de contacto de la superficie Σ

con un cilindro paralelo á una dirección dada, pues no hay más que suponer al vértice del cono á una distancia infinita para que dicha superficie cuspidal se convierta en un cilindro. Sin embargo, podemos convencernos de tal verdad, llevando el razonamiento con las sencillas consideraciones siguientes, (fig. 177). Sea Σ la superficie de 2.° grado, y en ella la curva plana de contacto AEFD, con un cilindro de dirección determinada, cual es la de la flecha R. Cortemos ahora á Σ por un plano diametral, paralelo á la dirección del cilindro, este plano nos cortará á Σ según la cónica DGEH, y al cilindro según dos generatrices E-1, D 2, tangentes á dicha cónica, y así la unión ED de los puntos de contacto dará un diámetro conjugado con el G'H, paralelo á las tangentes anteriores. Mediante estos precedentes, movamos este plano diametral, de modo que por traslación vaya bajando ó subiendo conservándose en todas las posiciones paralelo asimismo, y de modo que O, vaya resbalando por la cuerda FA, entonces no hay ninguna duda que las nuevas secciones que vayan apareciendo serán todas semejantes, teniendo por ello sus líneas homólogas, y por ello las distintas posiciones que irá adquiriendo el diámetro DE que se apoya en la curva de contacto DFEA, continuará siempre siendo conjugado del diámetro GH, paralelo á la dirección del cilindro, hasta que finalmente cuando O venga en A, y el plano secante P se confunda con el tangente P', entonces el diámetro DE habrá tomado la posición siempre paralela á sí propio que indica la tangente AB, así como el diámetro GH habrá ocupado la posición CA de la generatriz del cilindro circunscrito.

Y téngase ahora en cuenta que si bien en las figuras que anteceden se ha expresado para el cuerpo Σ un elipsoide, puede ser igualmente cualquiera de las superficies de 2.° orden, como por ejemplo el hiperboloide de una hoja como muestra la fig. 178, y con la cual podríamos razonar del mismo modo, á cuyo fin la acompañan las mismas letras significativas de cada uno de los detalles que entran en las dos figuras; así si suponemos un cilindro circunscrito con dicho hiperboloide, cuya línea de contacto sea EAF, y escogemos un punto A de esta curva, acontecerá también que la generatriz AC del cilindro y la tangente AB á esta curva, serán respectivamente paralelas á dos diámetros conjugados GH, DD' de la sección hiperbólica obtenida por plano el secante diametral paralelo al tangente en el punto A considerado.

217. El teorema, tal como lo enuncia Dupin, no lo particulariza al cono y al cilindro, sino que abraza la idea general de toda suerte de superficie desarrollable, y así dice textualmente en su obra.

Desarrollos de cuestiones de Geometría descriptiva.— Cuando una superficie desarrollable cualquiera está circunscrita á una superficie de 2.° grado, la tangente en un punto cualquiera de la línea de contacto, y la generatriz de dicha desarrollable que pasa por dicho punto, son respectivamente paralelas á dos diámetros conjugados de la sección diametral producida á la superficie de 2.° grado, por un plano paralelo al tangente considerado.

Más á nosotros nos basta considerar tan sólo el cono ó cilindro tangente, pues obedece el primero á rayos luminosos convergentes, y el segundo á rayos luminosos paralelos como proviniendo del foco solar.

218. Apliquemos ahora sencillamente el teorema de *Dupin*, proponiéndonos encontrar la tangente en un punto *m*-*m'* (fig. 179) de la línea de sombra de una superficie de 2.° grado, como por ejemplo el elipsoide Σ expresado en proyecciones, y suponiendo encontrados los puntos de la línea de contacto con arreglo al rayo R^v - R^h, tratando ahora de rectificar la curva, para su buen trazado.

Lo primero que procede para poder aplicar fácilmente el teorema, es construir el plano tangente en el punto considerado, más al objeto de facilitar la cuestión referiremos el punto al meridiano principal, y así girando el meridiano O*m'* que contiene el punto, hasta que sea paralelo al plano de proyección vertical, tendremos que la curva meridiana de dicho punto se confundirá con el contorno aparente Σ', y el punto vendrá á situarse en *m'''*-*m''*; en semejante situación el plano tangente es perpendicular al plano vertical y viene expresado de momento en la traza vertical *m'''*A, tangente á la línea meridiana. Pero como el rayo luminoso ha de guardar la misma relación de posición que el plano tangente considerado, de ahí que nos veamos obligados á hacer girar dicho rayo de la misma cantidad angular de aquel movimiento rotatorio. Así el rayo R^v - R^h, que ya adrede hemos hecho pasar por un punto O-O' del eje, uno de los puntos, como por ejemplo el *e*-*e'*, que expresa su traza horizontal, describirá un arco *e e''* igual á un cuadrante, porque un cuadrante era el arco *m'm''*

recorrido por el punto m'. Ahora e'' tiene por proyección vertical e''' en la línea de tierra, luego $e'''O'$ es el rayo R_1 ya en la nueva posición, y lo propio que en proyección horizontal R', guarda ahora la relación que le corresponde con la nueva posición del punto y su plano tangente. Tengamos ahora en cuenta el plano diametral $O'e'''$, paralelo al tangente $m''A$, buscando la sección elíptica que produce en $qsrt$, esta sección tendrá un diámetro paralelo á la generatriz del cilindro de contacto; aquí en nuestro caso será la dirección de los rayos luminosos, cual diámetro según ello será el fg, cuyo conjugado es el ih, luego éste, es el indicado para ser paralelo á la tangente en el punto m''-m'' á la curva de contacto, la cual podemos ya trazar desde luego en $m'''A$-$m''A'$; colóquese ahora esta tangente á su debido lugar, en $m'A''$-mA''' y ésta será la tangente definitiva á la curva de sombra. En este movimiento de giro, un punto tal como A-A', describe un arco horizontal $A'A''$ igual á un cuadrante, cuya medida es la que ha girado el punto escogido m'''-m'', y entonces el punto A-A' habrá venido en A''-A''', y así determinará la tangente cual pasa por el punto m-m'.

Hasta aquí el teorema de *Dupin* ha permitido trazar las tangentes á las líneas de sombra de las superficies de 2.° grado, más no se concreta sólo con ellas, su aplicación es fecunda en resultados, y permite resolver la propia cuestión cualquiera que fuera la agrupación á que pertenezca la superficie dada; veamos como:

Sea en la (fig. 180) Σ' una superficie cualquiera y en ella una curva CaD, que es línea de contacto con dicha superficie; de un cono cuyo vértice es el punto V, y en ella aT es la tangente á la curva de contacto en el punto a, siendo Va la generatriz del cono en el propio punto. En esta situación construyamos en a una superficie de 2.° grado Σ, elipsoide ó hiperboloide, que sea osculatriz en el propio punto á Σ'; en este concepto Σ y Σ' tendrán dos planos tangentes consecutivos comunes, y es que la generatriz Va del cono siempre se podrá considerar como la intersección de dos planos tangentes infinitamente próximos á la superficie dada Σ', cuyos puntos de contacto b, c, son también muy próximos con a y situados en la curva CaD, á la vez que en la C'aD', la cual es de contacto del mismo cono con la superficie de 2.° grado Σ, pues ambas líneas han de ser osculatrices, y por lo tanto la segunda curva C'aD' tendrá también por tangente la aT.

Mas ya hemos visto en la superficie Σ la relación y propiedades de que gozan las tangentes recíprocas Va, generatrices del cono, y aT tangentes á la línea de contacto; luego iguales ventajas y propiedades subsistirán para Σ', pues siendo comunes ó confundiéndose en el trecho de la osculación, las superficies tendrán también en dicho trecho las mismas tangentes; con ello puede darse ya más generalidad al teorema de Mr. Dupin sentando la siguiente proposición:

Cuando una superficie desarrollable está circunscrita á una superficie cualquiera, la generatriz de la desarrollable que pasa por un punto de la línea de contacto y la tangente á esta última por el propio punto, son respectivamente paralelas, á dos diámetros conjugados de la sección diametral, producida en la superficie de 2.° grado osculatriz de la dada en el punto dado, conducida esta sección diametral paralela al plano tangente de la de 2.° grado por el propio punto *.

* Si imaginamos en una superficie cualquiera S un punto a, y en él la normal á S, y por esta normal N hacemos pasar varios planos, éstos cortarán á S en varias curvas de sección, y todas ellas se llaman *secciones normales;* éstas según lo expuesto serán en número infinito, pues infinito es el número de posiciones que puede tomar el plano secante girando en torno de N.

Cada una de las mencionadas líneas de sección normal, tiene en general distinta curvatura, y el conjunto de todas ellas en torno del punto a, dan idea de la curvatura que afecta la superficie S en dicho punto.

A este efecto se averiguan los radios de curvatura de aquellas secciones planas, y por el estudio y comparación de los mismos se juzga de la curvatura más ó menos pronunciada alrededor de dicho punto, así como también del sentido ó dirección de la misma.

Sin embargo, existe una relación notabilísima que permite facilitar con más rapidez la curvatura que se desea. Entre todas las secciones normales que pasan por un punto a existen dos de ellas muy especiales, pues conocidos que sean sus radios de curvatura puede venirse en conocimiento de los demás en virtud del teorema de Eules que dice:

Entre las secciones normales pasando por un punto a de una superficie S, existen siempre dos de ellas, que se llaman principales, teniendo una de ellas un radio R de curvatura, que es mínimum, y la otra un radio R' que es máximum. Estas dos secciones principales están contenidas en planos perpendiculares entre sí, y una vez conocida la posición de estos planos, así como los mentados radios R, R', puede encontrarse fácilmente el radio ρ de curvatura de otra sección normal que pasa por el mismo punto, por medio de la fórmula con que están ligados; esta fórmula es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi$$

en cuya fórmula φ expresa el ángulo del plano de la sección del radio ρ con el de la sección del radio R, y en esta misma fórmula será necesario considerar como nega-

De este teorema se infiere ahora que si cambiamos la denominación de *generatriz de la superficie desarrollable*

---

tivo el valor de los radios principales R ó R' que esté dirigido por encima del plano tangente; esto es, en el caso que se trate de una superficie no convexa.

Líneas de curvatura de una superficie son aquellas en que las normales sucesivas á las mismas y á la superficie van cortándose dos á dos contiguas, formando por ello superficies desarrollables.

Se demuestra en los tratados de análisis, que á partir de cada punto de una superficie, no existe en general más que dos líneas que cumplan con esta propiedad, cuales se cortan en ángulo recto, y son respectivamente tangentes á las secciones principales de que más antes se ha hablado; sin embargo, estas líneas de curvatura y las que se refieren á las secciones principales en general, discrepan notablemente fuera del elemento de tangencia ú osculación, toda vez que las primeras son de doble curvatura al paso que las segundas son planas.

Dos curvas son osculatrices cuando tienen dos elementos consecutivos comunes, teniendo con ello el mismo radio de curvatura; llamándose radio de curvatura el radio de un círculo que tenga la misma curvatura de la línea en el elemento considerado. En una circunferencia la curvatura es constante, é inversamente del radio de su círculo, cuando se comparan varias de éllas.

Dos superficies son osculatrices cuando cortadas por un plano que pase por la normal común, éste las corta según dos curvas que sean osculatrices entre sí.

Radio de curvatura en las curvas de 2.° grado.—Se demuestra en Geometría analítica que **el radio de curvatura en un punto cualquiera de una cónica, es igual al cubo de la normal, dividido por el cuadrado del semiparámetro.**

Así, expresando la normal por n y por $\frac{p}{2}$ el semiparámetro, y por ρ el radio de curvatura, tendremos la expresión $\rho = \frac{n^3}{\left(\frac{1}{2}p\right)^2}$

Pero el semiparámetro es precisamente el radio de curvatura al vértice, de modo que llamándole r, la fórmula anterior, se convertirá en $\rho = \frac{n^3}{r^2}$ y ella representará la expresión más general del radio de curvatura en un punto cualquiera de una línea de 2.° grado.

El valor de r, siendo una cantidad constante, se sigue que en una línea de 2.° grado el radio de curvatura es siempre proporcional al cubo de la normal, advirtiendo fácilmente que en la parábola é hipérbola este radio aumentará desde r hasta el infinito, á medida que el punto de osculacion se aleje del vértice A de la curva. Más no así en la elipse, en donde el radio de curvatura alcanzaría el valor máximum cuando el punto de osculación haya llegado á la extremidad del eje menor $2b$; en este caso la normal será igual á b, y el radio de curvatura que llamaremos en tal punto R será igual á $\frac{b^3}{r^2}$ (1). (La expresión algebraica de la cuerda que indica el parámetro en las líneas de 2.° grado es: llamando p al parámetro $p, = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$, pero como en

por la de *rayo luminoso*, y la de *tangente de la curva de contacto* por la de *tangente á la línea divisoria de luz y*

---

toda línea de 2.° grado el radio de curvatura en el vértice del eje que contiene los focos es siempre igual al semiparámetro, de aquí que llamando r al radio de curvatura en dicho vértice, tendremos, $r = \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$).

Substituyendo en (1) el valor de r^2 por su equivalente $\frac{b^4}{a^2}$ por lo expresado dentro del anterior paréntesis, tendremos

$$R = \frac{b^3a^2}{b^4} = \frac{a^2}{b}.$$

En resumen se infiere que cuando se trate de una elipse tendremos que siendo r el radio de curvatura mínimo, R radio de curvatura máximo y ρ radio de curvatura en un punto cualquiera intermedio entre los vértices del eje mayor y menor, las siguientes expresiones:

$$r = \frac{b^2}{a}; \quad R = \frac{a^2}{b}, \quad \rho = \frac{n^3}{r^2}.$$

Para la parábola é hipérbola las expresiones serán.

$$r = \frac{b^2}{a}; \quad R = \infty; \quad \rho = \frac{n^3}{r^2}.$$

Enterados de todos los precedentes detalles, podemos pasar á demostrar el siguiente teorema:

En un punto cualquiera de una superficie cualquiera que ella sea, siempre es susceptible de construirle otra de 2.° grado que le sea osculatriz en torno del punto considerado.

Sea á este efecto la fig. 182, en la cual M es el punto en cuestión, y trazadas las curvas MA, MB, que representan las secciones principales de la superficie, ó lo que es lo mismo las que hemos llamado normales; de máxima y mínima curvatura, cuales tienen por radios respectivos el $r = MG$ y $R = MH$. Tomemos ahora á partir de M y sobre la normal de dicho punto una cantidad lineal $MO = c$, la cual la utilizaremos como uno de los ejes de una elipse MA', trazada en el plano de la sección MA, y de modo que ambas sean osculatrices en M. Para cumplir este requisito precisa que la elección del eje $OA' = a$ sea tal que el radio de curvatura de la elipse en el punto M sea precisamente igual á r, y por lo tanto, siendo aquí a y c los ejes de la elipse en cuestión será $r = \frac{a^2}{c}$, de lo cual se deduce $a = \sqrt{rc}$.

En su virtud el semieje a quedará determinado buscando una media proporcional entre r y c.

Del propio modo si en el plano de la sección MB construímos otra elipse MB' que le sea osculatriz en el propio punto M, teniendo por semiejes $OM = c$ y $OB' = b$, este último estará determinado por la expresión

$$\frac{b^2}{c} = R \text{ ó bien } b = \sqrt{Rc}.$$

Con ello vemos ahora que las elipses trazadas en MA', MB', determinan un elipsoide escaleno cuyos tres ejes son OM, OA', OB' ó bien c, a, b, atención hecha á

sombra, tendremos que siempre se podrá averiguar la tangente en un punto cualquiera de la línea de separación de sombra y luz, efectuando las siguientes operaciones:

1.° Construcción de una superficie de 2.° grado, que sea osculatriz de la dada en el punto en donde se desea conocer la tangente.

2.° Determinación del plano tangente en el punto dado sobre la superficie de 2.° grado.

---

la perpendicularidad que existe entre los planos de las secciones principales MA, MB. Ahora bien, este elipsoide cumplirá con los requisitos de osculación en la superficie dada para con respecto á las dos líneas principales de la osculación de MA con MA′ y MB con MB′, serán osculatrices alrededor de este punto **M**, esto es, que todo plano que las corte, pasando por la normal común, lo hará según dos curvas osculatrices, que tendrán el mismo radio de curvatura. Llamando con ello ρ y ρ' los radios de curvatura de las secciones que á este fin se produzcan, ellos vendrán conocidos por las fórmulas

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi \quad , \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{c}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{c}{b^2}\operatorname{sen}^2\varphi$$

más como en virtud de la osculación hecha en las líneas principales

$$\frac{1}{R} = \frac{c}{a^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{R'} = \frac{c}{b^2}, \text{ de aquí que } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'}, \text{ esto es, } \rho = \rho'.$$

Conviene observar ahora que el precitado elipsoide osculador de la superficie dada en el punto M, no es único, toda vez que depende del eje c, y éste se ha escogido arbitrario, y con ello se deduce que se puede facilitar la resolución escogiendo c de tal modo, que el elipsoide pase á ser de revolución, tomando al efecto $c = a = r$, ó bien $c = b =$ R.

Mas de otra parte la solución es general, pues también hubiéramos podido valernos de dos hipérbolas ó dos parábolas por curvas osculatrices de las secciones principales, y entonces la superficie osculatriz de la dada se habría convertido en un hiperboloide de dos hojas ó un paraboloide elíptico, cuyas son ambas superficies convexas, pues convexa ha de ser la escogida S.

Sea pues ahora para generalizar (fig. 183) una superficie no convexa cuyas secciones principales MA y MB, cuyos radios de curvatura caen en sentido opuesto MG $= r$, MH = R. Construyamos como anteriormente una elipse MA′, osculatriz de MA en el punto M, y cuyos semiejes sean MO $= c$ de longitud arbitraria, tomada en la normal, y OA′ $= a$ determinada por la expresión $a = \sqrt{rc}$; más en el momento que queramos la curva osculatriz de la sección MB, ya no nos será dable escoger una elipse, pues que no existe ninguna superficie de 2.° grado que admita dos secciones de este género y que estén colocadas la una encima y la otra debajo del plano tangente. Construyamos, pues, una hipérbola B′ML′, cuyo semieje real sea la recta MO $= c$, y por semieje imaginario la recta OB″ $= b$ perpendicular á la elipse, y tal que el radio de curvatura de esta hipérbola satisfaga á la expresión $\frac{b^2}{c} =$ R, ó bien $b = \sqrt{Rc}$.

Entonces la elipse MA′ y la hipérbola MB′ determinarán por completo un hiper-

3.° Trazado del plano y sección diametral á la superficie de 2.° grado que sea paralelo al plano tangente ántes mencionado.

4.° Trazado en esta última sección cónica, de un diámetro paralelo al rayo luminoso.

5.° Trazado del diámetro que sea conjugado con el anterior, y

6.° Trazado de una paralela á este último diámetro, trazada por el punto dado, esta recta cumplirá la condición de ser la tangente á la línea divisoria de la sombra y luz.

Con todos estos datos y propiedades vamos ya directamente á resolver el problema general, esto es, trazar una tangente en un punto de la línea divisoria de luz y sombra en una superficie cualquiera (Con detención véase la nota adjunta, antes de pasar adelante, esto, dado caso que crea necesario hacerlo el lector, por no recordar de momento los principios fundamentales, en donde descansan las construcciones ulteriores.)

219. Propongámonos en primer lugar, un ejemplo de superficie convexa, como lo es la mitad exterior de la superficie tórica, la cual está representada en la lám. 33, fig. 181, y en ella dibujada la línea exterior de luz y sombra, la cual obedece al rayo luminoso $R^v \cdot R^h$. Escogiendo ahora uno de tantos puntos obtenidos, el a'-a, por ejemplo, queremos antes de trazar la curva, conocer la tangente á la misma por el propio punto, y así tener conocimiento exacto de la dirección de la línea en torno del punto a-a'; ó dado caso que sea trazada, por la unión natural de los puntos encontrados pasar á rectificar-

---

boloide de una hoja, el cual será osculador de la superficie dada en el punto M y todo plano normal que haga un ángulo φ con MA cortará á las dos superficies según dos curvas, cuyos radios de curvatura ρ y ρ' vendrán dados por las igualdades

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\cos^2\varphi - \frac{1}{R}\operatorname{sen}^2\varphi, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{c}{a^2}\cos^2\varphi - \frac{c}{b^2}\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Las cuales evidencian que $\rho = \rho'$, por ser $r = \frac{a^2}{c}$ y $R = \frac{b^2}{c}$.

Hubiéramos obtenido también un hiperboloide osculador, más situado opuestamente si se hubiese colocado la elipse en el sitio de la hipérbola y viceversa. Aquí como en el caso de la superficie convexa, c puede escogerse para facilitar la cuestión de modo que el hiperboloide sea de revolución.

Finalmente, de haber adoptado dos parábolas como á curvas osculatrices de las secciones MA y MB, la superficie auxiliar oscuratriz habría sido un paraboloide hiperbólico.

la, admitido el caso de que así convenga hacerlo. Construyamos en primer lugar, y según lo anteriormente expuesto, una superficie de segundo grado, que le sea osculatriz en el punto escogido; únicamente teniendo en cuenta, que siendo convexa la superficie dada, convexa habrá de ser también la auxiliar de segundo grado, escogeremos según esto un elipsoide; mas, para emprender las operaciones con más ventaja, trasladaremos el punto a-a', sobre la meridiana principal en a''-a''', girando simplemente su meridiano OD hasta que se coloque en Od, tomando siempre el eje de la superficie como á eje de giro del movimiento.

Mas, habiendo hecho el traslado del punto, precisa ahora hacerlo con el rayo luminoso, á fin de que continúen relacionados del propio modo que en el dato, á este fin, suponiendo el rayo que pasa por el punto O-O', del eje de la superficie, lo haremos girar luego de la misma cantidad angular que lo ha hecho el punto, y así, tomando el arco Dd, y colocándolo en r-r', el punto r'', al describir el arco horizontal de giro se trasladará en r''', y la nueva posición del rayo será R_1^v-R_1^h.

Construyamos ahora en a''-a''' el elipsoide osculador, lo cual conseguiremos haciendo que las dos secciones principales de éste, sean osculatrices de las dos secciones principales del toro en el punto a''-a''', y para que esta osculación se cumpla, se hace forzoso que los radios de curvatura máxima y mínima en ambas superficies sea igual en el propio punto.

Ahora bien, el radio de curvatura máxima en un punto de toda superficie de revolución, es el mismo radio de curvatura de la línea meridiana que pasa por dicho punto, radio de curvatura que llamaremos r, mientras que R que será el rayo de curvatura mínima, se mide en la propia superficie de revolución, por el radio de curvatura en el punto escogido de la línea de sección obtenida, cortando á la superficie por un plano perpendicular á la línea meridiana. Así en nuestro caso, en que la meridiana es una circunferencia, el radio de curvatura máxima r en el punto a'', será el mismo radio $a''\omega$ del círculo, al paso que, siendo $a''\omega$ el plano que conducido perpendicularmente á la meridiana en el punto a'', corta á la superficie según la línea de curvatura mínima, su radio estará expresado por $a''\alpha$, esto es, por el trecho de normal que media desde a'' al eje.

Construyamos por a'' una elipse $a''\beta\gamma$ que sea osculatriz de la circunferencia meridiana, y para esto el semi-eje $\omega\beta$ se ha

de escoger de modo, según ya hemos indicado, que tenga lugar la expresión $r = \frac{c^2}{a}$ (llamando $a = a''\omega$, $c = \omega\beta$ y $b = \omega'f$, los semi-ejes respectivos del elipsoide osculador); así también construiremos otra elipse en el plano de canto $a''\alpha$ que sea osculatriz en a'', á la segunda sección principal de la superficie, lo cual realizaremos fácilmente, haciendo que el eje b esté relacionado con el a, mediante la relación $R = \frac{b^2}{a}$ téngase en cuenta, según lo dicho, que el eje b viene proyectado en ω, pues es perpendicular al plano vertical; y así tenemos que podemos averiguar ahora fácilmente las magnitudes de c y b, para que la osculación quede verificada, y en efecto, de las expresiones $r = \frac{c^2}{a}$ $R = \frac{b^2}{a}$ se deducen las $c = \sqrt{ra}$, $b = \sqrt{Ra}$.

Téngase ahora en cuenta, que el semi-eje a contado sobre la normal $a''\omega$, es arbitrario, habiéndolo escogido aquí precisamente igual al radio del círculo, de modo, que según ya hemos indicado en la nota adjunta, puede facilitarse la construcción del elipsoide, con sólo hacer $r = c = a$ y entonces dicho elipsoide será de revolución. En cuanto al otro eje b dado por la relación $b = \sqrt{Ra}$, puédesele encontrar geométricamente, valiéndonos de una media proporcional entre R y r, pues que ahora a es igual á r.

Con este fin, colocando á continuación de $a''\alpha$, á partir de α, la distancia $\alpha l = a''\omega = r$, y adoptando la $a''l$, como diámetro de una semicircunferencia $a''Kl$, esta será tal, que la perpendicular αK, levantado en α, será b, ó la media proporcional pedida. Trácese por ω la perpendicular á la Línea de Tierra, tomando sobre la misma, arriba y debajo de ω' la distancia $\omega'f$, $\omega'f'$, iguales respectivamente á la magnitud encontrada en αK, y con ello teniendo las tres dimensiones del elipsoide, éste quedará determinado, proyectado en el plano vertical, según su ecuador, que aquí se confunde con el círculo meridiano del toro, y en proyección horizontal con la elipse del contorno aparente, cuyos ejes serían dh el menor, y ff' el mayor; su dibujo no consta en la figura, por no ser de absoluta necesidad.

Recordemos ahora, que, con arreglo al teorema de Dupin se ha de cortar este elipsoide por un plano diame-

tral xz, paralelo al tangente P en a'', dicho corte nos dará la elipse $f'efg$, cuyo eje menor eg es proyección de xz, y el eje mayor el encontrado en ff' para el elipsoide, y á propósito para que ese fuera osculador.

Continuando la aplicación de la propiedad de las tangentes conjugadas, se trazará en esta elipse el diámetro pq paralelo al rayo R_1^h, y en seguida el que le sea conjugado en uv, este cumplirá ya la condición de ser paralelo á la dirección de la tangente incógnita, que desde luego trazaremos por el punto a''-a''', en $a''\tau$-$a'''\tau'$, paralela á uv; faltará tan sólo colocarla en su lugar correspondiente. A este fin, vuélvase el punto a''-a''' á su sitio a-a', en cuyo movimiento se llevará consigo dicha tangente, conservándose ésta en la misma posición relativa, para con respecto al meridiano en donde va situando el punto en sus distintas posiciones en el giro; así el punto τ-τ' describe un arco circular $\tau'\mu\nu$, viniendo á colocarse definitivamente en el punto τ'', cuyo punto se obtiene cruzando el arco de círculo anterior, desde el punto a como centro, y con un radio igual á la distancia $a'''\tau'$, la cual permanece siempre la misma durante el movimiento de giro, la recta $a\tau''$ será la tangente á la curva en proyección horizontal. Por lo referente al plano vertical, obsérvese que el arco circular recorrido por el punto τ-τ' es horizontal, y por lo mismo proyectando el punto τ en τ''' sobre la horizontal trazada por la proyección vertical τ, tendremos ya la posición del punto extremo de la tangente cuando ella obra ya en su definitiva posición, y eso indicará que uniendo τ''' con a' la recta $\tau'''a'$ será la proyección vertical de la tangente.

220. Tangente en un punto de la línea divisoria de luz y sombra en una superficie no convexa.—(Fig. E, lám. 33.) Se escoge aquí la mitad interior de una superficie tórica, al objeto de que pueda compararse bien la diferencia que existe entre la índole de esta superficie, con la otra mitad convexa y que corresponde á la exterior; escojamos al efecto el punto m^v-m^h situado en la curva interior, mas como en él hemos de efectuar todas las operaciones indicadas al final del párrafo núm. 218, al objeto de poderlas verificar con facilidad, haremos girar el punto mencionado hasta que vaya á colocarse en m-m' en el meridiano principal, empecemos en esta situación á construir por dicho punto una superficie de segundo grado que sea osculatriz de la dada. Si nos fijamos bien ahora en semejantes datos, no será difícil convencernos de que no es posible en tal superficie escoger al elipsoide por superficie osculatriz, toda vez que ésta siendo superficie convexa, sus dos secciones principales se encuentran colocadas hacia un mismo lado del plano tangente, mientras que en la dada, siendo no convexa, una de las secciones principales cual es el meridiano circular de centro O', cae hacia un lado y la otra sección principal, producida por la sección á la superficie del plano normal nm' cae hacia al lado opuesto; y como quiera que no hay ninguna superficie de segundo grado que pueda reunir la propiedad de contener dos elipses que pasen por un mismo punto, y situadas á distintos lados del plano tangente del propio punto, de aquí es que tengamos que renunciar al elipsoide, escogiendo en su lugar el hiperboloide de una hoja; ya que en él, sí, es posible concebir una elipse y una hipérbola pasando por un mismo punto y situada la primera hacia un lado y la segunda hacia al otro del plano tangente. Construyamos, pues, una elipse en el plano meridiano principal, y que sea osculatriz en el m' de la curva meridiana; y luego, después una hipérbola osculatriz también en el mismo punto m' á la sección principal situada en el plano de canto nm'.

Llamemos para esto conforme hemos indicado en el párrafo anterior por $2a$, el eje dirigido en el sentido de $m'o'$ y por $2b$ y $2c$ los otros dos: El radio de curvatura en m' á la sección principal de la superficie que corresponde á la curvatura máxima es $m'o' = r$, y el de igual denominación de la elipse principal será expresado por $\frac{b^2}{a}$, luego habiendo de ser osculatrices estas dos curvas tendremos $r = \frac{b^2}{a}$, y aun, ya que a, es arbitraria, hagámoslo igual á b y entonces la elipse se convertirá en un círculo que aquí es el meridiano, y el hiperboloide será de revolución.

Por otra parte, el radio de curvatura de la sección principal de la superficie, y que corresponde á la curvatura mínima es $nm' = R$, mientras que el radio de curvatura en el mismo punto m', que corresponde á la misma denominación al hiperboloide viene expresado por $\frac{c^2}{a}$; por lo tanto, queriendo ahora que sean osculatrices estas dos secciones, se podrá establecer la igual $R = \frac{c^2}{a}$, y de esta $c = \sqrt{Ra}$; de modo que

por medio de esta última se deducirá el valor del eje imaginario del hiperboloide osculador. Con ello el hiperboloide osculador está completamente definido, pues tenemos sus tres ejes situados en el espacio, así como también su círculo de garganta, confundido con el círculo meridiano de centro O′; no hay para que dibujarlo horizontalmente, dicha proyección no se necesita para las operaciones que van á seguir.

Téngase ahora en cuenta que el valor de $c = \sqrt{Ra}$, lo encontraremos conforme hemos indicado en el número anterior, por medio de la media proporcional $m'p$, entre $nm' = R$ y $m'o' = r$.

Hecho esto, y ya en posesión de semejante hiperboloide, córtesele por el plano diametral tu, paralelo al tangente $m'p$, cuya sección dará la hipérbola XX′-ZZ′.

Antes de pasar adelante, es necesario colocar el rayo luminoso con la nueva posición que ha tomado el punto escogido, y como éste, al pasar en m'-m, ha descrito el arco $m^h m$, ó lo que es lo mismo la cantidad angular $MO^h M'$ el punto r' del rayo luminoso, cuyo sitúa en la misma circunferencia del arco MM′, describirá el arco $r'r''' = MM'$, por lo tanto, $O^h r'''$ ó lo que es lo mismo R_1^h es la posición que habrá tomado el rayo luminoso, para con respecto al punto m-m'. Siguiendo las operaciones de este giro, y que indica el plano vertical, el rayo de este plano será R_1^v, siempre paralelo al plano tangente que pasa por m' (puesto que este plano ya de hecho es paralelo en el espacio á la dirección de la luz.)

Con esto podemos continuar nuestra cuestión, conduciendo á la sección hiperbólica antes trazada, un diámetro 1-1′, paralelo al rayo R_1^h, y él nos indicará ser su compañero el conjugado 2-2′, el cual será ya el que tenga la misma dirección de la tangente incógnita mq^h que pasa por el punto m; es evidente ahora que dicha tangente se proyecta verticalmente en la misma traza del plano tangente P.

Falta tan sólo colocar dicha recta en su verdadero sitio en el espacio, para cuando el punto m-m' se traslada á su lugar m^h-m^v en la superficie tórica. Con este fin, un punto cualquiera q^h-q^v de la tangente, describirá al moverse el arco circular $q^h q_2$, fijando el punto q_2 la condición de que la distancia de la proyección horizontal mq^h permanece constante en el movimiento, y por tanto, con dicha distancia como radio, haciendo centro en m^h, trácese un arco de círculo que cruzará el círculo descrito por el punto q^h, precisamente en el punto q_2, y así $m^h q_2$ será la tangente en proyección horizontal; y en cuanto á la proyección vertical de la misma recta, será la $q_1 m^v$ obtenida, proyectando el q_2 sobre la horizontal descrita por el punto q^v, horizontal que indica la proyección vertical del arco circular del movimiento de giro, de este modo tenemos q_1 y como m^v era del dato dicha tangente queda completamente determinada *.

221. Tangente á la línea divisoria de luz y sombra, y á la vez paralela al rayo luminoso.—Antes de empezar esta cuestión recordemos otra vez el teorema de *Dupin*, y en él hemos visto que los diámetros conjugados de la sección diametral indicatriz, paralela al plano tangente en el punto considerado, eran tales que uno era paralelo al rayo luminoso y el otro á la tangente á la curva por el propio punto; por lo tanto el rayo de luz y la tangente formaban entre sí un cierto ángulo, más en el presente caso, al querer que la tangente cumpla con la segunda condición de ser paralela á la dirección de la luz, es lo mismo que decir que el ángulo sea nulo, confundiéndose en el punto considerado la tangente y el rayo luminoso; por lo tanto la superficie osculatriz de que

---

* Al cortar al hiperboloide osculador por el plano diametral paralelo al tangente P, hemos obtenido una hipérbola proyectada horizontalmente; ahora bien, como aunque se trate de una curva fácil de trazar, conviene, dado que se quiera que su dibujo conste en la proyección, que su trazado sea el más breve, resultando ser aquí el deducido de las asíntotas iguales, sabido es se obtienen de momento con el auxilio del rectángulo de los ejes del cual son diagonales. Recordémoslo brevemente (figura 184) ab, cd son las asíntotas, e un punto de la curva pedida; recordemos ahora la propiedad que la hipérbola y sus asíntotas interceptan en una secante cualquiera segmentos iguales; y con ello tracemos por el punto e las secantes ef, eg, tomando sobre ellas las cantidades lineales $fk = ej$, $gi = eh$; así los puntos k, i pertenecerán ya á la curva.

Cada nuevo punto tal como k puede ser utilizado, como el e, esto es, trazando la secante kl y tomando sobre ella el segmento $al = km$, el punto l será también de la curva y así sucesivamente.

Mas aun para mayor brevedad, podemos abstenernos de trazar la hipérbola, valiéndonos solamente de sus asíntotas, pues ellas bastan para que, conocido un diámetro puede venirse en conocimiento de su conjugado; para ello (fig. 185) sean ab, cd, las asíntotas y ef, el diámetro dado, escójase un punto cualquiera e en él, conduciendo por dicho punto una paralela eh á la asíntota más distante; esta paralela cortará en g á la asíntota más próxima; y finalmente, tomando $gh = ge$ la recta hoi, será el diámetro conjugado.

Ya se habrá comprendido que este procedimiento tiene por fundamento la propiedad, de que *cada asíntota divide en dos partes iguales las paralelas á la otra, comprendidas entre dos diámetros conjugados.*

se haga uso ha de ser susceptible de que al cortarla por un plano diametral, permita en la sección producida trazarla un par de diámetros conjugados confundidos en uno solo, esto es, con ángulo nulo; esto mismo nos llevará al convencimiento de cómo no pueda servir para semejante superficie el elipsoide, toda vez que ninguna de las secciones permite que los pares de diámetros conjugados degeneren, formando un ángulo nulo, y de esto lleva consigo que no será posible resolver la cuestión propuesta en ninguna superficie que permita la osculación con un elipsoide como las superficies convexas. Por lo tanto nos propondremos resolverla en una superficie no convexa, como por ejemplo la que corresponde á la peana, así como también podremos resolverla para la mitad interior de la superficie tórica.

Sea, pues, con ello en la fig. 186, lám. 34 la peana y la escocia, á la cual se le ha encontrado ya la línea divisoria de luz y sombra por los medios ya conocidos; se quiere en esa curva saber cuáles son los puntos en que se verifique que sus tangentes sean paralelas ó confundidas con el rayo luminoso de contacto con la superficie.

Para la solución de semejante problema, empezaremos suponiéndolo como resuelto, de modo que el punto de tangencia incógnito gira en torno del eje de la superficie para colocarse en el meridiano principal; en el punto tal como el a, construyamos en él un hiperboloide osculador de la superficie, y para mayor facilidad haremos como siempre que sea de revolución, su círculo de garganta de centro O y de radio Oa, será la sección principal que contiene la línea de máxima curvatura, y que sea osculatriz de la sección principal de la escocia; y en cuanto á la sección principal que contiene la mínima curvatura en el hiperboloide, será una hipérbola, proyectada según la recta normal aj, hipérbola determinada de modo que sea osculatriz de la sección principal que contiene la mínima curvatura de la escocia, cuya última curva se halla también proyectada sobre la recta aj.

Para que esta última osculación tenga lugar, operaremos como en los casos anteriores; así llamando $2a$, $2c$, $2b$ los ejes del hiperboloide y r, R los radios de curvatura máximo y mínimo de la superficie en el punto a, tendremos:

$$r = a = c, \qquad R = \frac{b^2}{a}, \qquad b = \sqrt{Ra}$$

El eje imaginario b será una media proporcional entre R y r; construyámosla, pues, en af, valiéndonos de la circunferencia cuya diámetro es jo. El hiperboloide, cuyo círculo de garganta es el de radio Oa, y el eje imaginario proyectado verticalmente en el centro O, y horizontalmente en $O'\text{-}\alpha' = af = b$, será el que cumpla la osculación. Ahora si lo cortamos por un plano diametral $a'a''$, paralelo al tangente en a nos dará una hipérbola, cuyas asíntotas resolverían la cuestión de ser paralelas al rayo luminoso á la vez que á la tangente de los puntos de contacto, en el caso que el punto escogido al hazar a fuese el verdadero. No hay necesidad de dibujar la hipérbola de sección, pues sus asíntotas pueden determinarse por el rectángulo de los ejes $O'a_1$, $O'\text{-}\alpha'$, y aun también con una asíntota nos bastará, pues la otra compañera es simétrica á ella. A este fin basta colocar en la perpendicular trazada por el vértice a_1 la distancia $a_1\text{-}\alpha = O'\text{-}\alpha'$, y este $a_1\text{-}\alpha$ será el semilado del rectángulo antedicho, y por lo tanto la diagonal $O'\alpha$ la asíntota en cuestión.

Como esta asíntota depende del punto a, y éste se ha escogido al hazar, no será probable obedezca á la condición que buscamos, pues sería una casualidad.

Escojamos para ello otros puntos situados en la línea de sombra, refiriéndolos todos conforme hemos hecho con a en el meridiano principal, en el cual irán á situarse en b, c, d... etc.; en semejante situación repitamos para cada uno las mismas operaciones anteriores, esto es, construcción de hiperboloides osculadores, y en ellos secciones diametrales $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$... etc.; á los respectivos planos tangentes, en b, c, d, etcétera; estas secciones darán hipérbolas, cuales tendrán asíntotas, encontradas éstas como antes en $O'\beta$, $O'\gamma$, $O'\delta$... etc.; entre todas ellas existirá la que buscamos, esto es, las que tienen igual inclinación que el rayo luminoso; veamos, pues, como las deducimos; con este motivo observemos que tales asíntotas ó diámetros, como se quiera, pasando todos por un mismo punto O-O', centro de los hiperboloides, formarán un cono de vértice O-O'; escojamos ahora un plano de proyección horizontal auxiliar L'T' más próximo á dicho vértice que el primitivo plano LT, todo con el objeto de que las operaciones ulteriores quepan dentro los límites del dibujo.

Si trazamos ahora por O-O' una recta R_1^v - R_1^h, paralela al rayo de luz R^v - R^h, y luego se hace girar en torno de la vertical del punto O-O', describiremos un cono recto cuya

traza sobre el plano L'T' será el círculo de centro O' y de radio O'e. Encontremos al mismo tiempo las trazas 1', 2', 3', 4'... etc., sobre el mismo plano de las generatrices del primer cono formado por la agrupación de asíntotas, y entonces es evidente que dichos dos conos, teniendo el mismo vértice O O', si se cortan lo han de hacer forzosamente según dos generatrices, cuyas, como es natural, partirán de los puntos tal como x-5 donde se corten las trazas horizontales; así, pues, uniendo x con O, la xO 5O' será la asíntota ó diámetro que cumplirá con la condición de ser paralelo á la tangente á la curva de contacto y que á la vez tenga igual inclinación que el rayo de luz; trácese pues ahora por la inversa de lo que hemos hecho hasta ahora el plano $x_1\tau$, tangente al círculo de garganta y paralelo al plano diametral 5-O, dicho plano nos dará el punto x_1-x'', el cual será el que buscamos, pero referido al plano meridiano principal y ya desde él puédese trazar en el plano tangente $x_1\tau$ la recta $x_1\tau$-$x''n$, paralela á la asíntota O-5 - O'x, y aquélla cumplirá con el problema. Mas precisa ahora colocarla á su debido lugar; á este efecto gírese dicha recta en torno del eje ω, hasta que vaya á colocarse en una disposición paralela al rayo luminoso; y para realizar este movimiento con más ventaja, bajemos la ωp, perpendicular á nx''; el sistema de estas dos rectas, al girar, se conservará el mismo; así es que describiendo una circunferencia de centro ω, y de radio ωp, ésta vendrá un momento que se situará (siempre tangente al círculo descrito del radio ωp), paralela al rayo R^h en $p'x'''$, y como p se habrá colocado en p', x'' se colocará en x''', y entonces este punto será el de tangencia definitivo, y en donde precisamente se verifica que la tangente á la línea de sombra es paralela al rayo luminoso. En cuanto á su proyección vertical, el punto x_1 ha descrito en el giro un arco circular proyectado según la horizontal del punto x_1'' y en ella se colocará por medio de una proyectante el punto x^{IV}, proyección vertical de x'''; trácese por x^{IV} la paralela al rayo luminoso R^v, y ella será la tangente pedida. Téngase en cuenta que no más hemos hecho uso de una asíntota, más como igual operación podríamos llevar á cabo con la otra compañera de O'x, con ella vendríamos á buscar la otra tangente y punto simétrico y''' del x''' y de su tangente. Igual operación haríamos para con respecto á los otros dos puntos singulares de la parte inferior de la escocia z-z', u-u'.

De paso observemos que en estos cuatro puntos singulares x''', y''', z, u, el rayo luminoso tiene con la escocia un contacto de segundo orden, toda vez que es verdaderamente una generatriz del hiperboloide osculador á la superficie en cada uno de estos puntos; y así el simple plano tangente que concierne á cada uno de los puntos ordinarios de la línea separatoria se convierte en plano osculador para cada uno de estos cuatro puntos singulares. Esta propiedad ya hemos visto en otro lugar era causa que aparecieran otros tantos puntos de retroceso en la sombra arrojada.

Siendo estos cuatro puntos simétricos dos á dos para con respecto al eje $R^h \omega$, claro está que teniendo dos de ellos los x''', z, pueden obtenerse por traslado los y''', u, más si se tratara de la superficie *tórica*, la cual tiene doble simetría para con respecto al plano meridiano que pasa por el rayo luminoso y al meridiano perpendicular á éste, entonces con un punto nos bastaría, pues por traslado podrán encontrarse los otros tres puntos restantes.

En la escocia como en el toro, no siempre ocurren los cuatro puntos singulares, pues si al trazar el cono de los rayos luminosos su base circular no corta á la base del cono asintótico, entonces indicará que no hay solución; será cuando $\varphi > \psi$. Cuando las dos bases son tangentes habrá solamente dos puntos singulares, entonces $\varphi = \psi$, llamando φ el ángulo que forman las generatrices del cono circular, ó sea el del rayo luminoso con el plano horizontal, y ψ el ángulo con el propio plano de la generatriz del cono asintótico que forme el mayor ángulo con el propio plano.

CAPÍTULO X

DEGRADACIÓN DE TINTAS Y PUNTOS Y LÍNEAS BRILLANTES

222. La teoría de las sombras se concreta extrictamente á determinar la línea de separación del claro-obscuro de una superficie cualquiera que sea ella, así como también enseña los medios para determinar la sombra que aquélla arroja sobre cualquiera de los cuerpos que se hallen posteriormente á la misma y dentro la zona del espacio que está privada de luz en virtud de la opacidad del cuerpo que aquélla informa.

Encontradas, pues, estas dos líneas, la misión de aquella teoría ha concluído dejando con ello la zona que está iluminada con igual intensidad de luz, mientras que la que está dentro la jurisdicción de la sombra encuéntrase también con igual fuerza de tinta, quedando con ello la línea que separa el claro del obscuro completamente viva, visible y acentuada, esto es, sin ninguna clase de desvanecimiento ni esfumada.

223. Mas realmente dentro de la verdad de los hechos no sucede así en el espacio, pues la zona iluminada, por ejemplo, tiene sus partes que lo están en mayor ó menor intensidad, y encontrándose en general los cuerpos terminados por superficies y formas geométricas, aquella intensidad obedece á leyes invariables por las que, de un modo gradual y ordenado, se pasa de la intensidad más viva á la que lo es menos, mediando lo propio en la región de sombra, cuya no está tonizada del mismo modo variando lentamente, ya aumentando

ó disminuyendo según se considere desde la parte menos á la más obscura ó viceversa.

224. El estudio, pues, que tiene por objeto la desterminación de las sucesivas zonas, tanto en la parte iluminada como en la obscura, dentro las cuales se va verificando el aumento ó disminución gradual de toda esa serie de varias intensidades, es lo que se conoce bajo el nombre de *Teoría de la degradación de tintas*, y al objeto de hacer más fácil su estudio se limitan dichas zonas por una serie de líneas, cuales se buscan geométricamente, obedediendo cada una de ellas á una tinta determinada y dependiente de la forma y propiedades del género de la superficie en que están situadas.

Teniendo así representadas semejantes líneas, se consigue dar al dibujo que representa al cuerpo de que se trate todo el efecto posible, comunicándole el relieve de que sea capaz según su determinada forma general; y con él apareciendo la verdad en los fenómenos físicos tal como pasan en el espacio, llegaremos finalmente á que pueda ser interpretada la verdadera forma, accidentes y propiedades del cuerpo, aunque éste se encuentre expresado por sus proyecciones, pues la masa general de sombra por una parte, y la degradación de tintas por otra, vienen respectivamente secundadas por la envoltura de la superficie y curvatura de la misma, cual última expresada al ser herida por los rayos luminosos, pone en evidencia al observador el especial relieve del cuerpo que se considera.

225. Pero aun hay más; de querer se tengan en cuenta todas las causas que tienden á modificar las partes iluminadas y obscuras de un objeto cualquiera, á más de la forma especial del cuerpo que la representa, será preciso recordar que dicho cuerpo, estando situado en el espacio, tiene próximo á sí, otros cuerpos, y éstos recibiendo luz, la reflejan ó difunden, cual parte de sus partículas, recibiéndolas el cuerpo que se considera, tienden á que sufra modificaciones su iluminación, su obscuridad.

226. Igual fenómeno acontece, cuando recibe parte de la luz reflejada de la misma atmósfera, donde está inmergido, teniendo entonces de acudir á un rayo de luz especial, cual es el atmosférico, y él regula la manera de llevarse los distin-

tos tonos de la intensidad modificada por esta causa; estudiando los efectos y consecuencias que se desprenden del estudio del nuevo elemento, la llamada perspectiva aérea.

227. También los efectos fisiológicos modifican algún tanto, á lo menos en apariencia, los resultados de la iluminación, á la par que de la sombra. Estos efectos, actuando sobre los nervios de la retina, influyen notablemente sobre el resultado ó imagen que aparece á nuestra vista, y muchos artistas, con el fin de que produzca más ilusión el objeto cuya representación se proponen, acentúan de tal modo el resultado de aquellos fenómenos, que llegan hasta el punto de tomarse ciertas libertades que escapan á la verdad y realidad de los hechos, conociéndose semejantes procedimientos reservados para casos especiales, que se toman como á tipos generales, con el nombre de *Teoría de las licencias*.

Trataremos, pues, de analizar por partes cada una de estas cuestiones, pasando en revista los razonamientos científicos en que están basadas, aprovechándonos al mismo tiempo de los resultados prácticos obtenidos por reiteradas experiencias y observaciones.

228. Mas antes de entrar en el examen y exposición de semejantes principios fundamentales, es indispensable partir de un dato importantísimo, pues según él sea, el resultado de la iluminación será distinto, variando por ende el efecto que produzca en el observador. Este dato, es la naturaleza física de la superficie del cuerpo, que se considera bajo el punto de vista del mayor ó menor pulimento, opacidad y transparencia de que aquel venga afectado; y así, obedeciendo á estos tres caracteres, dividiremos los cuerpos en cuatro grandes agrupaciones.

Primero. Cuerpos perfectamente pulimentados.
Segundo. Cuerpos medianamente pulimentados.
Tercero. Cuerpos mates.
Cuarto. Cuerpos diáfanos ó transparentes.

229. Al estudiar los fenómenos que se infieren de la iluminación de dichos cuerpos, partiremos siempre de la base, que en ellos, la forma sea geométrica y perfectamente definida, siendo homogénea la superficie que los envuelve, descartando todas aquellos informes * y rugosas ó no continuas, pues en ellas no sería dable concluir consecuencias para inferir leyes concretas y generales, que regulen las tonalidades de las diversas tintas, cuales aparecen ordenadas y continuas en los primeros cuerpos, por ser sus propiedades geométricas y de periferie continua.

230. Las superficies *perfectamente pulimentadas* gozan de la propiedad de reflejar la luz que reciben, según una determinada dirección tal como tiene lugar, por ejemplo, en los espejos y en conformidad con las leyes de reflexión de la luz y que demuestra la óptica.

En esta clase de superficies, aparecen en general *puntos brillantes*, esto es, puntos tales, en que el rayo luminoso, una vez reflejado, hiere al ojo del observador con tal intensidad, que éste descubre tal exceso de iluminación en dicho punto, que le deslumbra momentáneamente, produciéndole una sensación penosa hasta el extremo de no poderla soportar, como pasa, por ejemplo, cuando se mira fijo al astro solar ó la impresión y asombramiento que recibimos al fulgurar de los relámpagos.

Pretendemos en semejantes circunstancias substraernos instintivamente, cerrando los ojos, más la impresión recibida se conserva y la vista queda amortiguada por algunos momentos.

Partiendo pues, de semejantes propiedades, no será difícil comprender que para esta clase de superficies, sólo será dable al observador ver de dichos cuerpos los puntos ó líneas brillantes, pues la superficie restante de los mismos, le quedará completamente amortiguada por lo deslumbrador de la brillantez de aquellos elementos.

231. Las superficies *Mates*, por oposición á las anteriormente descritas, son las que carecen de toda clase de pulimento y ellas reunen la propiedad de difundir la luz que reci-

* En estos cuerpos no puede existir una ley ordenada de degradación de tintas y cambios uniformes de tonalidades, así es que únicamente puede guiar algún tanto en la marcha que hay que seguir en semejantes casos, la continua observación de los hechos tal como pasan al natural, copiando el resultado que producen, así sale impresionado el observador, sensacionándolo de modo que pueda llevar á cabo la imitación lo más realmente posible. Uno de tantos cuerpos, como podríamos citar que se encuentran en este caso, es la piedra en estado natural.

ben hacia todas las direcciones en el espacio. Entre ellas podemos colocar como á ejemplo, la piedra labrada que se emplea en las construcciones, el mármol sin pulimentar, objetos de yeso, papel, etc., etc. En esta clase de superficies es en donde tienen lugar una serie de degradación de tintas, cuales son independientes de la situación que toma el observador, al contrario de lo que sucede en el tipo anterior, en donde el punto ó arista brillante variaba con la elección del punto de vista. Esta continua variación de tintas, depende aquí de la forma geométrica con que viene afectada la superficie. Así, pues, en estas superficies el sitio de mayor claridad ó el de mayor obscuridad, así como todas las tonalidades intermedias, quedan siempre las mismas y en su sitio muévase el punto de visión cuanto se quiera.

232. Se ha procedido en varias ocasiones á verificar experiencias, para con respecto á la luz difundida por las superficies mates, una vez ellas hayan recibido la que les envía un foco de luz cualquiera, y de ellas se ha venido á concluir las siguientes leyes, cuales nos servirán de norma en lo sucesivo.

1.° **Cuando un elemento plano de una superficie mate cualquiera recibe sobre sí un haz de rayos luminosos: entonces la luz que difunde dicho elemento, obra del mismo modo como si el citado cuerpo ó superficie mate fuese luminoso de por sí.**

La siguiente experiencia dará asenso á tal hecho práctico. Sea (Fig 34, Lám. 187). El plano AB, preparado al efecto, de encontrarse perfectamente mate, como por ejemplo, cubierto por una capa de yeso bien aplanado ó de un papel blanco bien tirante y sin ninguna clase de solución de continuidad. Póngase luego á este plano bajo la exposición de los rayos solares, y entonces veremos que adquiere una iluminación uniforme con el tono blanco, completamente igual en intensidad, en toda la extensión que abarque en su superficie.

Tómese luego un tubo C, cuyas paredes interiores estén previamente preparadas con un buen baño de *negro de humo*, para así evitar toda clase de reflejos interiores que malograrían la experiencia, entonces colóquese el tubo en las distintas direcciones C, C′, ... etc., aproximando en su extremidad el órgano visual, cual si fuese este tubo un anteojo, y entonces será fácil ver como aparece en la parte inferior del

tubo, una como pequeña circunferencia iluminada con cierta intensidad, siendo imposible distinguir varios grados de iluminación, cualquiera que fuera la colocación de dicho tubo (excepción hecha, sin embargo, de colocar semejante tubo muy próximo ó casi tocando la superficie con la incidencia de rase, en cuyo caso aparecerá una ligera tinta amortiguada, debida de lo saliente ó discontinuidad de las moléculas entre sí, ó por mejor decir, asperidades de la superficie, cuales amalgamadas la una sobre otra, constituyen cada una, como un cuerpo que arroja sombra sobre el contiguo recubriéndose así sucesivamente.

Igual resultado obtendríamos si echáramos mano de láminas de metal enrojecido, convirtiéndola así en foco de emisión de luz, cuya lámina, cualquiera que fuere su orientación con respecto al observador, siempre se la podría ver con la misma intensidad luminosa, sin que esta última experimentara la menor variación.

233. 2.° **La iluminación aparente, y el grado ó cantidad de luz que desde una superficie mate se difunde, no depende en manera alguna de la posición del observador, y sí únicamente de la intensidad de luz que recibe y del ángulo que los rayos luminosos directos forman con esta superficie.**

Esta ley puede comprobarse fácilmente en la figura 188, tomando un prisma A de yeso, por ejemplo, exponiéndolo á los rayos luminosos, de modo que las caras BD, BE, queden iluminadas aproximadamente por igual (este prisma se dispondrá también de tal modo, que la arista B esté bien cortada, viva y fina), en esta disposición, cójase un tubo C, ennegrecido interiormente del propio modo como se ha indicado en la experiencia anterior, y colóquesele en las distintas posiciones C, C′, C″, ... etc., de modo que por él podamos, cual si fuera anteojo, observar las caras iluminadas BD, BE, entonces veremos dichas caras iluminadas con la misma intensidad, confundiéndose cual si fuera una misma superficie y tales como si no existiera la arista B que en el espacio la separa.

Como á consecuencia de esta ley puede también establecerse la siguiente:

234. 3.° **En una superficie cualquiera mate, expuesta á uno ó varios haces luminosos, se verificará que las**

líneas de igual iluminación aparente, serán líneas también de igual intensidad para el observador.

235. Mas entre los dos referidos tipos de superficies existe otro intermedio, cual es el de las superficies *medianamente pulimentadas*, y ellas son tales, que reflejan parcialmente la luz que reciben, mientras que el resto de la misma se esparce difundida en el espacio.

Tienen también sus puntos ó líneas de máxima intensidad, parecidos algún tanto á los brillantes, pero sin tener de mucho aquella nociva intensidad, permitiendo, á pesar de ellos, el que puedan observarse los fenómenos luminosos de toda otra parte del cuerpo, como son la iluminada, la obscura, las degradaciones de tintas, etc., etc.

236. Finalmente, las superficies de los cuerpos *diáfanos* como por ejemplo, el cristal. Estas tienen la propiedad de refractar la luz y no aparecer en ellas ley de tonalidad alguna, ó si se quiere, degradación de tintas, por lo que podremos prescindir sin dificultad alguna del estudio de las mismas, y de tener necesidad de su representación en un dibujo cualquiera, lo mejor y más expedito pueda reducirse á recurrir á la imitación tal como pasa á los fenómenos en los distintos casos que la práctica pueda deparar, no sin que tengamos muy en cuenta las leyes planteadas por la dióptrica, cual como es sabido estudia la refracción y descomposición de la luz cuando pasa de un medio menos denso á otro más denso.

237. Principio fundamental de la iluminación de un cuerpo. La iluminación de un elemento cualquiera de una superficie, es proporcional, al seno del ángulo formado por el rayo ó rayos luminosos incidentes, con dicho elemento; á la par que está en razón inversa del cuadrado de la distancia que media desde el foco luminoso al cuerpo que se considera.—En este enunciado se supone como es de ver, que el foco se halla á una distancia finita; esto es, el ejemplo de luz artificial.

Con efecto, supongamos en la (fig. 189), sea Σ, un cuerpo cualquiera y que de él, se considera un pequeño elemento AB, cuando está expuesto á los rayos luminosos, que emanan de un foco F. Suponiendo ahora, que todos los rayos, tengan igual intensidad, será evidente que el grado de iluminación

del elemento AB, será tanto más acentuado, cuanto mayor sea también la cantidad de rayos luminosos, que caigan sobre él, ó si se quiere, cuanto mayor sea el ángulo al vértice F, del cono formado por los rayos luminosos, tal como FAB. Ahora bien, se comprende desde luego que sin variar la extensión y forma de este elemento AB, la capacidad angular del vértice F, del cono, puede variar, si varía la inclinación del elemento AB, ó bien también la distancia del citado elemento al foco F, por lo que se infiere, que dependiendo de estos dos datos la referida iluminación, forzosamente habrá de existir una relación que indique de una manera expresa, el modo de ser de la misma, sin que dé lugar á ninguna ambigüedad.

Al efecto, partamos de datos fijos é invariables, para con respecto á la distancia de que se trata, así como á la de una superficie auxiliar, la cual venga cortada siempre bajo al mismo ángulo, por los citados rayos luminosos, entonces y sólo entonces, será cuando podremos referir los datos análogos de cualquiera superficie que se nos dé á esta última, tomada como á base de operaciones, partiendo de ellas las investigaciones en virtud de la relación que ella guardará con las demás que sean objeto del referido dato.

Con este fin, descríbase desde el punto F, como centro, y la distancia FC, igual á la unidad; como radio, una esfera; y esta cortando al cono según la sección CD, satisfará la cuestión. En efecto, cualquiera que ahora sea el elemento que se considere en el cuerpo Σ, tal como HI, esté colocado en la situación que se quiera, bajo la exposición del foco luminoso, será la base de un cono FHI, cual viene cortado por la esfera en EG, á la misma distancia y con igual inclinación que las generatrices del mentado cono FAB, siendo pues ahora la esfera la que regula estas secciones, y dependiendo por otra parte la iluminación de AB, HI, de las de EG, CD, y éstas de las del número de rayos luminosos, que cogen en las capacidades angulares cónica FEG, FCD resulta que dicha iluminación de HI, por ejemplo, será doble, triple... etc., de la que corresponde al elemento AB, cuando el área EG, será también doble, triple... etc., de la que corresponde á CD.

Mediante estas consideraciones es ahora posible, apreciar con conocimiento de causa, la cantidad de luz, ó intensidad de la misma, recibida por un elemento cualquiera de la superficie Σ, como por ejemplo el AB.

Así designemos por i (conocida por la experiencia) la intensidad de iluminación que recibe la unidad de superficie, el milímetro cuadrado, por ejemplo, colocado á la unidad de distancia del foco luminoso, y situado dicho elemento, en la disposición del CD, entonces claro es que la expresión $CD \times i = I$, será la intensidad absoluta de luz, contenida en la capacidad angular FCD, y por lo tanto I será la intensidad de luz recibida por el elemento AB.

Faltará tan sólo expresar I, en función de los datos del elemento AB; y para eso, con el mismo centro F y el radio $R = FA$, trácese otra esfera FAK, concéntrica con la FCD, que se ha tomado como á tipo de comparación, entonces la sección AK, siempre la podremos considerar, como un elemento infinitamente pequeño, situado en el plano tangente á la esfera, y por lo tanto normal al radio AF, análogamente como sucede con CD, entonces claro es que podremos considerar á CD y AK, como dos secciones paralelas producidas en un mismo cono y así serán entre sí, como los cuadrados de sus distancias al vértice, pudiendo con ello establecer la proporción

$$CD : AK :: 1^2 : R^2$$

$$CD = \frac{AK}{R^2} \quad (1)$$

Mas de otra parte, siendo evidente que todas las generatrices del cono, son normales á la esfera, esta circunstancia permite considerar á la AK, como proyección de AB, sobre el plano tangente, y por lo tanto, llamando α, el ángulo que forma el rayo luminoso, con el elemento AB, tendremos $AK = AB \times \cos. KAB$, y poniendo en lugar del coseno el seno del complemento será

$$AK = AB \times \text{sen. } \alpha.$$

Sustituyendo, en lugar de AK, su valor equivalente sacado de la ecuación (1) será

$$CD \times R^2 = AB \times \text{sen. } \alpha$$

multiplicando ambos términos por la intensidad i,

$$CD \times R^2 \times i = AB \times \text{sen. } \alpha \times i$$

de donde

$$CD \times i = I = \frac{AB \times \text{sen. } \alpha \times i}{R^2}$$

Llamemos ahora I′ al coeficiente $\frac{\text{sen. } \alpha}{R^2} \times i$, este valor comprobará el enunciado del teorema, puesto que según él, la intensidad de la luz en el punto A, de la superficie Σ, es la cantidad de luz que recibe un elemento plano igual á la unidad superficial, iluminado en todos sus puntos del propio modo que lo está A, indicando por estar sen. α, en el numerador que la expresión aumentará en razón directa con este seno, mientras que por encontrarse R, elevada al cuadrado en el denominador, variará dicha expresión en razón inversa del cuadrado de la distancia R. Finalmente, suponiendo ahora, que la superficie Σ, está subdividida en elementos iguales al de AB, entonces la iluminación de cada uno de ellos, variará proporcionalmente á I′.

238. Cuando el objeto está iluminado por un foco, situado á una distancia muy grande, para que puedan considerarse sin error sensible los rayos paralelos (que es el caso que generalmente se emplea en la práctica, cuando nos valemos de luz solar), entonces el coeficiente $I' = \frac{\text{sen. } \alpha}{R^2} \times i$ quedará reducido á $I' = \text{sen. } \alpha \times i$, toda vez que en este caso el denominador R, será siempre igual ó constante, por lo que no habrá necesidad de tenerlo en cuenta, para los efectos de la mencionada ley, pues la fórmula exije, elementos de dependencia, variables para con respecto al elemento que se considera y al foco luminoso.

Sin embargo, puede si se prefiere, deducir la ley directamente, para este caso particular.

Para eso demos por supuesto que se considera en *abcd*, (figura 190) un elemento plano rectangular y tan pequeño como se quiera de la superficie de que se trate, encontrando normalmente ál mismo, una serie de rayos luminosos R, todos paralelos.

Así el citado elemento, recibirá todo el haz de rayos luminosos que caben dentro del paralelepípedo de base *abcd*, y de dirección R, y así llamemos I, la intensidad de luz, recibida por el citado rectángulo. En este estado, gírese la base *abcd*, de una cierta cantidad angular *abf*, alrededor de la arista inmóvil *bc*, para colocarse en la nueva posición oblicua *bcef*, en cuyo caso llamando I′, la intensidad de iluminación del rectángulo *bcef*, originada por todos los rayos luminosos contenidos en el paralelepípedo Σ', y en donde llamaremos α, el ángulo agudo formado por los rayos luminosos, con el

plano de base *bcef*, ángulo que visiblemente es igual al complemento de *gce*.

Ahora bien, es obvio que las intensidades I, I′, han de ser proporcionales á la cantidad de rayos luminosos contenidos, dentro de los respectivos paralelepípedos, y por lo tanto, podrá establecerse la siguiente proporción

$$\frac{I}{I'} = \frac{abcd}{bcgh} = \frac{ab \times bc}{bh \times bc} = \frac{ab}{ab \times \text{sen. } \alpha} = \frac{1}{\text{sen. } \alpha} \text{ ó bien}$$

$I' = I \times \text{sen. } \alpha$ (3), cuya es la misma expresión que habíamos encontrado en (2), valiéndonos de otras consideraciones.

Para otra inclinación α', de la base ó elemento considerado, se obtendrá de la misma, la intensidad correspondiente I″, por medio de la igualdad

$$I'' = I \times \text{sen. } \alpha' \text{ (4).}$$

De las ecuaciones (3) y (4), puede inferirse la siguiente proporción $I' : I'' :: \text{sen. } \alpha : \text{sen. } \alpha'$. Cual expresión traducida literalmente dice que: **La iluminación de dos rectángulos iguales, pero diversamente inclinados para con respecto á los rayos luminosos, es entre sí, como los senos de dichos ángulos de inclinación.**

239. Cuando el ángulo α, es recto, la iluminación alcanzará el grado máximo y la ecuación (3) se convertirá en $I = I'$, en este caso, la intensidad, la conoceremos simbólicamente por 1 y por fracciones de 1, las intensidades inferiores.

240. Cuando α, sea igual á *cero*, su seno será también *cero*. En este supuesto, convendremos que corresponda á la tonalidad *cero*, la tinta de la línea que separa la parte iluminada, de la que concierne á la sombra propia.

Así pues, variando ahora el ángulo α, desde *cero* á 90.°, obtendremos que el valor de la intensidad I′, irá pasando sucesivamente por todos los valores posibles, comprendidos entre la tonalidad 1, hasta la que corresponda á la *cero*.

Así tendremos que los tonos de claro obscuro, empezarán por la intensidad 1 ó sea la iluminación completa y concluirá con la intensidad *cero*, esto es que los tonos intermedios, irán pasando sucesivamente y por grados desde la mayor iluminación, hasta la tinta más fuerte de la sombra propia, cual se encuentra en las inmediaciones de la línea divisoria de luz y sombra.

Con ello tendremos pues, una base, de la cual se podrán hacer partir las operaciones, concernientes á la determinación de las distintas zonas de iluminación gradual, la cual constituye la llamada *degradación de tintas*; más antes de entrar á ocuparnos de tan interesante estudio, conviene nos detengamos en los puntos y líneas brillantes de las superficies, cualesquiera que ellas sean, haciendo notar de paso, que no hay que confundir el elemento brillante, con el elemento de máxima iluminación; pues ambos tienen propiedades bien distintas, máxime cuando se les compara con la situación del observador. En efecto, el punto brillante situado en una superficie pulimentada, ó si se quiere también medio pulimentada solamente, depende precisamente de la posición que guarda el observador, toda vez que el sitio de la superficie en donde se verifica semejante fenómeno luminoso, es tal, que la normal en este punto á la indicada superficie, ha de dividir en dos partes iguales al ángulo formado por el rayo directo y el reflejado, y este último, ha de pasar por el órgano visual. Si el observado cambia de posición, el rayo reflejo será otro y otro será también, el punto de donde parte en la superficie. De aquí se infiere que el punto que sea brillante en una superficie y que forme parte de la proyección vertical de la misma no podrá corresponder, al punto brillante que ataña á la proyección horizontal; serán con esto, dos puntos distintos no correspondiéndose entre sí con una recta perpendicular á la línea de tierra, toda vez que el punto de vista que corresponde á la proyección vertical es completamente distinto, del que sirve de guía para formar la proyección del cuerpo en el plano horizontal.

Mas si consideramos en una superficie mate ó también á medio pulimentar, el elemento de máxima intensidad de luz, entonces éste, según lo dicho en el núm. 237, será aquel en que el rayo luminoso se confunda con una normal á la superficie, ó lo que es lo mismo, forme ángulo de 90° con el plano tangente de esta superficie en el elemento que consideramos.

Con sólo esta propiedad inferirse puede ya, que el fenómeno que se verifica en dicho punto es independiente de la posición del observador, y así el punto encontrado en una proyección, la vertical, por ejemplo, habrá de corresponder con el de la proyección horizontal por medio de una recta perpendicular á la línea de tierra, como así se verifica con todos los puntos así expresados en proyecciones ortogonales.

Resultado de semejantes consideraciones serán, que los puntos y líneas brillantes los encontraremos en las superficies pulimentadas, mientras que los puntos de máxima intensidad corresponderán á las mates, cuyas disfrutarán también de la degradación de tintas, y que finalmente las superficies de mediano pulimento, comprendidas entre las primeras y las segundas gozarán algún tanto de las propiedades de ambas, pues en ellas aparecerán puntos brillantes ó muy semejantes á ellos, pues no brillarán con tanta intensidad, siendo tal este brillo, que no impedirá que sea observada la degradación de tintas de la superficie de que se trata. Y en efecto así pasa en esta clase de superficies, cuales ya anteriormente se ha indicado que tienen la particular propiedad de reflejar parte de la luz que reciben, al paso que la restante queda difundida en el espacio en todas direcciones. En cuanto á la luz refleja, no influye para nada en la degradación de tintas (núm. 230) de los cuerpos pulimentados, al paso que la luz difusa, actuando análogamente como se ha dicho en las superficies mates, motivará alguna pequeña variante en la mencionada degradación.

Así, pues, las superficies mates y las de mediano pulimento disfrutan igualmente la degradación de tintas, dependiendo la tonalidad de sus distintos elementos del ángulo que forma el rayo luminoso con el plano tangente del elemento que se considera, de modo que estableciendo el paralelo entre ambas superficies, podremos sentar el siguiente principio.

241. Dos superficies iguales y de igual colorido, pero que una de ellas sea medianamente pulimentada y la otra mate, y expuestas á un mismo haz de rayos luminosos, colocadas con igual inclinación con respecto á las mismas, aparecerán afectadas con degradación de tintas aproximadamente de igual tonalidad, con la única diferencia empero de que á más de dichas degradaciones, aparecerá en la medianamente pulimentada el punto ó puntos brillantes.

Semejantes propiedades pueden fácilmente comprobarse experimentalmente, exponiendo á los mismos rayos luminosos dos esferas iguales y del mismo colorido ó blancas si se quiere, la una pulimentada y la otra mate. Las dos aparecerán con tintas igualmente degradadas, distinguiéndose la iluminación de ambas en la aparición del punto brillante en la primera, mientras que la segunda carecerá de él.

En suma, que al tratar de cada uno de los tres tipos de superficie, habrá que atender según ellas á determinar distintos detalles de iluminación, así:

Para las pulimentadas serán los elementos brillantes, ya formados por puntos ó líneas.

Para las medianamente pulimentadas habrá puntos brillantes y degradación de tintas.

Para las mates puntos de máxima iluminación y degradación de tintas.

Empezaremos ya, una vez impuestos en las precedentes consideraciones y datos elementales, á determinar todas las partes que determinan en las superficies los distintos grados de iluminación ú obscuridad, empezando dicho estudio con la teoría de los puntos y líneas brillantes.

242. Puntos brillantes.—La teoría de los puntos brillantes tiene por base las dos leyes de reflexión, que demuestra experimentalmente la catóptrica.

Primera ley.—Cuando un rayo luminoso AO (fig. 191) encuentra á una superficie pulimentada CD, se quiebra en O, retrocediendo en dirección opuesta OA′. Aquí AO es el rayo incidente y OA′ el reflejado, y ellos dos son tales, que si concebimos levantada en O la normal ON á la superficie, el ángulo $AON = \alpha$ que es el ángulo de incidencia, será igual al ángulo NOA′, cual se llama ángulo de reflexión.

Segunda ley.—El rayo incidente y el reflejado están en un mismo plano con la normal ON á la superficie en el punto de retroceso O; y es tal esta normal, que resulta ser la bisectriz del ángulo formado por el rayo incidente con el reflejado.

Punto brillante de una superficie, es aquel en que el rayo reflejado va ha herir directamente al ojo del observador.

Así (fig. 192) si S es un foco luminoso, partiendo de él, los radios S*a*, S*b*, S*c*, ... etc., cuales encuentran á la superficie P en *a*, *b*, *c*, ... etc., entonces el punto *b* será brillante para el observador, colocado en O, toda vez que, en él se verifica, que de todos los rayos reflejos *b*O es el único que hiere la vista del observador.

243. Resolución general del problema.—Sean respectivamente S y O (fig. 193) el foco luminoso y la situación del observador, y Σ el cuerpo considerado. Consideremos al mis-

mo tiempo á S y O como á focos de una elipse de eje mayor arbitrario tal como *mn*, y constrúyase ésta en *mGn*; hecho esto, imagínese, que sin variar los focos S y O, el eje mayor va aumentando insensiblemente, adquiriendo con ello las nuevas elipses mayor contorno, al paso que se hacen girar todas ellas alrededor del eje *mn*, en cuyo caso irán formando en el espacio una serie de elipsoides, de los cuales habrá uno que irá á ser tangente á la superficie Σ, en el punto V, ésta será el brillante que buscamos; y en efecto así ha de ser, porque la normal VN común á la superficie Σ y al elipsoide, es también normal á la meridiana elíptica *m'Vn'*, y por lo tanto es bisectriz del ángulo de los dos radios vectores SV, VO, cuyos son el primero el rayo incidente, y el segundo el reflejado.

Este elipsoide reune la propiedad, de que todos sus puntos son brillantes para el observador colocado en O, conservándose el punto luminoso en el foco S, dando con ello motivo á que se le dé el nombre de *Elipsoide auxiliar brillante*, y con él nos hacemos completo cargo de la posibilidad, de encontrar fácilmente los puntos en los cuales, se cumplen las dos leyes físicas anteriormente indicadas, una vez dada la superficie, así como la situación del punto de vista y el foco luminoso.

De lo expuesto se infiere, que puede sea tal la superficie, así como la posición del observador, que puede darse el caso en que aparezca más de un punto brillante como son los V, V', y así también que no exista ninguno, atención hecha á ser la envoltura del cuerpo una superficie completamente irregular, y falta de aquellas condiciones geométricas que ofrecen curvatura obedeciendo á leyes determinadas.

Mas si la consideración del elipsoide auxiliar brillante es á propósito para hacernos comprender la teoría de los puntos brillantes, no se aviene por otra parte, con la facilidad y expedición que se necesita en la práctica de los problemas, y bajo este motivo, nos valdremos de otro medio mucho más sencillo, cuyo vamos á ver, y que es debido á Mr. Hachette.

Sea en la (fig. 194) Σ el cuerpo de que se trata, así como S el foco luminoso y el O el punto de vista; unamos S con O, y demos por resuelta la cuestión, partiendo del supuesto que V es el punto brillante. De serlo, la normal VA dividirá en dos partes iguales al ángulo SVO; además, la normal VA habrá de encontrar forzosamente en un punto, á la recta SO, cuyo punto B estará intermedio entre S y O.

También resultará; que si por O trazamos la OA, paralela al rayo incidente VS, ésta OA cortará en A á la antedicha normal, y de tal modo, que OAB = SVB = BVO, luego el triángulo AOV es isósceles, y por lo tanto OA = OV.

El punto V, según eso, y bajo el punto de vista geométrico, reune dos propiedades:

Primero; ser producido por la intersección de una normal á la superficie, normal que indispensablemente ha de cortar en un punto intermedio entre O y S á la recta OS.

Segundo; ha de ser tal, que trazando por O una paralela OA al rayo incidente SV, corte á la normal BV en un punto A, á una distancia de O, igual á la que medie entre éste último, y el brillante de que se trata tal como V.

Por la inversa pues, si estas dos condiciones se verifican para un punto, éste será el brillante. Y con ello tenemos ya abierto el camino expedito para resolver la cuestión. Para ello escojamos distintos puntos B, C, F sobre la recta SO, trazando desde cada uno de ellos, normales á la superficie Σ, aquéllas la cortarán en puntos tales como *a*, V, *a'*, ... etc., cuáles unidos nos darán una curva de ensayo, en la cual se encontrará el punto que buscamos (dado caso que el problema tenga solución), toda vez que con ellos tendremos satisfecha la primera condición.

En los planos de cada una de estas normales con la recta OS, trácense las paralelas OE, OA, OD, ... etc., á las rayos incidentes S*b'*, SV, S*b*, ... etc., para así encontrar los puntos E, A, D, y en seguida con su auxilio, los triángulos isósceles EO*b'*, AOV, DO*b*, ... etc., y de ellos finalmente los puntos *b'*, V, *b*, ... etc., cada uno situado en su correspondiente normal, y á igual distancia de O, que lo están E, A, D, ... etc. Unanse pues dichos puntos, y nos darán otra curva de ensayo *b*, V, *b'*, ... etc., los cuales cumplirán con la segunda de las dos condiciones requeridas.

Si estas dos curvas pues llegan á cortarse en V, por ejemplo, éste será el punto brillante.

Si bien se considera, este caso es el que reviste toda la generalidad posible, mas no es el más aplicable en la práctica, en donde se supone el foco luminoso ser el astro solar, y por lo tanto los rayos luminosos se suponen sin error sensible, como paralelos, así como paralelos también los rayos visuales, por venir representados entonces los cuerpos por medio de proyecciones ortogonales, por lo que el punto de visión se encuentra á una distancia infinita.

Para deducir pues, este caso del general que acabamos de ver, supongamos en primer lugar: que conservándose el punto de vista á una distancia finita, el foco luminoso se vaya alejando en la dirección OS, hasta alcanzar la distancia infinita, entonces los rayos solares serán paralelos á la dirección OS′ (fig. 195); las normales como anteriormente, partirán de los puntos C, B, A, dándonos los puntos *a*, V, *c*, en sus intersecciones con la superficie Σ, y así la primera curva de ensayo será *a*V*c*, mientras que las distancias OC, OB, OA, serán aquellas á que han de distar del punto O, los puntos c_1, V_1, a_1, situados sobre las mencionadas normales, y así la curva $c_1V_1a_1$, la segunda línea de ensayo; la intersección de ambas curvas, nos proporcionará así el punto brillante V.

La solución dada en la (fig. 193) empleando el elipsoide auxiliar brillante, se modificaría de manera que trasladado el foco S al infinito, la elipse generadora se convertiría en parábola y el elipsoide en un paraboloide auxiliar brillante (fig. 197).

Este es el caso que se aplica en la perspectiva, pues allí se considera el punto de vista á una distancia finita, mientras que el foco luminoso se supone la luz solar.

Finalmente, admitiendo el caso común de que se hace continuo uso en la práctica, cual es partir de ser infinitas las distancias tanto del punto de visión, como del foco luminoso, entonces las construcciones se simplifican notablemente, toda vez que los rayos luminosos son paralelos entre sí, como lo son también en su dirección particular los rayos visuales, de donde se infiere que todas las bisectrices formadas de un rayo luminoso con otro visual, serán también todas ellas paralelas entre sí. Así en la (fig. 196), si A, representa el punto brillante de la superficie Σ, en el supuesto de ser Sω, la dirección de los rayos luminosos y Oω, la de los rayos visuales; la normal A *n*, á la superficie, será en virtud de lo dicho, paralela á la bisectriz ω *b*, del ángulo O ω S. Y recíprocamente si la normal A*n*, es paralela á la citada bisectriz ω *b*, sucederá que, trazando por A, las rectas AS′, AO′, respectivamente paralelas á ω S, ω O, el primero representará un rayo incidente, cual deberá ser reflejado precisamente en la dirección del segundo que va dirigido al punto de vista, y por lo tanto A, será punto brillante.

244. En semejante hipótesis podemos aún definir el punto brillante, diciendo que *es aquel en que la normal á la superficie, es paralela á la bisectriz del ángulo formado de un rayo luminoso con el rayo visual.*

O bien si queremos hacer depender dicha definición, del plano tangente en el punto que se considera, podemos decir, que el punto brillante de una superficie, *es aquel en que el plano tangente á la misma superficie, es perpendicular á la mencionada bisectriz.*

245. Hubiéramos del mismo modo, encontrado semejante resultado, si los razonamientos hubieran partido de la (figura 197), esto es, del paraboloide auxiliar brillante, pues en este caso, supondríamos que el punto de vista, foco de la parábola, va alejándose sin cesar, hacia la dirección OV, pasando sucesivamente por las posiciones O′O″ etc., entonces la parte que antes habíamos considerado se irá abriendo sin cesar, no abandonando por esto sus ramas la tangencia V, con la superficie Σ; el parámetro irá aumentando, mientras que la curvatura disminuyendo hasta que finalmente al llegar al límite, el punto se trasladará al infinito, la parábola se habrá abierto por completo, la curvatura será nula, y el paraboloide se convertirá en el plano P. Este será el llamado *plano auxiliar brillante*, y sustituye en este nuestro caso á los *paraboloides* y *elipsoides brillantes*, de los casos anteriores. Aquí, pues, todos los puntos del plano P, y de todo otro plano que le sea paralelo, serán brillantes; pues es evidente que habiéndose trasladado al infinito los puntos O y S, todos los rayos incidentes serán paralelos entre sí, así como lo serán también, todos los rayos reflejados. de lo cual se infiere que todas las bisectrices de los ángulos, que forman uno cualquiera de los rayos incidentes, con uno cualquiera de los reflejados serán también respectivamente paralelas.

Por lo que se refiere á la superficie propuesta, claro está, que se la supone vista desde el punto O, situado al infinito, y en la dirección VO, inferimos que no contará más de brillantes, que los puntos, por los cuales la dirección de las normales, tal como VN, sea paralela á la dirección de las bisectrices referidas, pues que en este caso, el rayo reflejado se confundirá con el visual, únicos puntos en los cuales acontece semejante propiedad.

Ya convenientemente impuestos de todos los elementos y propiedades que anteceden, pasemos á resolver algunos ejercicios que sirvan de práctica y concluyan de fijar las ideas,

sobre la determinación de los puntos brillantes. Ya de momento y por poco que se haya profundizado semejante teoría, vendremos á deducir que en esencia, tiene por objeto la resolución de un problema muy conocido de la Geometría Descriptiva, cual es *trazar á una superficie cualquiera, un plano tangente paralelo á otro dado*. Aquí el plano dado, es el trazado perpendicularmente, á la bisectriz del ángulo formado por los rayos luminosos y visual. * Recordemos brevemente la resolución que allí adoptamos. Puesto que los planos P. del dato y el Q, del resultado han de ser paralelos, claro está, que en el punto x, de contacto pasarán dos rectos a, b, contenidas en el plano Q, cuales tendrán sus respectivas paralelas a', b', contenidas en el plano P; bajo este supuesto, empiécese el problema, trazando dos rectas a', b', en el plano dado P, construyendo luego la curva de contacto, φ, de un cilindro circunscrito á la superficie y cuyas generatrices sean paralelas á la recta a', y después otra curva de contacto ψ de otro cilindro circunscrito también á la misma superficie, pero cuyas generatrices sean ahora paralelas á la otra recta b'; resuelto lo dicho, será evidente que si estas dos curvas φ y ψ, se cortan por ejemplo en un punto tal, como ζ, este punto será el que resolverá la cuestión, pues por él pasarán dos rectas tangentes á la superficie, la una la a, generatriz del primer cilindro y la otra la b, generatriz del segundo cilindro ambas paralelas la una á la a' y la otra á la b'.

Como vemos este procedimiento, es general, aplicable á toda clase de superficie, mas no puede ocultarse por otra parte, que pueden presentarse circunstancias en que las construcciones, aunque fáciles sean de mucha complicación y engorrosas, razón por la cual convendrá siempre que posible sea, recurrir á las propiedades particulares de cada superficie, para facilitar el camino de investigación práctica.

246. *Superficies desarrollables y sus líneas brillantes.*—Como quiera que en toda superficie de este género, el plano tangente reune la propiedad de tangencia, á todo lo largo de la generatriz, por cuya razón, se denomina esta ge-

---

* Foco luminoso y punto de vista á distancia infinita para que puedan considerarse como paralelos todos los rayos luminosos de una parte y los visuales de otra.

neratriz de contacto, se infiere que si hay brillantez, ésta se verificará, no en un punto solo, sino en toda una recta, será la que se llama arista brillante. Mas raras veces resulta posibilidad de encontrarlas toda vez que en general, tratándose de superficies desarrollables, tal como vengan dados los datos, el problema es imposible y si alguna vez aparece solución, será debida á una de tantas casualidades.

Y en efecto, en primer lugar, es indispensable que exista una generatriz de la superficie, que séa paralela al plano dado, y en segundo lugar, que pueda trazarse por el pie ó traza horizontal de esta superficie una tangente * y que sea paralela á la traza horizontal del plano dado, ahora bien semejantes condiciones salta á la vista que no será dable cumplirlas á menos que no sean hechos casuales ó datos escogidos apropósito.

247. Supongamos que la superficie desarrollable de que se trata, sea un cilindro Σ, Σ', de la (fig. 199), siendo $R^v \cdot R^h$, el rayo luminoso, y quiere encontrarse la arista brillante, sobre el plano vertical. En este concepto, la recta $\omega'O$, perpendicular al plano vertical, representará la dirección de los rayos visuales; así es que, convendrá ahora según lo anteriormente expresado, encontrar la bisectriz del ángulo $R^h\,\omega'O$.

A este efecto, giremos el plano de estas dos rectas, hasta colocarlo paralelo al plano horizontal, y así tomando por eje de giro la $\omega'O$, tendremos que este ángulo vendrá expresado en verdadera magnitud en $a'''\omega'O$, el cual tiene por bisectriz la recta $a^{IV}\omega'$, y finalmente esta última trasladada ahora á su verdadera posición en el espacio, irá á colocarse en $a^{V}\omega'$, $a\omega$.

---

* Aquí nos referimos á la traza horizontal de la superficie, mas se comprende que también hubiera podido ser su traza vertical, en cuyo caso la tangente á la curva, en el punto de traza vertical de la generatriz, habrá de ser paralela á la traza vertical del plano dado. Prescindiendo si se quiere, de los planos de proyección y acudiendo á un plano secante cualquiera, que cortará á la superficie y al plano dado, entonces habría de existir la condición de que pudiera trazarse á la curva de sección con la superficial desarrollable una tangente paralela, á la recta producida por la intersección de los dos planos.

Y finalmente, prescindiendo aún del plano secante ante dicho, podríamos suponer una curva cualquiera C sobre la superficie, y entonces para que el problema tuviese solución sería necesario que tuviese lugar la casualidad, de que el plano dado contuviese dos rectas tales, que una de ellas fuese paralela á una generatriz, y la otra á la tangente á la curva C en el punto en donde viene á ser cortada por dicha generatriz.

Todo pues, queda reducido ahora á trazar á la superficie cilíndrica un plano tangente, que reuna la propiedad de ser perpendicular á la bisectriz encontrada a^v ω', aω. Con este fin condúzcase la GH, perpendicular á la a^v ω', y tangente al mismo tiempo á la base del cilindro. En este estado, si el problema tiene solución, la generatriz que parte del punto B, tal como BI, será en su proyección vertical B'B", la arista brillante que se busca. Para cerciorarnos de ello, bastará examinar si el plano tangente al cilindro á lo largo de la arista BI-B'B" es efectivamente normal á la recta a^v ω aω, y si así sucede, claro será que la traza vertical del plano, resultará perpendicular á la proyección vertical de la recta. La dirección de la traza vertical del plano, sabemos ha de ser paralela á una de sus generatrices verticales, por ejemplo la que pasa por un punto cualquiera I, de dicha generatriz, condúzcase pues está vertical, en IJ-I'J', y como resulta que el ángulo α, no es recto (pues la NI' es paralela á aω, se inferirá que la arista B'I', no es brillante, y en su consecuencia el problema no tiene solución.

En la (fig. 200) se ha ensayado por igual procedimiento, si existía la arista brillante en proyección vertical en un cono, valiéndonos del mismo rayo luminoso y de la misma bisectriz encontrada en la (fig. 199), y ha resultado como es de ver, que el ángulo α no era recto y por lo tanto no existía línea brillante.

248. *Punto brillante en una esfera.* (fig. 201) Propongámonos encontrar el punto brillante en la proyección vertical, á cuyo efecto, el rayo luminoso R^v - R^h lo hemos hecho pasar por el centro de la esfera; aquí el rayo visual es ω'O' perpendicular al plano vertical.

El ángulo formado por los rayos visual y luminoso es el S'ω'O', proyectado verticalmente en Sω, rebátase este plano en ωa", así vendrá dado en verdadera magnitud dicho ángulo en a'''ω'O', pudiendo con ello deducir la bisectriz geométrica eω', la cual divide en ψ y ψ', en dos partes iguales á dicho ángulo. Es evidente que esta bisectriz es normal á la esfera y la corta en el punto b' (pues adrede hemos empezado escogiendo el punto centro ω, ω' para por él, conducir un rayo visual y el luminoso; partiendo de la propiedad de que las normales de la esfera parten todas del centro de la misma). Conduzcamos el punto b,'b, á la posición que le corresponde en el espacio,

para lo cual deshaciendo el giro, dicho punto viene á colocarse definitivamente en V, y este será el pedido. Si quisiéramos el punto brillante para con respeto al plano horizontal, entonces, la visual sería la Oω vertical, y el ángulo del rayo luminoso con el visual el SωO, y repitiendo las operaciones anteriores, pero en orden inverso, como es de ver en la (figura 201), llegaremos á obtener el punto en V'. Nótese que estos dos puntos son completamente distintos, no correspondiendo en una recta perpendicular á la línea de tierra, conforme lo hacen las proyecciones que representan un solo punto en el espacio. Unicamente coincidirán enlazados con dicha perpendicular á la línea de tierra, en el solo caso de emplear el rayo luminoso cuyas proyecciones forman ángulos de 45° con dicha línea de Tierra.

249. Esfera iluminada y vista respectivamente por un foco luminoso y punto de vista situados á distancias finitas. Esta cuestión puede resolverse echando mano de la solución general del párrafo (n.° 243), siendo facil la construcción de una de las curvas de error, por ser la esfera, la superficie de que se trata.

En efecto. (Fig. 198). Sean A., el foco luminoso y B, el punto de vista, así la esfera, la que tiene el centro en O. y el radio OK. En este supuesto la primera curva de ensayo, lugar geométrico de todos los puntos de intersección de las normales, con la esfera y que parten de los distintos puntos de la recta AB, será un círculo máximo, toda vez que todas dichas normales concurren al mismo punto O, centro de la esfera, y todas por lo tanto estarán contenidas en el plano de los tres puntos A, B, O., no pudiendo por lo mismo cortar á la esfera sino el círculo máximo de sección de dicho plano, con la esfera. Condúzcase pues dicho plano por estos tres puntos encontrando la sección circular de que hablamos, y una vez encontrada rebátase junto con la recta AB, en el plano horizontal.

La (fig. 198) supone ya hecho este rebatimiento. Teniendo así dispuesta la recta en AB, y el círculo en el que hemos fijado el centro en O. y el radio en OK.

Ahora el problema quedará reducido á una simple cuestión de Geometría plana, cual será, el buscar en esta circunferencia, aquellos puntos tales, en donde trazando por cada uno de ellos, un rayo visual y otro luminoso, la bisectriz del

ángulo por ellos formado sea normal á esta circunferencia y por lo tanto á la esfera. Esto pues lo conseguiremos por medio de otra segunda curva de ensayo, trazada del siguiente modo: Trácese por O. una normal cualquiera, tal como por ejemplo la ON, y al mismo tiempo la circunferencia de centro ω, y diámetro OB, así como también la otra circunferencia, de centro O y de radio OB; mediante estas construcciones tenemos ahora que la normal ON, corta á la primera circunferencia en el punto C; únase B con C, y prolónguese esta cuerda hasta cortar en D, á la circunferencia de mayor radio, y finalmente, únase A, con D, prolongando luego esta recta, hasta cortar en E. á la antedicha normal; entonces el punto E. unido con A y con B, será el vértice de un ángulo AEB, cuya bisectriz será la normal EN, y evidentemente cumplirá la condición este punto, de ser brillante en una esfera cuyo radio fuera OE. En efecto de estas construcciones se infiere que el ángulo OCD., es recto (está inscrito en una semicircunferencia, pasando un lado por los extremos del diámetro, teniendo por medida la mitad del arco que sus lados abrazan); luego la BD es una cuerda de la circunferencia mayor, y esta cuerda por ser cortada perpendicularmente por el radio ON, queda dividida en dos partes iguales en el punto C, luego los triángulos BCE, DCE son iguales, y así el total DEB es isósceles y el ángulo en E queda dividido en dos partes iguales por la altura EC.

Repítase ahora esta operación tantas cuantas veces se crea conveniente, como por ejemplo para la normal ON′, ésta cortará en C′ á la circunferencia del centro ω, únase *c′* con B, y como en la construcción anterior, la prolongación de la cuerda BC′, cortará en D′ á la circunferencia BED, y uniendo D′, con A, la recta que así resulta AD′, cortará finalmente en E′ á la normal N′O, siendo así E′, el punto tal en el que el radio visual E′A y el luminoso E′B, formarán un ángulo, cuyo le será bisectriz la N′O normal á una esfera cuyo radio fuese OE′. Continuando así sucesivamente obtendremos todos los puntos de la curva de ensayo, especie de línea de lazo AE′OB EOM, la cual pasa por A, por B, y por O siendo este, punto doble, por pasar por él dos veces la curva.

Verificándose pues en todos los puntos de esta curva las propiedades indicadas en E y E′ claro está que al cortar dicha segunda línea de ensayo, en los puntos α,β,λ,δ, á la primera línea de ensayo cual es la circunferencia de centro O, y

de radio OK. estos puntos cumplirán las dos condiciones que se exigen para los puntos brillantes. Sin embargo, precisa ahora distinguir la posición relativa de estos cuatro puntos para con respecto de los puntos A y B. Aquí realmente el punto α, resultará brillante, mas los dos puntos δ y β, si bien cumplen las condiciones geométricas, no así tiene lugar en ellos las físicas toda vez que el δ, no es accesible para el foco luminoso B, y el β, no lo es para con respecto al punto de vista A en atención á la masa opaca de la esfera cual no puedan llegar á δ los rayos luminosos y á β los visuales.

El punto γ sería brillante en el concepto de considerar la mitad inferior JKG, después de quitada la superior, teniendo así no más en cuenta la parte de superficie cóncava interior del hueco de la semiesfera.

Las normales á la esfera en los puntos α y γ, son realmente bisectrices de los ángulos formados por el rayo solar y su reflejado el visual; más en los puntos β y δ la normal es bisectriz del suplemento de aquellos ángulos.

Puede observarse también que los puntos α, γ, pueden considerarse como puntos de contacto de dos elipses, cuyos focos fueran A y B con la circunferencia JKG, con la diferencia única de ser interior la circunferencia mentada para con respecto á la elipse del punto γ; la de α es exterior.

Y por lo que se refiere á los puntos β, δ, son concernientes á una hipérbola tangente á la expresada circunferencia JKG.

Dicha cuestión puede dar tema también para un problema enunciado de las dos maneras siguientes:

1.ª Dados los puntos A y B á desigual distancia de una circunferencia, determinar sobre esta última un punto γ, tal que unido con los puntos dados, se obtenga un triángulo isósceles J γ P, inscrito á la propia circunferencia.

2.ª Dados dos puntos A, B, no equidistantes de una esfera de centro O, encontrar el mínimo camino que une estos dos puntos y sea tangente á la esfera.

250. Punto brillante en una superficie de revolución.— Escogemos como á superficie de esta clase la moldura *tórica* de la fig. 202, lám. 34. El rayo luminoso está dado en R^v - R^h, y se desea encontrar el punto brillante para con respecto al plano de proyección horizontal. En este concepto los rayos visuales tendrán la dirección de la vertical O″V. Procedamos

según eso, y ante todo á buscar la dirección de la bisectriz del ángulo $R^v O'' V$, formado por un rayo luminoso y otro visual.

A este efecto hágase girar alrededor del eje OO'V el plano vertical OR^h que contiene este ángulo hasta colocarle paralelo al plano vertical; en este movimiento un punto $a^h \cdot a^v$ del rayo luminoso vendrá en a''-a' y como O'' es fijo, el rayo rebatido será R', y el ángulo que se desea el R'O''V, cuya bisectriz se trazará en NO'', y finalmente, colocando estas líneas en el lugar donde les corresponde en el espacio, dicha bisectriz vendrá á tomar la posición N'O''-R^h O.

La cuestión queda ahora concretada al trazado de un plano tangente á la superficie, cuyo tenga su dirección perpendicular á dicha bisectriz. Nada más fácil que esta operación, valiéndonos aquí de las propiedades particulares de las superficies de revolución. En efecto, en ellas toda normal encuentra al eje en un punto, y como á tal está contenida en un cierto plano meridiano. Aquí en nuestro caso el plano meridiano de que se trata será con evidencia el vertical OR^h que proyecta horizontalmente el rayo luminoso, y por tanto bastará conducir á la curva meridiana de este plano una normal paralela á la bisectriz OR^h, O''N', y precisar con toda la exactitud posible el punto de intersección de dicha normal con la curva mencionada.

Mas para efectuar geométricamente esta operación, volvamos á girar el plano OR^h, hasta que coincida con el meridiano principal OA; entonces este meridiano se confundirá con los dos círculos de centro ω, ω', y como quiera que en esta disposición la bisectriz también girada de la misma cantidad es la O''N, de aquí se infiere que trazando por dichos puntos ω, ω' dos radios ωc, $\omega' d$ respectivamente paralelos á la O''N, los puntos c y d, en donde corten á la curva meridiana, serán los que cumplan con la condición de la brillantez por ser en ellos el plano tangente PP, P'P', perpendicular á la dirección de la expresada bisectriz. Sólo resta colocar estos puntos en el sitio de la superficie que les corresponda, tales como φ, φ', y ellos satisfarán en un todo á lo propuesto.

251. Punto brillante en una superficie de segundo grado.—Propiedad de la cual partimos, es la de que en una superficie de esta clase se verifica que la curva de contacto

de un cilindro circunscrito á la misma es una línea plana, y su plano es diametral conjugado con el diámetro paralelo á la dirección del cilindro. Se elije á este efecto un elipsoide de tres ejes desiguales (fig. 204), y se quiere encontrar el punto brillante correspondiente á la proyección horizontal, adoptando el mismo rayo luminoso y bisectriz correspondiente de la anterior (fig. 202) del toro. En este supuesto, el plano V^p, H^p, cuyas trazas son perpendiculares á las proyecciones de aquella bisectriz, será precisamente aquél que será paralelo al tangente á la superficie en el mismo punto que corresponda al brillante que buscamos.

Tracemos, pues, dicho plano tangente, cumpliendo aquellas condiciones. A este efecto circunscribamos al elipsoide un cilindro, cuya dirección sea paralela á la traza horizontal H^p del plano dado.

Este cilindro tendrá por contorno aparente en el plano horizontal el espacio comprendido entre las rectas MM', SS', tangentes á la elipse de proyección horizontal y paralelas á H^p; mientras que por base será la elipse proyectada en el diámetro AB, y verticalmente en A'DB'C, todo en virtud de la propiedad invocada más arriba, y de la cual partimos. En este supuesto, todo plano tangente al cilindro, lo es igualmente al elipsoide.

Ahora es evidente que si concebimos la intersección del plano vertical AB con el plano tangente incógnito, la recta que resulte será tangente en un punto de la elipse A'DB'C, verificándose que en este punto de tangencia conoceremos dos tangentes á la superficie, cuales serán la tangente últimamente manifestada, y luego la generatriz del cilindro; ellas, pues, determinarán el plano tangente, y el punto de tangencia será el brillante que buscamos.

La cuestión, pues, queda reducida á determinar la primera tangente en cuestión. A este efecto y teniendo en cuenta que la intersección del plano Abb' con el V^p, H^p, es la recta ab, $a'b'$, cual ha de ser paralela á la que se desea, bastará conducir una tangente á la elipse A'DB'C, paralela á dicha $a'b'$. Mas para efectuar esta operación con más exactitud, haremos depender el trazado de dicha tangente de la circunferencia CA_1D, cuyo diámetro es el mismo eje mayor CD de la elipse CA'D, aprovechándonos de la afinidad que existe entre estas dos curvas, cuando ellas tienen como en este caso un eje común, y así ni tendremos si se prefiere necesidad del

trazado de la elipse C'AD, y sí tan sólo sus ejes A'B', CD.

En efecto; en caso semejante, si suponemos que φ', es el punto de tangencia incógnito y trazamos por él, la Ff, paralela al eje menor O'A', tendremos que las ordenadas Ff, $\varphi'f$ correspondientes á un punto de la circunferencia antes referida, y á otro de la elipse en cuestión, corresponderán á una misma abscisa $O'f$, y en este supuesto dichas ordenadas serán entre sí, como las semiejes menores ó desiguales $O'A_1$, O'A'. Con ello, escójase un punto cualquiera G', del eje común, y trácese por dicho punto la G'P, paralela á la $a'b'$; trasládese en ella el vértice A', en α, valiéndonos de la $A'\alpha$, paralela á O'C, trazando luego el rectángulo $A'A_1\alpha_1\alpha$. Si tomamos luego en consideración el vértice α_1 y lo unimos con G', la recta que así resulte, será la α_1G, que corresponderá á la dirección que ha de guardar la tangente al círculo CA_1D, referente al punto que tenga la misma abscisa, que el incógnito φ_1, situado sobre la elipse CA'D. Hechas pues éstas construcciones preliminares; condúzcase paralela á la dirección P'G', una tangente FG, á la circunferencia auxiliar; trasládese el punto F, en β_1, conduciendo luego por este una paralela al eje $o'A_1$, hasta que corte en β á la PG', y finalmente concluyendo el rectángulo $\beta_1\beta\varphi'F$, el vértice φ', obtenido será el punto de tangencia, que corresponderá á la tangente $\varphi'G$, paralela á la PG', ó si se quiere á la $a'b'$. Y así ha de ser, por obedecer estas construcciones, al principio antes sentado. El punto φ', proyectado horizontalmente en φ, dará finalmente, el punto brillante que se pedía *.

---

* Puede también darse solución á este interesante problema, recurriendo á los giros elípticos, haciendo girar el plano tangente incógnito, hasta tanto que sea perpendicular al plano vertical de proyección. Sea para ello la (fig. 204'). El elipsoide es el $\Sigma\text{-}\Sigma'$, el plano que se supone perpendicular á la bisectriz, es el expresado en V^P-H^P. Utilicemos para facilitar las operaciones, el plano principal AB, como de proyección vertical; en este estado, consideremos el cilindro circunscrito análogo del caso de la fig. 204; éste estará comprendido entre las generatrices GG', HH', y la curva de contacto estará proyectada horizontalmente en la recta gh, ahora es cuando podremos concebir el giro elíptico del plano tangente incógnito, cuyo punto de contacto ha de encontrarse por precisión, entre uno de tantos de la línea de contacto gh. El movimiento de gh, alrededor del eje vertical O, será tal que el punto h, describirá el arco elíptico hB, al cual le corresponde la cuerda hB, con ello la elipse proyectada en gh, irá transformándose hasta convertirse sobre el plano de proyección vertical en la misma elipse principal. Mas si tenemos ahora en cuenta que el plano P, referido en el principal L'T', tiene por traza la O'K, paralela á la V^P; tendremos que en el mencionado giro el punto F, de su traza horizontal, describe un

También hubiéramos podido poner en práctica el método del (núm. 245), en cuyo caso, después de haber encontrado la elipse AB, A'CB'D, se procederá á la construcción de la otra elipse, proyectada verticalmente según la recta diametral QR, línea de contacto de otro cilindro circunscrito á la superficie y paralelo á la dirección de la traza V^P, vertical del plano. En este concepto, esta línea corta á la otra congénere en el punto φ', cual proyectado en φ dará el mismo punto brillante anterior; y es que ahora el plano tangente queda determinado con las dos generatrices, una de cada cilindro de contacto, al pasar y cortarse recíprocamente por el punto incógnito del contacto. Se comprende que en esta segunda solución, bastará tan sólo el trazado de la proyección vertical de la elipse del contacto, prescindiendo de la proyección horizontal, y esto tanto más en cuanto dicha proyección vertical queda concretada á una sola recta QR.

252. Punto brillante en un hiperboloide de una hoja. —Escogemos esta superficie como á ejemplo ó tipo de las de revolución de segundo grado, reglada y de doble generación. Propiedad de la misma, que se invoca para la resolución del problema; es la de que dos generatrices de sistemas distintos se cortan determinando con ello un plano tangente, siendo el punto de contacto aquel donde tiene lugar el encuentro de las mismas. Sea (fig. 203) los círculos AB, A'B', cuyas proyecciones horizontales se confunden en uno solo A"B"ED, de centro O, los que limitan el hiperboloide en su altura, y sea también el círculo FG, F'IG'H el de garganta. Quiérese encontrar el punto brillante en el plano vertical, y por lo tanto partimos del supuesto que el plano $V^P H^P$ se ha conducido

---

arco elíptico, cuya cuerda es la FI', paralela á la hB, luego este plano ya girado y perpendicular ahora al plano de proyección vertical, tendrá por trazas las KI y la II'. Condúzcamosle pues ahora el plano paralelo mM'-M'M ó sea $H^{P'}$, tangente en n-n', sobre el meridiano principal, y ésta será la posición que tomará el plano tangente incógnito después del giro. Bastará, ahora, trasladarlo á la posición que le corresponde en el espacio. Para ello observemos que el punto M, describirá un arco elíptico, cuya cuerda MQ habrá de ser paralela á la Bh, pues ha de obedecer á la ley de homología, y en éste concepto trazando por Q la $H^{P''}$, paralela á la H^P, ella será la traza horizontal del plano tangente á la superficie, y paralelo al dado P; en cuanto á su traza vertical, será la mN', paralela á la KO', ó bien á la V^P. Por la misma razón el punto de tangencia n-n', se trasladará en n'''-n'', puesto que describirá un arco elíptico, cuya cuerda es la $n'n''$ paralela á la Bh. Así el punto n'', será el brillante para con respecto al plano horizontal.

perpendicularmente á la bisectriz del ángulo formado por el rayo luminoso, y el visual perpendicular al plano de proyección vertical, cuya operación suponemos ya efectuada, conforme hemos hecho en los casos anteriores; además, para facilitar operaciones este plano se ha conducido por el centro O, O′ del hiperboloide. Consideremos ahora el cono asintótico del hiperboloide Σ, Σ′, y veamos como este cono viene cortado por el plano P, y veremos que lo corta según las generatrices *c*O, *c*′O′ y *b*′O′, esto indica, pues, que cada una de estas rectas tiene dos generatrices de la superficie que les son paralelas, siendo una de un sistema de generación, y otra del segundo. Así la *c*′O′, *c*O; tiene las paralelas 4-4′, $4_1 4'_1$; 3-3′, 3_1-$3'_1$; mientras que la *b*O, *b*′O′ tendrá las 1-1′, 1_1-$1'_1$; 2-2′, $2'_1 2'$. Ahora bien, las 1 y 4 de sistemas distintos se cortarán en ψ, mientras que las 2 y 3 se cortarán en φ; luego será evidente, pues, que dos á dos constituirán un plano tangente al hiperboloide, cuyos dos planos son respectivamente paralelos al V^p; H^p, reuniendo con esto los puntos de tangencia φ y ψ los requisitos para ser brillantes. Sin embargo, si alguno de ellos situara en la zona de la sombra propia, claro es que habríamos de descartarlo, pues aunque satisfaciera á las exigencias geométricas, no así lo haría con las físicas.

253. Punto brillante en una superficie alabeada.— Propiedad de estas superficies que facilitan el problema, son: Primero, que todo plano que pase por una de sus generatrices es ya de hecho un plano tangente. Segundo, que siempre es dable el acuerdo de la superficie con un paraboloide é hiperboloide á lo largo de una generatriz. Escojamos como á superficie alabeada un conoide (fig. 205) cuyas directrices sean el círculo AO″B, situado en el plano vertical; luego la vertical O-O′O″, y teniendo por plano director el horizontal. Sea al mismo tiempo el plano $V^p H^p$ el que es perpendicular á la bisectriz del ángulo que forma el rayo luminoso con el rayo visual perpendicular al plano vertical, lo cual indica ya de por sí que nos proponemos encontrar el punto brillante para con respecto al plano de proyección vertical. Así dispuestos estos datos, averigüemos si existe una generatriz de la superficie que sea paralela al plano P; y en efecto encontramos la O*a*′, *ab* por ser O*a*′, paralela á la traza horizontal del plano, y ser ambas horizontales.

Hagamos, pues, pasar por dicha generatriz un plano P_1, paralelo al P; este plano P_1 será el tangente que contendrá el punto brillante. Para encontrar, pues, el punto de tangencia, recurramos á un paraboloide hiperbólico, de acuerdo con el conoide á lo largo de la recta *ab*, *a*′O. A este efecto sustituyamos momentáneamente la circunferencia AO″B por su tangente *eh* en el punto *a*, haciendo resbalar luego la generatriz *ab* sobre esta recta, y sobre la misma vertical anterior O, O′O″, conservando el mismo plano director, cual es el horizontal. En este movimiento sabido es que la recta *ab* engendrará un paraboloide hiperbólico que tendrá en *a* y en *b* los planos tangentes comunes con la superficie, y como además conservan las dos el mismo plano director, serán las tres condiciones que bastan para que dichas dos superficies se acuerden perfectamente á lo largo de dicha recta; luego todo plano tangente á la una, en cualquier punto que se dé, de la generatriz *ab*, lo será igualmente á la otra.

Resolvamos, pues, dicha cuestión para con respecto al paraboloide, pues que él nos será más fácil, atención hecha á la propiedad que goza de la doble generación. Con este fin tengamos en consideración dos posiciones de la generatriz *ab*, cuando resbala por las dos referidas directrices rectilíneas; por ejemplo la *e*O-*e*O′, y la *hd*-*h*′O. En este estado el plano tangente P_1 corta á la primera en el punto *f*-*f*′, y á la segunda en el *g*-*g*′; luego la recta *fg*, *f*′*g*′ es la sección del plano con el paraboloide, dándonos con ello y resultando ser dicha recta la generatriz del segundo sistema, de lo cual se infiere que esta cortando á la *ab*, generatriz de la primera generación en el punto φ-φ′; este será el punto de contacto buscado, y por lo tanto el brillante, el cual para los efectos físicos del problema se habrá de conservar tan sólo el φ de la proyección vertical, que es el que responde á lo que pide el enunciado, del que depende el plano $V^p H^p$, del cual hemos partido.

254. Punto brillante en un conoide helizoide. – La propiedad característica de esta superficie y de la cual nos serviremos para solucionar la cuestión es: 1.°, que el plano tangente en todos los puntos de una hélice situada sobre la superficie, guarda constantemente el mismo ángulo para con respecto al plano horizontal, ó sea el plano de la sección recta del cilindro que tiene enroscada dicha hélice.

2.° Cuando se consideran los planos tangentes que co-

rrespondan á cada uno de los puntos de una misma generatriz del helizoide, entonces los ángulos que ellos forman con el mencionado plano horizontal, fluctúan desde 90° (punto de intersección de la generatriz con el eje), hasta el ángulo que dicha generatriz forma con el propio plano (que entonces el punto de tangencia se halla al infinito). Sea en la (fig. 206) R^v - R^h el rayo luminoso, y ω^v - ω^h V el rayo visual; el ángulo de estas dos rectas lo encontraremos en $a''\omega^h$ V, y su bisectriz en B; ésta colocada en su verdadera situación en el espacio vendrá proyectada en R^v - B', y finalmente queriendo averiguar el ángulo que ella forma con el plano horizontal, la colocaremos en B'', y así dicho ángulo será el α.

Sea ahora el conoide helizoide Σ, Σ', cuya construcción ya conocemos, (pues es la misma superficie empleada en la cara superior del tornillo de filete triangular visto en el n.° 206).

Es evidente ahora que si por un punto cualquiera tal como *l*, se traza una recta *lm* perpendicular á la B'', obtendremos que hará con una horizontal, como por ejemplo L'T' un ángulo β que será complemento del α, y por tanto β será precisamente la inclinación que tendrá el plano tangente incógnito (que contiene el punto brillante) con el plano horizontal.

Si el problema tiene solución, habrá, pues, de existir sobre la superficie una cierta hélice, en cuyos puntos todos los planos tangentes á la superficie estarán igualmente inclinados del ángulo β para con respecto al plano horizontal, y entre ellos existirá el que buscamos Según lo expuesto se infiere que si hacemos girar la recta *lm* en torno del eje O'O'', ella en el movimiento engendrará un cono recto, cuya base será la circunferencia *m'q'xz*, y este cono tendrá todos sus planos tangentes, paralelos á los que lo son al helizoide á lo largo de la hélice anteriormente mentada; en una palabra, será lo mismo que dichos planos tangentes á la superficie por todos los puntos de esta hélice se les hubiera comunicado un movimiento de traslación hasta pasar todos por el punto *l*, vértice del cono, en cuyo caso es visible que todos estos planos colocados y así dispuestos, nos darán en sus intersecciones sucesivas las generatrices del cono, envolviéndolo por completo.

Mediantes estas consideraciones, fijémonos ahora en la generatriz meridiana de la superficie, tal como *lg*, y escogiendo por línea de tierra la L'T', conduzcamos por ella un plano tangente al citado cono, este plano tendrá por traza horizontal la recta $n'\pi$, que parte de la traza *n* y es tangente en *q* á la base del cono. Con eso tenemos ya un plano tangente á la superficie, y formando precisamente con el plano horizontal un ángulo β, como el que ha de regular la inclinación del plano tangente que contiene al punto brillante.

Mas como dicho plano P para que fuera brillante habría de ser perpendicular á la dirección de la bisectriz R^v - B', de aquí es que hagamos girar el plano P, de modo que en sus distintas posiciones vaya conservándose tangente al cono, no parando el movimiento hasta tanto su traza horizontal se haya colocado en la disposición de P' normal á B', y entonces el plano ya cumplirá con la condición de ser perpendicular á la bisectriz, y al mismo tiempo formar el ángulo β con el plano horizontal.

Sin embargo, el plano P' en esta disposición ha dejado de ser tangente al helizoide, pues que la generatriz *ln*, *on'* ha pasado á ocupar la posición *ln'''*, O*n''*, en la cual ha dejado de pertenecer á la superficie; más tal resultado no influirá para obtener la generatriz en su debida posición. En efecto, si consideramos la generatriz en su justo límite aprovechable *lg*-O*g'*, su nueva posición será *lg''*, Og_1, de modo que Og_1, representa igualmente la proyección horizontal de una generatriz de la superficie, la cual podemos fácilmente obtenerla con sólo imaginar que dicha recta toma un movimiento de traslación vertical, pasando de la posición *lg''* á la de *lg'''*, y entonces la proyección horizontal Og_1 queda la misma. Esta generatriz es, pues, la que contiene el punto brillante, y faltará tan sólo encontrar para ello el punto de tangencia del plano tangente que por ella ya pasa con las condiciones impuestas.

Para ello volvamos á considerar la generatriz meridiana *ln*, O*n'*, y de ella tomemos varios puntos *n*, *g*, *p*, *l*, y por ellos construyamos los planos tangentes. Todas sus trazas horizontales pasarán por la traza horizontal *n'* de la generatriz *ln*, y además cada una de ellas por la traza horizontal de la tangente á las hélices correspondientes en los puntos *n*, *g*, *p*, *l*; estas tangentes sabemos que se encuentran en planos de perfil, las cuales tienen sus respectivas trazas horizontales en los puntos *n'*, φ, π, S, *x*... O, y ellos unidos, nos

dan una curva que no es otra que una parábola. De ello se infiere que según sea el plano tangente y el punto de contacto sobre la generatriz ln, así también será la situación de cada una de las trazas ν, φ, π... etc. de las tangentes sobre la parábola de aquel modo definida; y recíprocamente, dado el punto de traza sobre la parábola, por él podrá definirse el punto de contacto. Mediante esta inapreciable propiedad, claro es que una vez fijado el plano tangente P, su traza horizontal corta á la curva parabólica en el punto π, y por lo tanto, como de él parte la tangente, cuyas proyecciones son perpendiculares á la línea de tierra, esta tangente lo es en el punto p-p', y por lo tanto éste es el punto de tangencia buscado. Ahora este punto pasa en p''-p_1 cuando la generatriz gira para colocarse en lg''-Og_1, y finalmente se coloca definitivamente en el sitio que le corresponde en p'''-p_1, cuando la recta lg''-Og_1, se traslada descendiendo para confundirse con la verdadera generatriz $l'g'''$-Og_1. Así el punto p''' es el brillante que corresponde al plano de proyección vertical.

De las construcciones anteriores, se infiere que no existirá punto brillante de no ser posible el trazado de la tangente $n'qn$ desde n', á la circunferencia $zqxm'$. Y en efecto, si recordamos que todos los planos tangentes, trazados por todos los puntos de una generatriz tal como lg, pueden no más fluctuar en su inclinación con el plano horizontal, desde 90° hasta el ángulo $\gamma = lne$, claro es que puede darse muy bien el caso que el ángulo β sea menor que el γ, y por lo tanto todos estos planos de menor inclinación que el límite β han de ser excluídos de nuestro problema. Esto aparecerá cuando la traza n' queda en el interior de la base $zqxq'm'$ del cono en cuestión.

Excusado es demostrar que si el conoide helizoide está expresado á mucha altura y muchas revoluciones, quizás no más exista el punto brillante en la revolución superior, pues en las inferiores tendrá lugar la sombra arrojada de la superficie sobre sí misma.

255. Degradación de tintas.—Averiguar la mayor ó menor intensidad de luz que reciben los elementos de un cuerpo, es lo que nos proponemos en este artículo, y luego como á consecuencia analizar los cambios de iluminación, lentos y sucesivos que tienen lugar al considerar el conjunto de los elementos de la superficie de que se trate, de modo que se suce-

dan unos en pos de otros, apareciendo así una variación casi insensible, al pasar la tonalidad de la iluminación de un elemento al inmediatamente próximo; y así en conjunto descubrir perfectamente el paso de la parte más iluminada al del elemento que lo es menos, viniendo de este modo á formar lo que se llama la degradación de tintas.

Más ¿de qué depende en su mayor parte el grado de iluminación de un elemento de superficie? Ya lo indicamos en el n.° 237 cuando dejamos sentado que era la intensidad de la iluminación, proporcional al seno del ángulo formado por el rayo luminoso con el elemento considerado de la superficie. Toda, pues, queda reducida la operación á una simple operación geométrica, cual es el averiguar el ángulo que forma una recta (el rayo luminoso) con un plano (el plano tangente de la superficie, y que es prolongación del elemento que en ella se considere).

256. Degradación de un prisma recto.—Tratemos ya sin dilación á poner en práctica los principios establecidos sobre el particular, y propongámonos determinar la degradación de tintas que aparece en un prisma recto (lám. 36, figura 211) π - π', siendo R^v - R^h el rayo luminoso. Desde luego determinemos la línea divisoria de luz y sombra propia, y ésta la encontramos en las verticales ó aristas del prisma, proyectadas horizontalmente en los puntos d y g; la primera vista y proyectada verticalmente en $d'd''$, y la segunda oculta, no la tenemos en cuenta. En la parte iluminada, la degradación estará, pues, comprendida entre la generatriz d y la g. Entre las mismas median ahora (en la parte vista en el plano vertical) tres caras ó planos cuales son los verticales que se levantan en los lados ab, bc, cd; ellos en virtud de lo indicado se encuentrarán iluminados con distinta intensidad; y sea por ejemplo averiguar la que corresponde á la cara ab. Es cuestión de averiguar el ángulo de dicha cara con el rayo luminoso. A este efecto llevemos las operaciones fuera del prisma, al objeto de hacerlas más claras, toda vez que en pos de esta operación han de hacerse otras análogas para las otras caras restantes (fig. 210). Con ello, tracemos un un plano V^p - H^p, paralelo al escogido en ab, siendo ahora R^v - R^h el rayo luminoso, encuéntrese el ángulo de éste con el plano P. Para ello por un punto de R, tal como B, trácese una perpendicular $B^v N'$ - $B^h N$ al plano P, y encuéntrese el ángulo de las dos

rectas $B^v N'$ y R^v. Este ángulo sitúa en el plano que determinan las mismas, cuyo plano tiene por traza horizontal la C'G. Esta recta servirá ahora de charnela para rebatir dicho plano en el horizontal de proyección, y una vez rebatido nos podremos formar cargo del citado ángulo de estas dos rectas. En este movimiento de giro el punto C' es fijo; está en la charnela, mientras que el vértice B^v-B^h gira perpendicularmente á la charnela, y viene á colocarse en F á una distancia de D, que sea DF = DE, siendo DE la hipotenusa de un triángulo rectángulo B^hDE, cuyos catetos sean la perpendicular B^hD á la traza horizontal C'G, y el otro cateto la altura $B^v\beta$ de B^v al plano horizontal. Rebatido ya el vértice en F, únase con C', conduciendo por otra parte la recta FN'', paralela á la B^hN; así el ángulo N''FK será rebatido el ángulo de las dos rectas, y el complemento que resulte KFL $= \alpha$ el ángulo definitivo del rayo R con el plano P. La medida angular ó el número de grado de α nos indicará el grado de iluminación que alcance la cara vertical *ab*.

Falta ahora el medio práctico de expresar esta iluminación dependiente de la cantidad angular, y para ello nos valdremos de la escala de degradación, cual la construiremos del siguiente modo:

257. Escala de degradación de tintas. — Sea (fig. 208) AOA^x un cuadrante de círculo, comprendido entre dos radios AO, OA^x. Dividamos el radio vertical OA^x en diez partes iguales *o*'1, *o*'2, *o*'3, ... etc., conduciendo luego por los puntos de división, paralelas al radio OA, y ellas cortarán al cuadrante en los puntos A', A'', A''', A^{IV}... etc.; finalmente, por estos últimos puntos conduzcamos convergentes al centro O. Admitamos que el rayo luminoso R es paralelo á la recta AO, y que ésta representa la traza de un plano el cual se hace girar en torno del eje O, para tomar sucesivamente las posiciones radiales OA', OA'', OA'''... etc., hasta colocarse en la última, cuya disposición OA^x es perpendicular á la primera OA de partida. Ahora bien, en semejante movimiento el plano OA ha ido adquiriendo distintas inclinaciones, cuyos ángulos en O tienen por senos respectivos líneas iguales á las distancias O-*o*, 1, O-*o*, 2, O-*o*, 3... O-1, así el ángulo A''OA que mide la inclinación de OA'' tiene por seno las dos divisiones comprendidas en O-*o*, 2, y así sucesivamente.

De aquí se concluye que las inclinaciones de estos planos

para con relación al rayo luminoso, ó lo que es lo mismo los senos de dichos ángulos, estarán entre sí en la misma relación que las divisiones establecidas en OA^x, todas iguales y en la discrepancia sucesiva de $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$... etc., hasta $\frac{10}{10} = 1$, al considerarla en sumas parciales para formar los senos, esto es en O*a*, O*b*, O*c*, ... O1. La intensidad de luz en estos planos seguirá, pues, la misma ley de estos senos.

En este estado, y partiendo del plano AO, observemos que éste siendo paralelo á la dirección de la luz, su seno es visiblemente *cero*, y por lo tanto le corresponderá *cero* de intensidad; no habrá iluminación, correspondería verdaderamente á la línea divisoria de luz y sombra; mas si hacemos girar este plano para trasladarse á distintas posiciones comprendidas en el cuadrante, es indudable que los ángulos irán progresivamente aumentando; con igual ley se regirán los senos, hasta que al llegar á la posición OA^x, el plano formará ángulo recto con el rayo luminoso; el ángulo será de 90°, su seno será ya 1, esto es, el mayor de todos los precedentes, y por lo mismo le corresponderá la máxima iluminación. Según ello ya podemos inferir que la ley de degradación ó entonaciones en la mayor ó menor intensidad de luz que recibirán todos los planos comprendidos dentro el mencionado cuadrante, y que radían en el punto O, será de $\frac{1}{10}$, y así los planos irán aumentando gradualmente en intensidad, pasando ésta por los números que la representan desde O, á *o*, 1, *o*, 2, *o*, 3, *o*'4... 1. Se comprende ahora que el efecto é ilusión será mejor aproximándonos cada vez más á la verdad de los hechos, si dividiéramos la OA^x, en mayor números de partes, en cien por ejemplo; dándonos con ello una entonación al degradarse, más lenta y suave.

Mas admitamos nosotros sólo diez de estas divisiones y propongámonos utilizarlas para establecer una escala de tintas que pueda emplearse para las operaciones prácticas, y á este efecto dibujemos en la fig. 212 once círculos de radio, el que creamos más conveniente para que ofrezca campo bastante á fin de que la capa de tinta que en él establezcamos pueda dar el efecto suficiente del tono que queramos, y así obremos del siguiente modo: el círculo *a* lo pasaremos por alto, dejándole tal como está el mismo blanco del papel, pues con

él empieza la máxima iluminación que corresponde á 1; en el círculo siguiente *b*, cuya intensidad ha de ser 0 9, le aplicaremos con un pincel una ligerísima capa de tinta muy clara, y tanto que llegue á discrepar muy poco de la blancura de *a*. Esta misma capa la aplicaremos ahora á todos los círculos siguientes *b*, *c*, *d*... etc.

Una vez bien secas estas capas, vuélvase á sobreponer la misma tinta desde *c* pasando por *d*, *e*, *f*... etc., y dejando de darla á la *b*. Vuélvase á repetir la operación dejando ahora de darla á la *c* empezando con la *d* y pasando por *e*,*f*,*g*... etc., y así sucesivamente hasta haber llegado al último círculo *k*, el cual habrá recibido diez aguadas iguales y que ahora superpuestas darán la entonación de la sombra propia.

En este estado, volvamos á la fig. 211, y en ella quiérese averiguar la intensidad de iluminación que corresponde al plano de la cara *ab* del prisma, y como quiera hemos encontrado el ángulo α, el cual resulta igual al AOA^{VII} de la figura 208 que le corresponde la circunferencia *d* de la escala (figura 212) adoptaremos la entonación de tinta 0'7, y ella es la que corresponderá á la cara *ab*. Lo propio haríamos ahora con las dos caras restantes *bc*, *cd*, á las cuales corresponde á la primera la tinta 0'5, y á la segunda 0'15 *.

De querer determinar la disposición de un plano de modo que su inclinación respecto al rayo de luz satisfaga á la condición de una cierta intensidad, como por ejemplo la representada por el n.° 0'44, no habrá más que tomar en la OA^X de la fig. 208 cuatro partes de las diez en que está dividida, esto es, la cantidad O*d*, y agregarle cuatro partes de la división parcial *de*, el punto así obtenido servirá de punto de partida para trazar una recta paralela á la AO, tomando luego en consideración el corte que produzca en el cuadrante AA^X, y el punto así obtenido, unido con el O, dará una recta cuyo ángulo con AO indicará la disposición de dicho plano.

Como quiera que los números que nos indican las intensidades, son los respectivos senos de los ángulos correspondientes que hacen los elementos planos de la superficie, con el rayo

* En virtud de haber encontrado para este último resultado el n.° 0'15 que no consta en los círculos de la fig 212, será preciso tomar para él un tono intermedio entre el círculo *i* y el *g*. Por eso es conveniente y más cómodo en la práctica dividir la A^XO de la fig. 208 en 100 partes conforme hemos indicado, lo que nos proporciona ciento uno círculos de entonación en la fig. 212, y así la intensidad encontrada en el 0'15 se hallará directamente en uno de estos círculos.

luminoso, se infiere que aprovechando la fórmula $i = \text{sen}\ \alpha$, conocida que sea la inclinación, puede conocerse inmediatamente la intensidad y viceversa, pues no habrá más que substituir en uno de los miembros de dicha igualdad el valor del dato, y él nos indicará el número que afecta al otro miembro. Así, si en virtud de la operación preliminar para hallar este ángulo, se encuentra una abertura $\alpha = 41° 18'$, buscaremos en la tabla de las expresiones trigonométricas naturales, la línea que representa el seno de dicho ángulo y diremos que la fórmula $i = \text{sen}\ \omega$ se convierte en $0'66 = \text{sen}\ 41° 18'$, luego 0'66 representa aquí el tipo de iluminación.

Del mismo modo, inversamente, si se nos pide la inclinación que ha de tener el plano para que aparezca en él una intensidad en la iluminación, representada por el número 0'66, compulsaremos las tablas referidas, buscaremos cual es el ángulo que corresponda á un seno de 0'66 y de ello deduciremos el ángulo de inclinación 41° 18' que forma el elemento considerado con el rayo luminoso.

258. Líneas de igual tinta.—Son las que en una superficie disfrutan de una misma iluminación y claro es que dicha propiedad lleva consigo el que se defina dicha línea, diciendo ser el lugar geométrico de todos los puntos de la superficie, en los cuales los planos tangentes á la misma forman el mismo ángulo α con los rayos luminosos.

Según ello el problema que tiene por objeto la determinación de las líneas de igual iluminación en una superficie, está concretado á una simple cuestión de Geometría Descriptiva, esto es, la determinación de la serie de puntos de tangencia, de planos tangentes á la superficie, y que formen todos los ángulos constantes con el rayo de luz.

Cada línea de igual iluminación llevará, pues, consigo su agrupación correspondiente de planos tangentes, cuyas se distinguirán unas de otras por los distintos ángulos β, γ, δ... etcétera, que forman los planos de cada agrupación con el rayo luminoso.

Es también evidente que cada agrupación de planos tangentes, cortándose sucesivamente sus intersecciones, constituyen un lugar geométrico, cual no es otro que una superficie desarrollable y tangente á la superficie á todo lo largo de la línea de igual tinta correspondiente, siendo dicha desarrollable de una constante inclinación para con relación al rayo

luminoso, y por lo tanto podemos dejar sentado como á teorema ó como á nueva definición de esa clase de líneas diciendo que *una línea de igual iluminación de una superficie es la línea de contacto con otra superficie desarrollable que le sea tangente, á la par que de constante inclinación para con el rayo luminoso.*

Ahora bien, como quiera que las superficies que se emplean en la práctica son en general geométricas, esto es, sujetas invariablemente á ciertas leyes determinadas, cuales se prestan en general, á que existan series de planos, que cada una de ellas reuna una agrupación de los mismos, que siendo tangentes á las superficies, vengan inclinados de un mismo ángulo para con respecto al rayo luminoso; de aquí que para una de dichas agrupaciones, exista también una serie no interrumpida de puntos de tangencia que unidos formen una línea de constante iluminación ó de igual tinta, y así todas ellas consideradas en conjunto, y unas en pos de otras, proporcionan una degradación lenta y sucesiva de tintas, cuya representación en el dibujo, contribuye á dar el relieve al cuerpo de que se trata, y así surta mejor el efecto que la verdad de los hechos necesita, según sea la conformación de la masa corpórea, en cada uno de los casos que puedan presentarse. Es de gran importancia, pues, la determinación de estas líneas de igual iluminación. Ellas según lo dicho, pueden deducirse recurriendo á la superficie desarrollable y circunscrita al cuerpo que poco ha hemos indicado. Mas las operaciones por las cuales habríamos de pasar si bien son fáciles, por otra parte no dejan de ser algún tanto laboriosas, y se las puede substituir con ventaja si pedimos auxilio al cono director de la mentada desarrollable, y para ello empezaremos sentando el siguiente teorema:

Una línea de igual iluminación de una superficie; es el lugar geométrico de los puntos de contacto de todos los planos tangentes á la misma y respectivamente paralelos á los planos tangentes al cono de igual iluminación de la línea de que se trate.

En efecto, supongamos que todos los planos relativos á la tangencia con la superficie Σ, sobre una línea de igual iluminación, se trasportan de modo que pasen por un mismo punto V del espacio, entonces será evidente, que la serie no interrumpida de rectas, que proporcionarán las intersecciones de dichos planos formarán un cono, que ordinariamente será

de revolución, teniendo por vértice el punto V, y por eje el rayo luminoso, que pasa por el punto V. Este cono se descubre ya en seguida, es el director de la superficie desarrollable △, de que antes hemos hablado, y reunirá la propiedad de encontrarse igualmente iluminado en todos sus puntos, debiendo á semejante hecho, el que se le denomine, por *cono de igual iluminación.*

Ahora por la inversa, si se escoge un punto cualquiera del rayo luminoso, y por él, se traza una recta que forme con dicho rayo un ángulo determinado φ, haciendo luego girar esta recta, en torno de dicho rayo, entonces nos describirá un cono de revolución que no será otro, que el de igual iluminación correspondiente á la intensidad i, proporcionada en la igualdad $i = \text{sen. } \varphi$.

Si pues en este estado se conciben, los planos tangentes á dicho cono, y luego se conducen planos tangentes á la superficie Σ, que sean respectivamente paralelos, á aquellos, será evidente que la serie de puntos de contacto unidos nos proporcionarán una línea de iluminación uniforme, pues responderá perfectamente á las condiciones que se imponen, para que sea tal.

En virtud de todo lo que llevamos expuesto, procedamos á la determinación de las líneas de igual iluminación, en alguna de las superficies que más empleo tengan en las aplicaciones y semejantes casos darán la norma que se ha de seguir para los demás, cualquiera que fuera el cuerpo geométrico de que se eche mano.

259. Líneas de igual iluminación en un cilindro.—Si consideramos en general una superficie desarrollable cualquiera, es bien sabido que la propiedad que caracteriza á semejantes superficies, es que todo plano tangente lo es á lo largo de la generatriz de contacto, de lo cual se infiere que si el rayo luminoso forma un cierto ángulo φ, con un plano tangente en un punto a de una generatriz A, el mismo ángulo φ, formará si consideramos otro cualquier punto a', a'', a'''... etcétera, de la propia generatriz, y así del propio modo sucederá, con otras generatrices B, C, etc , cuales si bien serán en cada una; distinta de la otra la tinta que las afecte, sin embargo, la entonación que corresponda á cada una de ellas será constante en todos sus puntos y por tanto se puede establecer que: **Las líneas de igual iluminación en una super-**

ficie desarrollable, son precisamente las generatrices rectilíneas de la misma.

Sin embargo, precisa fijar la atención de como las superficies desarrollables discrepan de la mayor parte de las otras que se conocen, bajo el punto de vista del número de planos tangentes que admiten, y que sean paralelos al cono director, lo cual por otra parte viene á ser una consecuencia de lo que llevamos indicado últimamente. Cuando la superficie no es desarrollable, la mayor parte de planos tangentes al cono director se utilizan, para que sirvan de guía en el trazado de los otros planos paralelos á aquellos, y que han de ser tangentes á la superficie, mientras que siendo desarrollable la superficie el número de planos utilizados y que son tangentes al cono director, son en número muy reducido, y aún muchas veces, tal puede ser el número que exprese la intensidad que se desee, que no exista para ella ningún plano que cumpla las condiciones que exigen las líneas de igual iluminación.

En efecto, sea el cilindro C, (fig. 207), la desarrollable que escogemos, al mismo tiempo que dada una cierta cantidad angular φ, expresando ó correspondiendo á una cierta intensidad, se ha determinado con ella el cono director V, cuyo eje es el rayo R; ahora bien, es evidente que no todos los planos tangentes á dicho cono, tendrán sus paralelos, que sean tangentes al cilindro, y aún quizá ninguno de ellos lo sea, para serlo, fuera necesario que semejante plano fuese paralelo á la dirección del cilindro, y es bien claro que eso no siempre tendrá lugar. De suceder pues que algún plano tangente al cono sea paralelo al cilindro entonces, la cuestión queda reducida, á trazar por el vértice del cono V, una recta Vt, paralela á la dirección de dicho cilindro, determinando luego los planos P y P′, tangentes á dicho cono, y finalmente construir otros dos planos π, π', tangentes al cilindro C, y paralelos á P, P′, y ellos determinan finalmente las generatrices G, G′, de igual iluminación y correspondientes á la intensidad φ, propuesta en la cuestión. Como vemos aquí los planos tangentes son no más en número de dos, por ser el cilindro de 2.° grado, más aunque no lo fuera siempre el número de soluciones sería en número muy limitado, lo propio que en toda superficie desarrollable cualquiera. Además de ellas, habrán de descontarse, los planos tangente que interesen á la zona invadida por la sombra propia.

Mediante los precedentes que llevamos expresados, pasemos ya á la (fig. 209), en donde resolveremos directamente semejante cuestión, para un cilindro oblicuo de base circular que llamaremos C^v-C^h, expuesto á los rayos luminosos de dirección R^v-R^h. Este rayo de luz, lo hacemos pasar por un punto V, de la línea de tierra, al objeto de facilitar las operaciones, como así nos convenceremos en el curso de ellas.

Construyamos ante todo la línea divisoria de la luz y sombra en el cilindro, ésta se compone de las generatrices G y g, indicándonos ellas la zona del cilindro que se halla frente al rayo luminoso, y que únicamente nos concierne para la resolución del problema. Hecho esto, concibamos una serie de rectas, que pasen por el vértice del cono, formando cada una ángulos distintos con el eje, haciendo luego girar cada una de ellas, en torno de dicho eje; ellas entonces nos formarán conos de revolución, cuales serán los que hemos llamado de igual iluminación, dependiendo la intensidad de ésta, del ángulo más ó menos abierto, que formen con el eje. La manera de construir estos conos es el siguiente: Escójase sobre el rayo R^v-R^h, un punto a^v-a^h, y por él conduzcamos un plano V^p-H^p, perpendicular á dicho rayo; este plano será el de base de todos, los mentados conos. Rebátese luego este plano, sobre el de proyección horizontal, tomando como á charnela la traza H^p, y valiéndonos de la horizontal $a''t'$, del plano. En esta última la traza t'-t, pasa en el giro en t'', y como O es fijo Ot'', es la traza vertical rebatida. Mas como t'', es la traza rebatida de la horizontal que pasa por a^v-a^h, de aquí se infiere, que dirigiendo por el punto t'', una paralela á la H^p, ella será rebatida dicha horizontal, en la cual irá á colocarse el punto a^v-a^h, en el a_1. Ahora este, es evidente, que es proyección, sobre el plano P de todo el rayo luminoso que pasa por a, ó lo que vale tanto decir, que es proyección sobre dicho plano del eje de los conos de uniforme iluminación, y por lo mismo el punto a_1, es también proyección sobre P, del vértice V, de todos estos conos, los cuales podemos ya individualizar con suma facilidad. En efecto, demos ya por realizado que por el vértice de estos conos que se proyecta según a_1, se trazan en el espacio una serie de rectas con distintas inclinaciones, girándolas luego en torno del eje a_1; es claro entonces que formaremos los conos de revolución, de cuya representación tratamos, y serán ellos tales, que imaginando un plano secante que pase

por el eje a_1, el será un meridiano de cada uno de ellos, cortándolos según una sección triangular é isósceles. Sea pues el plano que pasa por la dirección R^h, por ejemplo, rebatiendo luego este plano sobre P, (rebatido en $H'^p OH^p$), y tomando como á charnela la R^h, entonces el vértice proyectado en a_1, irá á situarse rebatido en V', á una distancia de a_1, tal que será a_1V', igual á $a''V$, verdadera magnitud de la distancia que media entre $a^v \cdot a^h$ y V. En este estado trácence por V', la serie de rectas V'-1, V'-2, V'-3... etc., que forman los ángulos correspondientes á las intensidades que deseemos, y ellas con evidencia, serán los lados de los triángulos isósceles de que más antes habíamos indicado, cuyos serán tales, que nos suministrarán los radios a_1-1, a_1-2, a_1-3, a_1-4...etc., de los círculos de base, y que desde luego podremos trazar, como así lo expresan los indicados en la figura. Determinados ya así los conos, resolvamos ahora la cuestión, por el medio que se ha indicado poco ha.

Con este motivo, trácese por el vértice V, una recta A^v-A^h, paralela á las generatrices del cilindro C; y encuéntrese su traza d^v-d^h; sobre el plano V^p H^p; y ya, ella encontrada, coloquésela, en donde vaya á situarse cuando P, se ha rebatido en $H'^p OH^p$: se colocará en b_1.

Desde el punto b_1 condúzcanse ahora tangentes á los círculos de base, y estas últimas proporcionarán dos puntos puntos de tangencia para cada círculo, y por lo tanto dos generatrices de contacto para cada cono de uniforme iluminación, pues es bien notorio que cada tangente trazada desde el punto b_1 será traza sobre P de un plano tangente al cono que le corresponda. Obtenidos ya estos planos, cabe ahora trasladarlos á su debida posición, para lo cual tendremos en cuenta que los puntos de traza que están en la charnela H^p, quedarán fijos en el movimiento, éstos son los 1', 2', 3', 4'... etc., y como todos los planos pasan por el vértice V de dichos conos, cual vértice está en la línea de tierra, de aquí que uniendo V con 1', 2', 3', 4'... etc., las rectas así obtenidas serán las trazas horizontales de los planos anteriores, esto es, los tangentes á los distintos conos de uniforme iluminación; y como no hay extricta necesidad de sus trazas verticales, prescindiremos de ellas.

Una vez obtenidos estos planos auxiliares, condúzcanse ahora tangentes al cilindro, otros planos tangentes respectivamente paralelos á aquéllos, á cuyo efecto bastará conducir rectas tangentes á la base del cilindro C, y que sean paralelas á las 1'-V, 2'-V, 3'-V... etc.; así, desde los puntos de tangencia obtenidos en c, e, k, h... etc, trácense ya definitivamente las generatrices correspondientes al cilindro C, y ellas representarán líneas de tinta uniforme, esto es, de distinta entonación una de otra, pero si en cada una de ellas sus puntos serán de igual tinta. Se comprende ahora que todos los puntos tangentes que se hayan podido trazar en la zona $g'g''G'G''h''$ bañadas en sombra habrán de desecharse por lo anteriormente dicho. Ahora, según la cantidad angular del cono correspondiente medida en V', así será la intensidad que corresponderá á la generatriz del mismo; así el ángulo $\varphi = a_1V'7 = 44°$ proporciona la generatriz de intensidad 0'7, el ángulo $\psi = a_1V'10 = 70°$ proporciona la generatriz de intensidad 0'94 y así sucesivamente las otras.

Lo que si es digno de notarse, que aquí no habrá lo que se llama *intensidad máxima*, pues no existe ningún plano tangente que sea perpendicular á la dirección de la luz; pero si de todos modos ocurrirá la *máxima intensidad relativa*, cual será la que obedezca al mayor ángulo en el vértice que aparezca entre los conos de uniforme iluminación, aquí en nuestro caso particular, este ángulo es el ψ que obedece al arco de 70° y proporciona la generatriz afectada del número 0'94. Y es que si consideramos los varios conos que se han ido trazando, vemos que los ángulos al vértice se han ido abriendo hasta que hemos encontrado un cono especial, cuya base circular pasa por el mismo punto b_1, y entonces una sola tangente, la b_1l, se ha podido trazar á dicha base esta tangente lo propio que las demás ha proporcionado la traza horizontal H^1 del plano tangente al cono límite, y de ella trazando la tangente á la base del cilindro que le sea paralela, como es la que parte del punto e, ha dado la generatriz correspondiente de relativa máxima iluminación. Se comprende ahora que para todo otro cono que trazáramos, cuyo ángulo al vértice fuese mayor que el de ψ límite, aquél sería tal, que el punto fijo b_1 vendría comprendido en el interior de la base, y por lo tanto sería ya imposible conducir las tangentes á la mencionada base, lo cual manifiesta claramente no existir ya líneas análogas á las de uniforme iluminación.

260. Degradación de sombras en una esfera. En una esfera mate las líneas de igual iluminación son círculos cu-

yos planos son perpendiculares á la dirección de los rayo luminosos.—Este teorema es de fácil demostración, recordando tan sólo la propiedad de las líneas de contacto de la esfera con cilindros ó conos.

En efecto, si se tiene una esfera E y se traza un plano P tangente cualquiera, éste formará un cierto ángulo φ con el rayo luminoso R, que imaginemos pasar por el centro de la esfera; si ahora se hace girar el plano P en torno de R (cuyo puede considerarse como un diámetro de E) y permaneciendo tangente en todas sus posiciones á E, entonces es bien sabido que la envolvente de sus posiciones será un cono recto de eje R, y cuya curva de contacto será un círculo cuyo plano será perpendicular al diámetro de E (n.° 114), que aquí es la dirección del rayo pasando por el centro; infiérese de aquí que todos los planos tangentes á este cono están igualmente inclinados para con el rayo R, y por lo tanto dicha línea de contacto cumple las condiciones de línea de igual tinta, y como lo mismo reproduciríamos para otra inclinación cualquiera ψ que se hubiera escogido para el primitivo plano tangente, de aquí corroborado el enunciado de que hemos partido.

Con lo dicho basta para comprender ya en seguida las operaciones de que nos hemos de valer para obtener semejantes líneas de igual iluminación.

Sea la esfera E^v - E^h y el rayo R^v - R^h en la fig. 213, lámina 37, con solo un cambio de plano vertical, de modo que el nuevo escogido sea paralelo al rayo R, y escogiendo por nueva L de T la dirección R^h, nos dará la esfera $E_1{}^v$ y el rayo en R′, y en este plano los círculos de uniforme eliminación vendrán proyectados según rectas AB, CD, FG... etc., perpendiculares á R′, y por lo tanto bastará dividir al radio O″H en el número de partes iguales (aquí diez), igual al número de líneas que de esta clase se deseen, y ellas resolverán la cuestión. Bastará solamente deshacer el cambio de planos y volver dichas líneas á su debida posición. Es claro ahora que estas líneas de igual iluminación vendrán proyectadas según elipses, cuyas quedarán completamente definidas por sus ejes, cuyos se conocen desde luego. Así, la referente á la AB en su proyección horizontal, el eje menor será A′B′, resultado de proyectas sobre el diámetro R^h los puntos más alto y más bajo, cuyos son A′ y B′; en cuanto al eje mayor $\alpha'\alpha''$, trazando la perpendicular por el punto medio

de A′B′, y tomando sobre ella á partir de ω, las distancias $\omega\alpha'$ y $\omega\alpha''$ respectivamente iguales cada una al radio αA del círculo proyectado según la recta AB. Esta operación repetida para los restantes círculos CD, GF .. etc., darán las demás elipses de igual tinta.

Entre ellas habrá algunas completamente vistas en la proyección horizontal, mientras que otras en mayor número quedarán en parte ocultas, y en ellas será conveniente para su mejor trazado señalar los puntos situados en el contorno aparente, en los que tiene lugar el pasaje de la parte vista á la oculta, cuales puntos se logran con sólo trazar el plano horizontal O″C que corta á la esfera según el círculo máximo de contorno aparente, para con respecto al plano de proyección. Este plano corta ahora á los planos de las líneas de igual iluminación, según rectas perpendiculares al plano vertical L′T′, y proyectadas en los puntos 1′, 2′, 3′... etc., cuales referidas horizontalmente serán cuerdas de la esfera, que cortarán á su contorno aparente según los puntos 1, 2, 3... etc., ellos serán los que buscamos.

En cuanto á la proyección vertical de estas líneas de igual tinta quedarán determinadas deduciéndolas de la proyección horizontal, ó bien si se prefiere, lo cual es más ventajoso, reproduciendo las operaciones que hemos efectuado para las primeras proyecciones, escogiendo ahora un plano de proyección auxiliar paralelo al rayo luminoso y perpendicular al plano vertical.

Este plano puede tener por línea de tierra el mismo rayo R^v, que pasa por el centro de la esfera; ésta así, vendrá proyectada en este nuevo plano en $E_1{}^h$, mientras que el rayo luminoso vendrá en R″, y en este estado no habrá más que repetir lo hecho para cuando teníamos la línea de tierra en L′T′.

261. Si el rayo luminoso estuviera inclinado de tal manera que sus proyecciones formasen ángulos de 45° con la L T, entonces sería aun más breve la operación, pues las proyecciones de las líneas de igual tinta serían iguales, aunque orientado su dibujo de distinto modo, y cada uno para con respecto á la proyección homónima del rayo de luz que pasa por el centro de la esfera; más pudiéndose deducir una proyección de otra, con sólo hacer el traslado de la proyección horizontal sobre la proyección vertical, de modo que coinci-

diendo los puntos O y O′, el rayo R^h coincidiera con el R^v, y esto en el sentido de la flecha, pues es bien claro que tanto R^v, como R^h son ejes de simetría aquí de las respectivas proyecciones de la esfera y de las elipses de igual tinta.

262. Esfera hueca.—Cuando se considere la parte cóncava como en la fig. 214, en donde aparece una semiesfera hueca y vista hacia su interior; entonces las líneas de igual iluminación se determinan, si bien con igual procedimiento que el visto poco ha, sin embargo resulta que como aquí se tiene en cuenta el hemisferio ABC, opuesto precisamente al ADC que ahora no existe y de que hemos tratado en el caso anterior, resulta que las líneas de que ahora se trata, cuales son las proyectadas según las rectas *ab*, *cd*, *ef*... etc., vendrán colocadas en sentido opuesto á aquéllas y de tal manera dispuestas, cual si las encontrásemos hacia la parte convexa, rigiendo un rayo luminoso R_1 en dirección opuesta al real y efectivo que usamos en R′. Mediante esta ligera observación encuéntrense, pues, dichas líneas tal como indican las operaciones de la figura de su referencia, é insiguiendo la misma adoptada en el caso anterior.

263. Líneas de igual iluminación en las superficies de revolución.—La cuestión que acabamos de tratar, buscando las líneas de igual intensidad de luz en una esfera es de suma importancia, no ya solamente por lo que á la esfera se refiera, sino que también á lo que concierna á todo el grupo de las superficies de revolución, á las cuales la esfera auxilía prestándolas sus propiedades, cuyas son bastantes para que determinadas que sean las líneas de igual iluminación en dicha esfera, podamos con ellas trazar las que correspondan á la superficie de revolución de que se trate, y semejantes construcciones tienen por base el siguiente teorema:

El sistema de líneas de igual iluminación en toda superficie de revolución es el lugar geométrico de los puntos de encuentro del sistema de líneas de igual iluminación de las esferas inscritas con los respectivos paralelos de los contactos.

La verdad de semejante propiedad se evidencia desde luego en la fig. 215, en donde Σ es la superficie de revolución, y la esfera E es la inscrita á Σ, á lo largo del paralelo AB. Si

se tratan ahora las líneas de igual iluminación en la esfera, con arreglo al rayo R, ellas cortarán al paralelo de contacto AB en los puntos *a*, *b*, *c*, *d*... etc., y como en dichos puntos el plano tangente á Σ y á E es común, común será también el elemento del contacto referente á estas dos superficies, y por lo tanto todo fenómeno que tenga lugar en este elemento; tendrá lugar tanto en Σ como en E, así es que la iluminación de estas dos superficies en el elemento que se considera en *a*, *b*, *c*, *d*... etc., tendrá igual intensidad.

Repitiendo ahora esta operación; escogiendo otras esferas tangentes E′, E″... etc., á lo largo de nuevos paralelos A′B′, A″B″... etc., ello proporcionará nuevas agrupaciones de puntos *a*′, *b*′, *c*′, *d*′... etc., *a*″, *b*″, *c*″, *d*″... etc., que cumplirán el mismo requisito; bastará, pues, unir todos los puntos *a*, *a*′, *a*″... etc., y darán una curva de igual iluminación, así como también los *b*, *b*′, *b*″, dará otra segunda línea; los *c*, *c*′, *c*″... etc., otra tercera línea y así sucesivamente.

264. Degradación de un cilindro vertical y de base circular.—Se escoge como primer ejemplo el cilindro de revolución C^v - C^h con motivo de servir dicha superficie como auxiliar para el trazado de las líneas de igual tinta sobre las superficies congéneres. Sea la fig. 216 en donde R^v - R^h es el rayo luminoso, y construyamos en el cilindro mentado la esfera que le es inscrita á la largo del paralelo de base AB, y así viene proyectada horizontalmente en el círculo A′DB′E y verticalmente en AFBG. En este estado encuéntrense las líneas de degradación correspondientes á la esfera y para efectuarlo más brevemente supondremos que la esfera, así como el rayo luminoso giran alrededor de la vertical O, hasta que dicho rayo venga á colocarse en R′-R″, paralelo al plano vertical. Así dispuesto, sabemos (n.° 260) que las líneas de igual tinta en la esfera estarán dispuestas en los planos *x-o*, 1-1, 2-2, 3-3... etc.; ahora estos planos cortan al plano AB, base del cilindro, según rectas perpendiculares al plano vertical, y son cuerdas de la base circular del cilindro del dato y vienen proyectadas verticalmente según los puntos O, *a*′, *b*′, *c*′... etc., y es bien notorio que los puntos extremos de estas cuerdas pertenecen á la vez al cilindro y esfera, pues en ellos el plano tangente es común. Si colocamos, pues ahora dichas cuerdas en la posición que les corresponda, tendremos resuelta ya la cuestión; para eso la proyección hori-

zontal de dichas cuerdas corta al radio OA en los puntos *a*, *b*, *c*... etc., (de estos no más está indicado el punto *g*) y aquél al colocarse en su definitiva posición se lleva consigo aquellos puntos colocándose éstos definitivamente en *a″*, *b″*, *c″*... etc., desde los cuales parten las cuerdas *x′*-*x′*, 1′-1′, 2′-2′, 3′-3′. Por lo tanto es visible ahora que los planos tangentes comunes á cilindro y esfera son los verticales cuyas trazas horizontales serán las tangentes á la base del cilindro en los puntos *x′*, 1′, 2′, 3′... etc., desprendiéndose finalmente que las generatrices que por ellos se levanten son las líneas de igual iluminación para dicha superficie cilíndrica. Es evidente que la generatriz correspondiente al punto *z* es la que corresponde á la máxima de iluminación, cuyo punto *z* vendrá dado por la intersección de la traza horizontal, del cilindro, con la proyección horizontal R^h, del rayo luminoso.

265. Degradación, en un cilindro horizontal y de revolución. El cilindro es paralelo á la L de T, (fig. 217) y está representado en C^v-C^h; el rayo luminoso es R^v-R^h, á este cilindro se le inscribe ahora la esfera de centro O-O′, y de radio O A igual al del cilindro, teniendo ambas superficies por líneas de contacto, la sección recta del cilindro, proyectada de perfil en AB-CD. Como en el caso anterior giremos esfera y el rayo luminoso, en torno del eje vertical O, hasta que el segundo se coloque paralelo al plano vertical, y así vendrá á situarse en R′-R″; en esta disposición, los círculos que representan las líneas de igual iluminación, en la esfera, se proyectarán según las rectas *x*-*x*, 1-1, 2-2, 3-3... etc., perpendiculares á la dirección de R″; mas en el giro, es evidente que el círculo del contacto CD, habrá girado de la misma cantidad angular del rayo de luz, y así irá á colocarse en C′D′, apareciendo en el plano vertical, según la elipse DFCG, cuya es cortada por aquellas líneas de iluminación en los puntos *a*-*a′*, *b b′*, *c*-*c′*... etc., cuales conducidos á su sitio una vez desecho el giro se colocarán en *a″*, *b″*, *c″*,... etc., por los cuales pasarán ya en definitiva, las generatrices del cilindro que forman sus líneas de igual iluminación 0′1, 0′2, 0′3... etc., de ellas la de mayor intensidad se descubre ser la 0′9.

266. Degradación de tintas en un hiperboloide revolución. Sea en la fig., 218, lam.ª 38, el hiperboloide dado en H^v-H^h, y R^v-R^h, el rayo luminoso. Escojamos un paralelo

cualquiera; el AB., por ejemplo, trazando luego la normal AC en el punto A, de la meridiana principal; esta normal servirá ahora de radio á la esfera de centro C, la cual será inscrita al hiperboloide á lo largo del paralelo AB. En virtud del teorema n.° 260 determínense ahora las líneas de igual iluminación de dicha esfera. Mas como quiera que la operación que vamos á llevar á cabo, será cuestión de repetirla un gran número de veces, para cuando se escojan nuevos paralelos y nuevas esferas, y al objeto de hacer más claras y fáciles las construcciones, llevaremos estas fuera de nuestra figura del contorno aparente del hiperboloide, y así escogeremos el punto O_1, (fig. 218′) que será el centro de una esfera de un radio arbitrario tal como por ejemplo el $O_1\alpha$; imaginando ahora que esta esfera junto con el rayo luminoso giran alrededor de dicho centro, hasta que el último se coloque paralelo al plano vertical, entonces la posición del rayo girado se colocará en $O_1\alpha$, paralela á R′ (puesto que R′, es el resultado en donde ha venido á colocarse el rayo R^v-R^h después del giro conforme es de ver en las operaciones). En semejante disposición, podremos hallar fácilmente las líneas de igual iluminación en la esfera, puesto que ellas se proyectarán en este plano auxiliar, según rectas perpendiculares á $O_1\alpha$, y así podrán encontrarse dichas líneas conforme vimos en el párrafo núm. 260.

Se comprende ahora que la esfera E, puede ser considerada como la posición que ha tomado; trasladándola, una esfera igual inscrita al hiperboloide dado, á lo largo de un paralelo que sería igual al proyectado en $\alpha\beta$, y así los puntos *m′*, *n′*, *p′*, *q′*,... etc., representan cuerdas de la esfera, cuyas provienen de las intersecciones de los planos de las líneas de igual iluminación en la esfera, con el paralelo de contacto $\alpha\beta$, y bajo este punto de vista no habrá más que ver la disposición que toman estas cuerdas, después que el rayo rebatido en $O_1\alpha$, vaya á colocarse á la verdadera disposición R^v-R^h, que le concierna, tomando finalmente en consideración, los puntos en que dichas cuerdas corten al círculo con que limita dicho paralelo, los puntos así fijados, pertenecerán á puntos de las líneas de igual iluminación.

Esta operación se ha llevado á cabo de una manera general; pues la esfera escogida ha sido de radio arbitrario αO_1, el cual siempre puede corresponder por otra parte para una esfera igual inscrita á la superficie; pero lo ventajoso de esta

última, es que una vez efectuadas las operaciones para ella, pueden servir igualmente, para otra esfera inscrita cualquiera á la propia superficie $H^v H^h$, como por ejemplo, la que tiene de radio el AC, y por paralelo de contacto el AB.

En efecto, tómese el radio AC, y colóquese sobre $O_1\alpha$, en $O_1 a$, conduciendo luego la ab, paralela á la $\alpha\beta$; únanse luego los puntos m', n', p', q',... etc., con O_1, las rectas así producidas, cortarán en m, n, p, q,... etc., á la ab y entonces dichos puntos podrán utilizarse para la esfera de radio AC, lo mismo que se hizo para con los m', n', p', q',... etc., al tratarse de la esfera E.

Semejante modo de obrar, que facilita las construcciones, se infiere ya desde luego, fijándonos tan solo, que aquí en este caso, el sistema de líneas igualmente iluminadas, de todas las esferas, son semejantes entre sí, aunque sus radios sean distintos; y que la relación de semejanza entre ellas, es la misma que existe en la proporcionalidad de sus radios.

Según ello, el círculo ab, será homólogo del $\alpha\beta$; el triángulo aO_1b, será semejante al $\alpha O_1\beta$; el paralelo ab está cortado por una serie de cuerdas, cuales dan los puntos m, n, p, q,... etc., ó lo que es lo mismo, está cortado por los círculos de igual iluminación, en un número de puntos é igual y analogamente colocados á los obtenidos en el paralelo $\alpha\beta$, resultando las homologías $\alpha m' : m'n' : n'p' ... = a'm : mn : np ...$

Resultando con ello que los puntos m, n, p, q... etc., representarán la serie de ellos, situados en un sistema de líneas de igual iluminación, sobre una esfera igual á la escogida de de radio $AC = aO_1$

Por lo tanto, conduciendo ahora el sistema de la esfera de radio aO_1, y el rayo luminoso $O_1\rho$, á su debida posición hasta que en el giro dicho rayo $O_1\rho$ sea paralelo á R_v-R^h, lograremos así, en definitiva, los puntos deseados. A este efecto bastará trasladar la recta ta con sus divisiones $m, n, p, q,$... etcétera, sobre el rayo OR″, de modo que t, coincida con O, y desde los puntos de división trasladados, conducir perpendiculares á la OR″, hasta que ellas corten al círculo A′E′B′D, y los puntos de intersección que obtengamos, serán los puntos pertenecientes á las líneas de igual iluminación. Escogiendo pues ahora nuevos paralelos análogos al AB, y repitiendo con ellos iguales operaciones, obtendremos nuevos puntos m'', n'', p'' q''... etcétera, m''', n''', p''', q'''... etc., de modo que uniendo ahora los m, m', m'' m'''... etc., de una parte, los n, n', n'', n'''... etc., de otra, los p, p', p'', p'''... etc., de otra, y así sucesivamente, llegaremos á dibujar las mentadas líneas.

Cada una de estas líneas, se ha dibujado en la figura, acompañadas del número que indica la intensidad, con que van afectas.

Ellas por pertenecer á una superficie de revolución, son simétricas, con relación al plano vertical meridiano R″, que contiene al rayo luminoso, y eso por sí solo indica, que los puntos de intersección de las mismas con dicho plano meridiano, han de ser los más altos ó bajos de semejantes líneas, ó lo que es lo mismo, aquellos puntos de las curvas, en donde la tangente es horizontal, lo que constituye un dato de importancia, pues con su auxilio es dable ahora rectificar las curvas en obsequio á su buen trazado.

Al efecto, supongamos que los puntos incógnitos giran, hasta colocarse todos en la línea meridiana principal MANGO, así los encontraremos en dicha línea, para luego colocarlos á su debido lugar; con esto, todos los mencionados puntos han girado con el plano vertical R″O, que los contiene, y se han situado en el plano vertical GO. Pero los referidos puntos sitúan también (n.° 258) en cada uno de los conos de igual iluminación, si pues trazamos estos últimos, la combinación de ellos con la línea meridiana MAN, darán los puntos en cuestión.

Tracemos pues estos conos de igual iluminación, y al objeto de facilitar, cuanto hacer claras las operaciones, escojamos un punto exterior ω-ω', por el cual pasa un rayo de luz R^v-R^h, cuyo según es sabido, será el eje común de todos los conos antedichos. Giremos ahora, este rayo hasta que vaya á ser paralelo al plano vertical, en R_1-R′ y en esta posición será fácil como en el párrafo n.° 259 hacernos cargo de todos estos conos con solo trazar por ω', la serie de rectas o,1, o,2, o,3, o,4... etc , correspondiente á las intensidades de las correspondientes líneas; ya sabemos que todas estas son las generatrices de aquellos conos, cuyas provienen del corte de los mismos por el plano vertical ωR_1, ahora bien, los planos tangentes á estos conos; y á la vez perpendiculares al plano vertical; tienen según la disposición que hemos adoptado para estos conos; sus trazas verticales coincidiendo con cada una de estas generatrices, y como quiera que, todo lo contenido en tales planos, vendrá confundido en sus dichas trazas, de aquí que trazando á la curva meridiana principal, tangentes para-

lelas á las rectas, ω' o,1, ω'-o,2, ω'-o,3, ω'-o,4... etc., y marcados que sean con precisión los puntos de contacto, ellos nos proporcionan los puntos más altos ó más bajos, cuales no habrá más que conducirlos á su debido lugar, colocando el meridiano principal GO, en donde se proyectan, girándolo hasta confundirse con el OR″, insiguiendo el movimiento de giro, las respectivas proyecciones verticales de los indicados puntos, cuales una vez en su sitio, se podrá trazar por ellos rectas horizontales, que darán los límites de las curvas y sus tangentes hacia esta parte.

Si entre todos estos planos nos fijamos especialmente en el P-P′ perpendicular al rayo R′, su paralelo tangente á la meridiana principal será el π-π′ cual proporciona el punto de tangencia φ-φ′, y éste trasladado á su lugar, se colocará en φ_1 φ_2, será el punto de máxima iluminación (núm. 239).

267. Líneas de igual iluminación en una superficie tórica.—Las propiedades de esta especial superficie permiten resolver la cuestión de una manera breve y sencilla, recurriendo á la esfera tipo conforme usamos ya en el problema de la simple sombra del párrafo 144. A este fin, sea la figura 219 en donde se representa en proyección vertical y horizontal el toro que lo suponemos engendrado por el movimiento de una esfera que gira en torno de un eje vertical; así considerado, tenemos en la superficie un lugar geométrico de las características de una superficie envolvente, cuyas características son círculos máximos de cada una de las esferas, cuyas son las envueltas.

En este supuesto, conduzcamos todas las envueltas en el centro de la figura, allí todas se confundirán en una sola esfera de centro O; en ella encontraremos las líneas de igual iluminación insiguiendo el procedimiento del núm. 260, ya señaladas éstas tal como vienen dibujadas en la proyección horizontal por las distintas elipses 1-1, 2-2, 3-3..., etc., señálense una serie de meridianos OZ, OV′, OA..., etc; cada uno de ellos cortará á las líneas de igual iluminación de la esfera tipo en los puntos 1, 2, 3, 4..., etc.; de manera, que si ahora conducimos á la esfera O (haciéndola mover por traslación, de manera que su centro recorra las horizontales radiales OZ, OV′, OA..., etc.), á cada una de las posiciones que ocupan las respectivas envueltas, entonces los distintos círculos máximos verticales de la esfera tipo irán á confundirse con

las respectivas características proyectadas en *m*Z, *n*V, AA, *m′*Z′..., etc, y así los distintos puntos de marca 1, 2, 3, 4..., etcétera, en donde se cortan las líneas de igual iluminación de la esfera central; con los círculos máximos correspondientes, se irán situando respectivamente sobre las divisiones, de igual numeración de *m*Z, *n*V, AA, *m′*Z′..., etc. Hay puntos que pueden también encontrarse mediante otras consideraciones, así los contenidos en el círculo máximo ecuatorial A′A′ puede con su auxilio construirse el cilindro vertical, tangente á la superficie á lo largo de este ecuador; buscando en seguida las líneas generatrices de igual iluminación en este cilindro (núm. 264), los puntos de intersección de cada una de ellas con el círculo de este ecuador serán los puntos 0, 1, 2, 3, 4..., etc., situados en AA′ y cada uno pertenecerá á su correspondiente línea de iluminación.

Del mismo modo se puede circunscribir un cilindro horizontal paralelo á la línea de tierra, á lo largo del meridiano de perfil X-X′, Y-Y′ á la superficie tórica. Encuéntrense en este cilindro sus líneas de igual iluminación con arreglo al párrafo núm. 265, y ellas, que serán rectilíneas, cortarán á los círculos meridianos en puntos 1, 2, 3, 4..., etc., situados en *a-a′*, XX′, YY′; por ellos también pasarán las líneas de iluminación del toro.

Ténguese en cuenta que la línea *cero* corresponde á la divisoria de luz y sombra, cual conviene partir de ella el dibujo de las demás líneas.

Para el buen trazado de estas líneas; obsérvese que pueden inmediatamente obtenerse tangentes á las mismas en los puntos límites *u′*, *u″*, *v′*, *v″*, S′, *s″*..., etc., que corresponden á los sitios en donde vienen definitivamente á colocarse los puntos *u*, *v*, *s* de las líneas de la esfera tipo, cuando al colocarse en las envueltas correspondientes recorren las distancias radiales OV, OU, OS..., etc.; siendo estos caminos recorridos tangentes desde los puntos de partida *u*, *v*, *s*..., etc., á las mismas líneas de iluminación de la esfera, y es que la línea de iluminación *v′v″*, por ejemplo del toro, puede considerarse como la transformación que sufre la *vv* de la esfera, al pasar á ocupar la posición en la superficie tórica.

Téngase también en cuenta para el mejor trazado de estas líneas de iluminación, y esto tanto en el plano vertical como en el horizontal, que hay alguna de ellas que vá á perderse en el contorno aparente, mientras que en cambio

hay otras que quedan enteras y redondeadas dentro el mismo contorno aparente y afectan una suerte de forma ovoidea.

La fig. 219' representa. La superficie tórica en corte, y nada tenemos que añadirse á lo dicho anteriormente, únicamente llamaremos la atención, que si se quieren encontrar los puntos de las líneas de igual iluminación sobre el círculo de garganta, en este podremos echar mano del cilindro vertical del cual, será dicho círculo base, de modo, que aquí este cilindro será inscrito á la superficie, aprovechando de él la parte cóncava, en la cual encontraremos las generatrices de igual iluminación, insiguiendo consideraciones análogas á lo dicho en la esfera en el núm. 262, y ellas como siempre cortando al círculo de garganta, proporcionarán puntos de las líneas de iluminación del toro.

268. Líneas de igual iluminación sobre una superficie helizoidal, como por ejemplo, *columna salamónica* descrita en el párrafo núm. 172.

En esta cuestión, lo propio que la tratada para la determinación de la sombra de esta superficie, se adopta como á punto de partida de las operaciones las propiedades innatas de la misma. Admitiendo ella las curvas hélices por generatrices, se desprende ya que todos los planos tangentes á lo largo de una misma hélice, están igualmente inclinados con el plano de base del helizoide (aquí en este caso el plano horizontal), y esto por sí sólo ofrece una condición esencialísima para facilitar las operaciones; pues permitirá hacer depender semejantes líneas de otras, situadas en una superficie más sencilla que la del helizoide.

En efecto, sea en la lám. 39 la fig. 220 representando el helizoide, engendrado en las mismas condiciones que el que describimos á su tiempo en el núm. 172, y propongámonos encontrar un sistema de puntos que pertenezcan á las líneas de iluminación cuando éstas corten á una determinada hélice de la superficie, como por ejemplo, la que se proyecta horizontalmente en la circunferencia *abcd* y en el plano vertical en la sinuosoide *a'b'c'd'*.

De esta hélice, escojamos el punto *a-a'* situado en el meridiano principal, y en él tracemos el plano tangente. Este vendrá determinado por la tangente *a'e'-ae* á la sinuosoide, y la tangente *af* á la hélice; la unión de las trazas de estas

dos rectas dan ya la recta *ef*, traza horizontal del plano tangente en el propio punto *a a'*. Si ahora á esta traza se le dirige desde el punto O la perpendicular O*g*, ésta proyectada verticalmente en *g'v* dará las proyecciones de la línea de máxima pendiente del citado plano. El ángulo α que forme dicha recta con el plano horizontal, será la inclinación del propio plano tangente con dicho plano de proyección; y este ángulo, precisamente, es el que formarán con dicho plano todos los planos tangentes al helizoide á lo largo de la hélice escogida; por eso se infiere, que si hacemos girar al plano tangente del punto *a-a'* alrededor del eje O, formaremos el cono director de toda aquella agrupación de planos. Pues bien; precisamente, haremos depender las construcciones del citado cono. Ante todo, gírese la O*g* hasta que vaya á ser paralela al plano vertical en O*g'''*, en esta disposición nos da el ángulo O'*g''v* igual al α, cuyo se encuentra ya aquí en verdadera magnitud.

En este estado, encontraremos las líneas de igual iluminación de este cono, empleando al efecto la esfera auxiliar Σ conforme la resolución general de esta cuestión en las superficies de revolución (núm. 263).

Para esto, para hacer más claras las operaciones, coloquemos á la esfera Σ en Σ' fuera de las construcciones del dato (fig. 220), y allí encontraremos sus líneas de igual iluminación (núm. 260), cuales se proyectan en las cuerdas que pasan por los puntos 0, 1, 2, 3... , etc., respectivamente perpendiculares á la dirección O''*l''* del rayo luminoso, una vez girado y paralelo al plano vertical.

Trácese ahora al meridiano principal de esta esfera una tangente MV₁ paralela á *g'v*, inclinación del cono; y así se descubre en seguida que si hacemos girar la MV₁ con su meridiano circular, engendrará un cono análogo al director y que tendrá de común con la esfera el paralelo circular MN, cuyo está representado en el círculo *mn* para cuando se le considere en la posición de la esfera en Σ (fig. 220).

Con esto tenemos ya que las líneas de igual iluminación en la esfera cortarán á estos paralelos según puntos, por los cuales pasarán las líneas de igual iluminación en el cono, y así ellas quedarán determinadas por las rectas generatrices que pasen por los indicados puntos.

Encontrémoslas, pues, y para ello tómense todas las divisiones que hay en el trecho M*z* en el paralelo de Σ', y traslá-

dense en el diámetro de Σ paralelo á la dirección de la luz en el trecho xy (fig. 220), conduciendo en seguida cuerdas perpendiculares á R^h, cuales nos darán en sus extremos los puntos 0, 1, 2, 3, 4..., etc., y ellos unidos cada uno con el vértice v del cono director, darán las líneas de igual iluminación de éste.

Con ellas, pasemos ya por último á determinar aquellas definitivas de nuestra superficie helizoidal. Con este motivo, recordemos ahora que para cada plano tangente al cono director le corresponderá su paralelo tangente al helizoide en un punto de la hélice escogida en *abcd*, recordemos también que el segundo lo podemos obtener con sólo impulsar al primero un movimiento de traslación vertical hasta que quede confundido con aquél. En este movimiento, para nada variará su proyección horizontal la posición relativa de las rectas situadas en dicho plano; así es, que recordando que toda esta agrupación de planos tienen todos igual inclinación, y que en ellos el ángulo eOg de la generatriz eO con la línea de máxima pendiente Og es constante; esto precisamente nos dará con brevedad el resultado.

En efecto, es que ahora ya sabemos que los puntos en cuestión habrán de encontrarse en proyección horizontal en *abcd*, y además, sobre las rectas conducidas desde el centro O formando el ángulo constante $\beta = eOg$ con todas las proyecciones horizontales de las mencionadas generatrices. Así iremos obteniendo sobre la hélice *abcd* los puntos 1, 2, 3, 4..., etc., por donde pasarán las líneas de igual iluminación. Obtenidos que ellos sean en la proyección horizontal, será fácil deducir los que corresponden á la proyección vertical.

Escogiendo ahora nuevas hélices y repitiendo análogas operaciones, se vendría en averiguación de nuevos sistemas de puntos 1′, 2′, 3′, 4′..., etc., 1″, 2″, 3″, 4″..., etc , y finalmente uniendo todos los números de cifras iguales 1 con los unos, 2 con doses..., etc., obtendríamos así definitivamente las líneas de igual tinta de la 1.ª, 2.ª, 3.ª..., intensidad.

Hay algún sistema de puntos, cuya determinación aun es más fácil, son aquellos situados en las hélices máxima y mínima ó sea de garganta, pues como ellas determinan la proyección horizontal del contorno aparente según las dos circunferencias concéntricas límites, claro está entonces, que las dos superficies cilíndricas proyectantes de estas mismas

hélices sobre el plano horizontal, serán cilindros de revolución verticales y tangentes ó circunscritos á dicha superficie helizoidal á lo largo de aquellas dos curvas.

Si pues se encuentran las líneas de igual iluminación de estos dos cilindros de revolución (núm. 264) las generatrices que así se obtengan; al cortar á las mencionadas hélices, proporcionarán los dos sistemas de puntos que pertenezcan á las curvas de igual iluminación de nuestro helizoide. Conviene sin embargo notar, que bastará tan sólo encontrar el primer sistema de estos puntos, esto es, los que pertenecen á la hélice máxima, pues de ellos se comprende en seguida, que pueden deducirse los de la hélice de garganta con sólo trazar los radios O 0′1, O 0′2, O 0′3..., etc , y prolongarlos hasta cortar á la proyección horizontal de la hélice de garganta.

Aquí en este helizoide, tiene lugar la simetría de la curva meridiana para con respecto á un plano perpendicular al eje de esta superficie, pues á cada punto a' de la línea meridiana le corresponde una hélice por él descrita, exactamente igual á la descrita por el punto α', simétrico con el primero; y por lo tanto, el sistema de puntos situados sobre la hélice $\alpha'\beta'\gamma'$..., etcétera, pueden determinarse valiéndonos del mismo cono director que hemos empleado para la hélice $a'b'c'd'$; aunque ahora este cono ha de considerarse invertido, esto es, la segunda hoja. En efecto, no hay más que considerar la posición del punto α' que ahora reemplaza al a'. En este punto α', la tangente á la meridiana está igualmente inclinada con el plano horizontal que la tangente anterior $a'e'$, aunque dirigida la abertura del ángulo en sentido opuesto; por consiguiente, si insiguiendo lo dicho al principio de esta cuestión conducimos una tangente al meridiano de la esfera Σ′; tal como la μV_2 paralela á la dirección de la línea de máxima pendiente del plano que ahora consideramos, esta tangente será simétrica á la anterior V_1M, y así como ésta proporcionaba el cono MV_1N circunscrito á Σ′ á lo largo del paralelo MN, así aquélla en la revolución nos dará el cono invertido $\mu V\nu$, cual podría considerarse como la segunda hoja del primero si la hiciéramos mover verticalmente, hasta que el vértice V_2 coincidiera con el V_1. De lo dicho, ahora se infiere que la operación hecha con el paralelo de contacto MN y las líneas de igual iluminación en la esfera la podremos repetir con estas últimas, y el paralelo $\mu\nu$ simétrico al primero.

Condúzcanse pues las divisiones 0′, 1′, 2′, 3′..., etc , sobre

R^h, haciendo la coincidencia del punto O_2 de Σ' con el punto O de Σ, y ya una vez trasladadas estas divisiones, trácense por ellas, lo propio que antes, cuerdas de la esfera Σ perpendiculares al rayo R^h hasta que corten al paralelo *mn*. Por estos puntos pasarán ahora las generatrices de igual iluminación del cono correspondiente á la hoja invertida. Finalmente sólo faltará dirigir por el centro O rectas que formen con las indicadas generatrices del cono director, el ángulo que hemos llamado $\beta = \overline{g}oh$, pero que ahora hemos de llevar hacia el lado opuesto del empleado en la primera operación; pues que en este caso se trata de la hoja opuesta del cono; la intersección de las rectas que así resulten con la hélice $\alpha'\beta'\gamma'$ proyectada también en *abcd*, darán el sistema de puntos que pretendíamos.

Mas si bien observamos de estas líneas de igual iluminación en el helizoide, hay algunas de ellas que son tangentes al contorno aparente del plano vertical, y claro es que conviene siempre poder disponer de los contactos, con motivo de precisar mejor estas líneas y tengan toda la verdad posible; se comprende ya que en dichos puntos, las líneas de que tratamos han de hacer el pasaje de la parte vista á la oculta en la proyección vertical. Pasemos pues á determinarlos. Su construcción en rigor se basa sobre el mismo procedimiento que hemos usado de la esfera auxiliar para cuando los puntos comunes de la superficie dada y de la esfera estuvieran en un mismo paralelo; mas si ahora tomamos en consideración el meridiano principal de la esfera inscrita, claro está que en el elemento común de los dos meridianos, esto es el de la superficie helizoidal y el de la esfera, tendrá la misma intensidad de iluminación, y, por lo tanto, resolviendo en este punto el problema para la esfera, quedará del mismo modo resuelto para la helizoidal.

Semejante operación, queda más facilitada teniendo en cuenta, que podemos valernos de una sola esfera auxiliar en virtud de la semejanza que tienen todas las superficies esféricas, pues todas ellas enfrente del rayo luminoso, dan lugar á que, determinado el plano tangente á una de ellas, éste sea paralelo á todos los otros planos tangentes á las restantes y que lo son á elementos de tangencia homólogos, esto es, que obedezcan á puntos de las mismas, que tengan todos, la misma orientación para con respecto al rayo luminoso escogido.

A este efecto, tracemos en un punto ω (fig. 220″) exterior

de la superficie una esfera Σ'' cualquiera, rebatamos luego el rayo R^v junto con la sección circular que produce el plano ωR^v perpendicular al plano vertical; el primero se colocará en R'^v, y la segunda se confundirá con el mismo contorno de dicha esfera; ahora en este rebatimiento las líneas de igual iluminación en la esfera serán según sabemos las que vienen proyectadas, según las rectas 1-1′, 2-2′, 3-3′, 4-4′..., etc.; éstas ahora al cortar á la charnela en los puntos 1′, 2′, 3′, 4′..., etcétera, indican que al colocar las cosas á su primitivo estado, ellos quedarán fijos, mientras que las trazas verticales de los planos de las líneas de igual iluminación se colocarán perpendicularmente á R^v y pasando por los referidos puntos 1′, 2′, 3′, 4′..., etc., y serán pues dichas trazas la serie de cuerdas 1′-01, 2′-02, 3′-03, 4′-04..., etc., las cuales cortando en 01, 02, 03, 04..., etc., al contorno aparente de la esfera, darán la serie de puntos pertenecientes ya, á las líneas de igual iluminación.

Téngase en cuenta que para esta operación, el plano vertical que se ha escogido es el mismo plano meridiano principal de la esfera Σ'', recordando á la vez que siendo los mentados planos perpendiculares al rayo luminoso R^v las trazas de aquéllos 1′-01, 2′-02, 3′-03..., etc., serán perpendiculares á la proyección vertical R^v del rayo de luz.

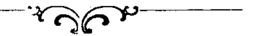
Trácense pues ahora tangentes á la circunferencia del contorno aparente de Σ'' por cada uno de los puntos mencionados, estas tangentes τ-τ', δ-δ'..., etc., representarán trazas verticales de planos tangentes á la esfera y perpendiculares al plano vertical; por lo que y en virtud de lo anteriormente expuesto, si trazamos ahora rectas paralelas á las τ-τ', δ-δ'..., etcétera, y que sean tangentes al meridiano de la superficie helizoidal; dichas rectas τ_1-τ'_1, δ_1-δ'_1..., etc., darán en los puntos de tangencia φ, ψ..., etc., los que pertenecen al contorno aparente y á las líneas de igual tinta.

Para completar esta cuestión, propongámonos ahora la determinación de los puntos de máxima intensidad, ellos serán producidos por los elementos de tangencia de planos tangentes á la superficie y perpendiculares al rayo luminoso; y los encontraremos mediante las siguientes consideraciones. Escojamos al efecto como á plano vertical de proyección, el meridiano vertical que se levante en *Oh*, conduciendo en seguida un plano V^p-H^p perpendicular al rayo de luz R^v-R^h; así este plano corta al eje del helizoide en el punto p' y la lí-

nea de máxima pendiente del mismo será la Ok-$p'k'$. Haciendo girar luego esta Ok-$p'k'$ en torno del eje nos engendrará un cono de revolución, el cual puede considerarse como á director de un helizoide desarrollable, tangente al del dato á lo largo de una cierta hélice.

Ahora se comprende que el cono, teniendo una línea de máxima iluminación, la desarrollable igualmente la tendrá y será paralela á aquélla, y, por lo tanto, el punto ó puntos de intersección de esta generatriz de la desarrollable, con la hélice de contacto serán los puntos que satisfarán á la cuestión.

Fijemos pues ante todo esta desarrollable, determinando su arista de retroceso (núm. 195, nota), para esto, tómese el paso de nuestro helizoide, colocándolo sobre el eje desde p' vértice del cono director hacia $p'p_1$, conduciendo por p_1 la horizontal que cortará en q_1 á la generatriz meridiana del cono $p'q'$; esta p_1q_1 sabemos será ya la rectificación que experimenta la circunferencia, proyección horizontal de la arista de retroceso; con su auxilio determínese el radio de este círculo y trácese en rs. Ahora la genetratriz de máxima intensidad de este helizoide desarrollable, es evidente que vendrá proyectada horizontalmente según una tangente al círculo rs, á la par que paralela á la Ok, y en proyección vertical paralela á la $p'k'$. No resta más, que impulsar á esta recta y al plano tangente que la contiene, por medio de un movimiento de traslación vertical hasta que dicha recta sea tangente al helizoide y el punto de contacto, será el de máxima iluminación. Este punto lo obtendremos fácilmente, imaginando la sección del helizoide con el plano vertical que se levanta sobre la rt, esta sección es la sinuosoide $t'u't_1u_1$; conduciendo ahora tangentes á dicha curva y que sean paralelas á la $p'k'$, se obtendrán finalmente en los puntos de contacto t', u', t'_1 u'_1..., etc., los que buscábamos de máxima iluminación. En cuanto á sus proyecciones horizontales, se comprende que se encontrarán en la rt, pues la mentada proyección no varía, á pesar del movimiento de traslación que hemos dado al plano tangente.



CAPÍTULO XI

Causas que influyen á modificar el claro-obscuro, contribuyendo al mejor efecto en el dibujo y representación de los cuerpos

269. Las circunstancias principales, causantes de que sufran alguna modificación la parte iluminada y obscura de un cuerpo, así como también la uniformidad en la degradación de tintas que resulte algún tanto alterada; son las principales (y de las que se tiene algún conocimiento más ó menos aproximado por lo que la práctica y repetidas experiencias han podido corrobar), los reflejos ya atmosféricos, ya terrestres; las distancias, los efectos fisiológicos, los principios del contraste, las licencias..., etc., etc.

270. Los reflejos.—Si fuera dable, colocar un cuerpo en el vacío absoluto fuera de toda atmósfera, y de todo objeto circunstante y de modo que recibiera como única luz la solar; entonces no existiría ningún reflejo, sucediendo que todos los elementos de un cuerpo que se encontrasen en la región de la sombra del mismo serían *absolutamente negros*, y esto con perfecta uniformidad. Mas en la práctica de los hechos no así, sucede, pues las sombras tanto propias como arrojadas, el tinte con que aparecen, no es de un negro absoluto, á más de notarse en ellas algunas variantes de intensidad, por la cual la obscuridad no solamente no es uniforme, sino que también se deja notar en ella su parte relativamente menos amortiguada, por la cual se distingue hasta una cierta

claridad análoga ó que sigue la misma ley que la región anterior del cuerpo, cuando está expuesto á la influencia de los rayos luminosos; y eso naturalmente lleva en sí, el suponer que hacia la región posterior, habrán de actuar corrientes de cierta luz particular que modifiquen las sombras de las zonas opuestas á la luz directa. Y en efecto, esa luz indirecta, es la originada por los reflejos, los cuales pueden provenir de orígenes y causas variadas en extremo y de difícil empresa el quererlas exponer en detalle, y mucho más el puntualizarlas dentro el terreno de la simple teoría. Unicamente el artista con su mucha práctica y experiencia, después de haber estudiado estos fenómenos en la naturaleza, en las múltiples variantes con que aparecen según los efectos de luz, de colorido, de naturaleza física de los cuerpos, distancias..., etc., etcétera, son los únicos que llegan á poseer un tino y criterio especial é intuitivo para alcanzar un favorable resultado concordante con la verdad de los fenómenos luminosos.

Nos concretaremos pues aquí, á bosquejar simplemente las consecuencias que se desprenden de los reflejos atmosféricos, y algún tanto también de los terrestres, esto es aquellos que provienen del suelo en donde se levantan ó están próximos á él, los cuerpos que se consideren.

Reflejos atmosféricos.—Se admite en general, por varios autores, para tener una explicación satisfactoria de esa clase de reflejos, en suponer, que cada molécula del aire ó de polvo contenido en el aire, obra cual si fuera una diminuta esfera brillante que irradía la luz en todas direcciones, y así un objeto inmergido que esté en la sombra, recibirá luz refleja de esta infinita cantidad de globulillos, que después de haber recibido la luz solar, la reflejarán á su vez suministrando así corrientes de luz indirecta*.

Fijemos las ideas sobre este particular. Demos por supuesto (fig. 222, lám. 40) ser la pequeñísima esfera de centro O, expuesta á los rayos luminosos de dirección R; en ella el rayo puede hacer la incidencia de muy distinto modo. Así, si el rayo hiere á la esfera en el punto D, quedará luego des-

* El aire que envuelve á nuestra tierra lleva en suspensión una serie interminable de corpúsculos opacos que reflejan la luz solar en todas direcciones. De ello, nos convencemos, cuando al estar dentro de una habitación, en donde, por una de sus aberturas, entra un haz de rayos solares, en medio de los cuales populan en continuo movimiento estos corpúsculos, siendo claramente visibles, y ellos reflejando la luz, iluminan los objetos circunstantes, á los cuales no ilumina el sol directamente.

viado en la dirección Dd', y de tal modo, que el ángulo CDN = NDd' de este modo, al ser reflejado el rayo en Dd', ha perdido algún tanto de su intensidad, y mas irá perdiendo, á medida que el punto de incidencia se aproxime hasta confundirse con el punto E, en donde dicho rayo EF es tangente al corpúsculo esferoidal, en atención á que el encuentro se hace cada vez formando un ángulo más reducido del rayo con el plano tangente en el punto donde se considera trazado. Por el contrario, á medida que el punto de encuentro se aproxima á B, en donde la dirección del rayo R es normal á la superficie, el desvío del reflejo será menor, hasta que en el mismo punto B, el ángulo de la normal con el rayo directo será nulo, como nulo será también el ángulo del reflejo; luego aquí en este punto especial, el rayo luminoso se reflejará según su misma dirección, pero llevada en sentido opuesto, no habiendo perdido nada la intensidad de luz al reflejarse. Se infiere de aquí, que cada uno de estos corpúsculos difunde la luz reflejada en todas las direcciones, mas de todas ellas la que tiene más intensidad, es la que se refiere, precisamente á la dirección opuesta al rayo luminoso directo.

Tratemos una vez más de semejante hecho para explicarnos la ley general que rige en la repartición de dichos reflejos.

Sea en la fig. 223. El punto O, en donde se supone estar colocado el observador rodeado ó envuelto, como si dijéramos, por la bóveda celeste, en esta situación, y siendo S el astro solar; en cualquier punto que el espectador dirija la vista, lo verá iluminado, ¿mas esa iluminación será uniforme? no, por cierto, variará gradual y lentamente, enviando reflejos por doquier, mas éstos de distinta intensidad. En efecto, si entramos á considerar una serie de puntos en la bóveda celeste, tales como *a*, *a'*, *a"*..., etc , situados sobre un mismo paralelo, será lógico concluir que de todos dichos puntos irradía luz reflejada, cuyos rayos al llegar al punto O forman las generatrices de un cono recto, y por lo tanto igualmente inclinadas con la base, infiriéndose de aquí que la intensidad de tales rayos ha de ser igual.

Para otros puntos, situados en otro paralelo más próximo al máximo EE', cuyo plano fuera perpendicular al diámetro que pasa por el foco luminoso S, tendríamos formado otro cono, cuyo ángulo al vértice se encontraría más abierto; la incidencia por el contrario más cerrada, y por lo tanto la in-

tensidad cada vez menor, hasta alcanzar un mínimum al tener en cuenta los puntos situados en el máximo paralelo EE', mas ya pasado este y fijando la atención en puntos situados también en paralelos, pero hacia la parte opuesta de EE', la luz reflejada va aumentando gradualmente, aunque la intensidad de estos reflejos, no es, ni puede ser de mucho igual á los que partían de los paralelos superiores. Finalmente el ángulo incidente aumenta por grados, hasta que al llegar á la dirección OS', precisamente opuesta á la OS, de la dirección de los rayos solares, entonces se habrá llegado al máximum de intensidad reflejada, lo propio que había sucedido hacia la parte superior de EE', en donde el observador recibía el máximum de intensidad directa para cuando se consideraba el mismo punto luminoso S.

De ello inferimos, ser la bóveda celeste manantial inagotable de reflejos, y esto en todas direcciones, pero cuyas intensidades son varias y graduales pasando de la máxima que corresponde á los rayos solares directos, á la mínima para el círculo celeste y máximo que hemos considerado en EE' para luego aumentar otra vez dicha intensidad hacia la parte opuesta, aunque sin la viveza ni el brillo de la región directa en donde sitúa el origen de la luz.

271. Rayo atmosférico principal.—Dando por supuesto que prescindimos de los reflejos atmosféricos que diseminan la luz en todas direcciones, y concretándonos tan sólo á dos focos luminosos, el uno el astro solar S, dirigiendo sus rayos luminosos en la dirección SO, y el otro un sol imaginario S' de donde emana una luz algo amortiguada, considerándolo en su escasa potencia lumínica (comparación hecha con la del sol real y verdadero), dirigiendo sus rayos en la dirección S'O, precisamente opuesta á la primera, estaremos en el caso de solucionar fácilmente la cuestión del claro-obscuro, tratando á la región sombreada del cuerpo para con respecto al foco S', del mismo modo cual hemos obrado para con respecto á la región anterior del propio cuerpo, al considerarlo en exposición directa al foco S. De este modo, salvamos lo complejo que resultaría al entrar en la combinación de aquel número de reflejos, difíciles por otra parte de precisar, no siendo por otra parte mucho lo que nos apartamos de la verdad de los hechos, toda vez que practicamente se ha comprobado, que la intensidad que por sí sólo produciría este sol ficticio, equivale á todos los reflejos reunidos atmosféricos juntos, produciendo poco más ó menos el mismo efecto.

Esta manera de proceder es sumamente cómoda para el artista, aunque precisa no perder de vista, que este sol ficticio de los reflejos, es puramente convencional, y no reune las propiedades del verdadero en cuanto á lo que se refiere á darnos líneas divisorias de luz y sombra, su misión se concreta tan sólo para auxiliarnos á comprender las variaciones que experimenta la intensidad de la iluminación, al modificar las distintas partes del cuerpo bañadas en la sombra, contribuyendo con ello, á comunicar el relieve y acentuar más la forma del cuerpo ó cuerpos que se consideran.

Los rayos luminosos que se supone emanar de este sol ficticio llevan pues una dirección completamente opuesta á la del sol verdadero, y es aquella dirección la que conoceremos por *rayo atmosférico principal*, con su auxilio se podrán determinar la degradación de tintas y hasta el punto que equivalga al brillante; dentro la zona bañada por la sombra propia.

Sin embargo, hemos aún de modificar algún tanto semejantes resultados, para poder encontrarnos en las mismas circunstancias que tienen lugar en el terreno de los hechos verdaderamente prácticos, y en efecto en general, los cuerpos no están al aire como aislados por completo y rodeados por doquier por la capa atmosférica, ellos están sustentados en el suelo, que les sirve de base ó cuando menos pendientes, pero próximos al plan terreno.

Así, el cuerpo Σ (fig. 224) próximo al plano XY, es evidente que no estará afecto á los reflejos inferiores que intercepta la aparición del plano XY; en semejante estado, parece que el máximum de los reflejos habría de ser la dirección OA, por ser paralela al plano XY y por lo tanto encontrarse en la dirección más aproximada á la que sería máximum OS', sin la interposición del plano antedicho; sin embargo, teniendo en cuenta que la región atmosférica superior de AH, está incomparablemente más iluminada que la inferior que media entre los planos OA y XY, la cual, por lo tanto está privada de aquella luz que antes habíamos tenido en cuenta, y considerando también que la infinidad de corpúsculos esféricos, se reflejan recíprocamente la luz, y dentro la desigualdad de las masas de aire que rodean á la dirección de la misma, y que ésta, al ser recibida por el plano XY, queda á su vez refleja-

jada; infiérese ahora como la dirección de esta luz reflejada ha de venir por encima de la dirección OA, y así es como sucede practicamente, habiendo observado ser de 20° el ángulo R″OA, cuando está próximo el astro Solar; para alcanzar la altura de 25° sobre el horizonte, encontrándose en un mismo plano rayo directo y atmosférico. Cuando el ángulo ROH aumenta, el reflejo máximum que se encontraría siempre dirigido según OA, sin la acción recíproca de las distintas partes de la atmósfera, irá adquiriendo una intensidad menor, toda vez que se irá alejando de la dirección del máximo absoluto OR′; por lo tanto, la dirección OA se encontrará mucho más dominada por la luz de la región superior, elevándose en su virtud el rayo atmosférico principal, ó haciendo un ángulo cada vez mayor con OA. Variando, pues, durante el día las posiciones del astro Solar, con relación á la Tierra, la iluminación de un cuerpo, cualquiera que él sea, habrá de variar continuamente, y ello llevó consigo que se conviniera en escoger la posición más ventajosa, ya para el debido efecto en el dibujo, ya también para que dicha determinada dirección de los rayos luminosos, contribuyera á facilitar las construcciones inherentes á los problemas de sombra.

Por regla general, se ha convenido en considerar al cuerpo cuya sombra se desea encontrar, situado frente del espectador, el cual mira en dirección al Norte, y siendo el tiempo de la observación á las tres de la tarde*, en cuya hora, el astro Solar se encuentra aproximadamente elevado sobre el horizonte de unos 45°, y en el plano vertical donde se halla es perpendicular al plano meridiano del lugar, y así las dos proyecciones del rayo luminoso forman ángulos de 45° con la L de T, y la luz va descendiendo de izquierda á derecha. En esta hipótesis, se admite que el ángulo R″OA que proporciona el rayo atmosférico principal, es también de 45°, de modo que en semejante posición, rayo principal y rayo atmosférico vienen á ser perpendiculares.

Una vez, pues, determinada que sea la dirección del rayo atmosférico, con arreglo á él, puede procederse ya, á efectuar las modificaciones de las sombras propias, tratando á esa zona lo propio que se hizo con la región iluminada, al ser tratada por el rayo directo; únicamente que las degradaciones en este segundo caso, no estarán tan acentuadas; como

* Término medio durante el año.

allá ni tampoco lo estará el punto ó elemento que aquí sustituye, á aquel que llamamos de máxima iluminación, y si se quiere también punto brillante. Excusado es decir, pues, con lo que llevamos anotado se sobreentiende, que empleando el rayo atmosférico, las circunstancias de claro obscuro que tendrán lugar dentro de la zona de sombra, serán las mismas, pero en sentido inverso, que las vistas en la región iluminada, aunque de mucho no tan destacadas, obedeciendo como si dijéramos á un ligero esfumado, en el cual, la parte bien obscura corresponderá al sitio ocupado por la línea que hemos llamado divisoria de luz y sombra, degradándose luego, pasando por ligeras tintas, conforme vimos en la zona iluminada.

Concluyamos con ello, que la atmósfera, obra á la vez como cuerpo opaco al recibir los rayos luminosos que emanan del astro Solar, y luego como á cuerpo luminoso, al reflejar estos rayos en todas direcciones. Con su auxilio, nos permite hacer cargo de las partes de los cuerpos, situadas en la jurisdicción de la sombra, que sin ella quedarían invisibles, y finalmente, que su estudio y resultados han sido de tal manera apreciados por el mucho servicio que ha prestado á las artes del dibujo, que ha sido bastante, para que fuera estudiada en particular como á cuerpo de doctrina, bajo el nombre de perspectiva aérea.

272. Perspectiva aérea; esto es, que tiene por objeto el mostrar las modificaciones que experimenta la apariencia de un objeto, en razón de la masa de aire ó atmósfera, que separa al observador de las distintas partes de dicho objeto. La fig. 226 representando un tornillo de filete rectangular, nos dará idea de los cambios de claro obscuro, insiguiendo los principios establecidos últimamente, combinando en él las sombras propias y arrojadas, la modificación de estas últimas por la ley de degradación de tintas, y finalmente, la modificación de estas últimas por la ley de los reflejos.

273. Rayo terrestre.—Otra circunstancia contribuye también á una nueva modificación del claro obscuro, y es cuando el objeto que se representa alcanza alguna extensión descansando directamente sobre el suelo ó plan terreno, como acontece en los muros de fachada de un edificio; entonces, el suelo horizontal é iluminado por el astro Solar, puede consi-

derársele como una superficie mate. Al recibir los rayos luminosos, los difunde á su vez en todas direcciones, siendo dable tenerse como una de tantas afluentes de donde parten rayos diseminados, cuales combinados con los atmosféricos, actúan sobre el objeto que los recibe, apareciendo nuevos fenómenos, que contribuyen á prestar más verdad y efecto en el dibujo. Esta clase de rayos difundidos, mejor que reflejados son los conocidos por *terrestres*. De ellos se usa no más uno, esto es, en una sola dirección y él vale tanto como los demás reunidos; (fig. 225) la línea LT representa el plan terreno y AB un plano ó tablilla perpendicular al plano vertical de proyección; sea cual fuera la dirección del rayo solar, éste iluminará al suelo LT, corroborando la práctica de los hechos, que de todos los puntos *a*, *b*, *c*... etc., del plan terreno, parten en distintas direcciones rayos, los cuales van á herir á los cuerpos circunstantes.

Ahora bien, fijándonos en un elemento V de AB, este elemento recibe luz indirecta de *a*, *b*, *c*... etc , cuyos se encuentran separados del primer de las distancias δ, δ', δ''... etc., y entonces claro resultará, que la intensidad que reciba el elemento V de cada uno de estos rayos, dependerá de la inclinación de AB para con respecto á LT; luego, del ángulo de incidencia de los rayos indirectos con dicho plano (pues ya vimos que (núm. 237) la cantidad de luz era proporcional al seno del ángulo que formaba la superficie con el rayo incidente), y finalmente en razón inversa del cuadrado de la distancia del origen de luz al objeto. En su virtud, bien podemos sentar, aprovechando semejantes propiedades los extremos siguientes:

1.° Todo elemento V de una superficie, en contacto ó descansando en el plan terreno, se encontrará por dichos reflejos, tanto más iluminado cuanto más próximo se halle de la superficie del suelo.

2.° El rayo *b*V terrestre de reflejo máximo; esto es el rayo terrestre principal, se encuentra dispuesto normalmente al elemento V, y por lo tanto el ángulo que dicho rayo hará con el plan terreno, vendrá expresado por $\beta=90°-\alpha$, siendo α, la inclinación de dicho elemento con el suelo LT. Si la superficie de que se trata fuera un plano vertical, expresando una pared de fachada, (vista aquí de perfil CD); los rayos terrestres serán lo mismo que antes los de *df-cg*... etc., cuales contribuirán á aumentar la claridad del pie del edificio, el cual

estará relativamente más iluminado que hacia la parte superior, en virtud de los precedentes que acabamos de reseñar; y aún sobre el particular, podemos aún extendernos algo más para dejar bien fijadas las convenciones que adoptan los artistas, para dar más verdad al objeto, ilusionando con ello al espectador. Sea al efecto (fig. 227) un torreón cilíndrico T, sustentado sobre el plano horizontal P, é iluminado por el rayo luminoso R, con arreglo á esa dirección de luz, las líneas divisorias de luz y sombra son las dos generatrices AA', DD', y produciendo una sombra arrojada DD'E''A''A. Con arreglo á lo deducido anteriormente resultará, que en las inmediaciones de las generatrices AA', DD', es en donde corresponderá la sombra de más intensidad, mientras que en la CC' existirá el mayor claro, en atención, que á lo largo de esta generatriz, el plano tangente al cilindro, es el que hace el mayor ángulo con el rayo luminoso. Ahora desde esta última generatriz hasta alcanzar las de contacto AA', DD', se desarrollará lentamente la degradación de tintas velándose la parte iluminada cada vez más, hasta llegar á las líneas divisorias de luz y sombra propias.

En cuanto á la región de sombra, sucederá otro tanto, aunque no existirán tonos de tintas y variaciones con tanta fuerza; así la generatriz EE', es aquella que le corresponderá menos intensidad en la sombra, esto es, será la generatriz más clara dentro de la sombra, todo en fuerza de que el plano tangente á lo largo de dicha generatriz, es el que más se aproxima á ser perpendicular al rayo atmosférico R', mas ahora en todo el trecho comprendido entre la generatriz EE', y la DD', por una parte y la de AA' por otra, va adquiriendo mayor intensidad la entonación de sombra, dándonos degradación de tintas, mas no de tanta violencia como la de la parte anterior, aquí será más suave, un verdadero esfumado.

Teniendo ahora en cuenta los reflejos, aquella parte iluminada así como la obscura, se modificará algún tanto, así la luz que hiere toda la parte anterior del plan terreno en *a*, *b*, *c*... etc., se difundirá yendo sus rayos, que hemos llamado terrestre, á encontrar á los varios puntos de la parte inferior del cilindro y en las inmediaciones de la generatriz que parte del punto D, de este modo, en semejante sitio, el cilindro aparecerá con alguna más claridad que la correspondiente de la parte superior D'. Mas si consideramos

ahora la región posterior ó en sombra del cilindro, veremos que al contrario sucederá, con respecto á los reflejos; esto es que aquí la parte que resultará más clara, ó por mejor decir, menos sombreada, será la superior E', toda vez que hacia lo alto del cilindro esté, está más expuesto á recibir los reflejos de la masa de aire que lo envuelve, actuando con ello con más ventaja, el rayo atmosférico principal.

Con referencia á la sombra arrojada, la verdad de los hechos nos llevará á observar, que ella será más obscura é intensa, al partir de la base del cilindro, más que luego irá siendo cada vez menos obscura, al pasar por los puntos *m*, *n*, *p*..., etc., cada vez más lejanos de la línea de base, y es que en este caso, cada uno de dichos puntos, va estando sometido á la influencia de una masa de aire cada vez mayor; lo cual se comprende perfectamente, pues para cada punto *m*, *n*, *p*, ... etc., la forma de masa de aire ó atmósfera que intercepta el cilindro, viene encerrada en un cono imaginario, cuyo vértice puede ser cada uno de estos puntos, y cuya base es el contorno aparente del cilindro, para con respecto á los mencionados puntos. Ahora bien, el volumen de dichos conos, salta á la vista, que van siendo mayores cuanto mayores sean las distancias á la base AED, de los puntos escogidos en *m*, *n*, *p*..., etc.

274. Principios de distancias y orientación.—Según lo anteriormente expuesto, puédense establecer los siguientes principios á propósito para aplicarlos en la práctica.

1.° En un cuerpo, y en su zona iluminada, el grado de iluminación depende de la naturaleza de la superficie, ya sea mate, pulimentada ó á medio pulimentar. (El foco de luz es siempre el astro solar, por eso no decimos, según la potencia del foco de luz).

2.° En la zona en sombra propia, ésta será tanto más obscura cuanto menos cantidad de rayos reflejos obren sobre ella é inversamente.

3.° De dos elementos situados en la zona de la sombra propia, aquel que se aproxime más á ser normal al rayo atmosférico principal, será el más reflejado, y por lo tanto disfrutará de más claridad.

4.° Las inmediaciones de la línea divisoria de luz y sombra es la parte más obscura de la superficie, toda vez que en el resto de la sombra, obra con más fuerza la luz reflejada,

clareando algún tanto dicha región, al paso que á la orilla de dicha línea, comprendida empero en la zona iluminada están los puntos en donde alcanza la parte menos iluminada del cielo.

5.° La sombra arrojada de un cuerpo Σ sobre otro △ disminuye en intensidad, á medida que la distancia que los separa aumenta. Por ejemplo (fig. 228) cuando los cuerpos Σ y △, están muy próximos, uno de ellos el Σ por ejemplo, intercepta mayor cantidad de rayos atmosféricos, que cuando está más distante, como la posición de Σ' con △', hay pues menos luz reflejada, por ocultarle al segundo más extensión de cielo.

6.° A medida que los cuerpos se alejan del observador, sus zonas iluminadas aparecen cada vez con menos claridad, así como las zonas de sombra, perdiendo su intensidad, las primeras al parecer se obscurecen, mientras que las segundas se aclaran, llegando un momento, cuando la distancia ha llegado á un cierto límite *la lontananza*, las dos zonas quedan como borrosas y confundidas en una sola, adquiriendo un tinte especial cual es el de la atmósfera. Véase el edificio (fig. 229) colocado en segundo término.

Y en efecto los objetos pueden encontrarse á distancias distintas del observador; cuanto mayor ellas sean, mayor también será la masa de aire ó atmósfera que se interpondrá absorbiendo parte de la luz, obrando como si fuera túpido velo ó cristal empañado, redoblando los efectos, á medida que aumenta su masa con la distancia, y así los colores pierden su vigor, lo iluminado su claridad y las sombras su intensidad, viniendo finalmente á confundirse dentro de una bosquejada y vaporosa silueta en un mismo tono de color azul, cual es el propio de la atmósfera *.

* Constituye la atmósfera la masa de aire que rodea la tierra envolviéndola como una cubierta y cuyo espesor ó altura, según los cálculos más aproximados es de 15 leguas. Su forma es análoga á la de la tierra, esto es aplanada en los polos y ensanchada por el Ecuador, en virtud de la fuerza centrífuga desarrollada en esta zona por el movimiento giratorio de la tierra, así como del calor del sol, cuyos rayos caen más directamente en aquellas regiones. Posee como todos los fluídos la facultad de desviar los rayos luminosos, haciéndonos ver los astros antes de su aparición verdadera sobre el horizonte, y produciendo los fenómenos conocidos con el nombre de crepúsculo.

Tiene constantemente en suspensión una cantidad de vapor acuoso que llega á condensarse en las partes altas, formando las nubes y las lluvias. Su densidad se disminuye á medida que se eleva sobre la superficie del globo, en términos, que en las

7.° Cuando sobre una superficie curva de un cuerpo se proyecta una sombra arrojada producida por otro cuerpo, entonces esta región sombreada, no recibe ni los rayos directos, ni los atmosféricos de más intensidad cuales son los que se hallan más próximos á los primeros.

Así demos por supuesto que (fig. 230) sea P, un plano bastante extenso situado sobre una esfera E, sobre la cual arroja sombra.

La línea divisoria de luz y sombra propia de la esfera está en *a*, *b*, *m' c*. Si nos fijamos ahora en el punto *m*, el más separado de aquella línea divisoria, veremos fácilmente como la única luz que hacia él llegará, será la que proviene de todos los rayos atmosféricos comprendidos en la zona angular *pmq*, formada por el plano *mq*, tangente en *m* y el plano *mp* conducido por *m*, y la arista superior del tablero, proyectada en el punto π. Estos rayos como vemos han de ser en muy pequeño número, por ser muy agudo el ángulo del haz *pmq*, de otra, provienen del punto del cielo menos iluminado, y llegan al cuerpo E, muy oblicuamente; deduciendo de aquí no estar el punto *m* muy iluminado por los mencionados reflejos, la claridad del reflejo será según ello, sumamente débil.

Mas veamos ahora lo que pasa en el punto *m'* de la línea de separación de la sombra propia. En él los rayos reflejos son en gran cantidad, estando comprendidos en el haz limitado por el ángulo obtuso *p'm'q'* formado por el plano tangente *m'q'*, y el rasante por la arista π pasando por *m'*; más aún, algunos de estos rayos encuentran normalmente al cuerpo E, luego deducimos de aquí que el punto *m'* estará más iluminado que *m*.

---

capas superiores, su grado de rarefacción es mayor que el que se puede conseguir por medio de las máquinas neumáticas.

Como todos los cuerpos de la Naturaleza, la atmósfera tiene su color particular este color generalmente azulado, se manifiesta ante todo en este inmenso espacio que conocemos con el nombre de *cielo*; y en las lontananzas, se la distingue mejor en los cuerpos obscuros ó sombreados que en los blancos ó iluminados. La atmósfera es el principio de la Perspectiva Aérea. Leonardo de Vinci, el gran pintor y el primero que estableció las bases de esta Perspectiva decía que: «El azul celeste está compuesto de luz y de tinieblas, esto es, de un blanco purísimo, y de un negro absoluto. Este hermoso color, que ofrece un cielo despejado y sereno, no es más que una profunda obscuridad, esparcida en el espacio inmenso que nos circunda, y que solemos apreciar más allá de la atmósfera iluminada, como á través de túpido blanco velo de mayor ó menor transparencia.

Con mayor razón el punto *n* de la sombra propia directamente opuesto al *m*, estará dotado aun de más reflejos que el último considerado en *m'*. Estos hechos son bastantes para establecer los principios siguientes:

a) Un elemento *n* situado en la sombra propia, será tanto más iluminado por los rayos atmosféricos, cuanto más se aproxime al punto de intersección del cuerpo E con el rayo atmosférico principal.

b) Un elemento *m* ó *m'* situado en la sombra arrojada sobre una superficie E, aparecerá tanto más obscuro cuanto más iluminado estaría sin la presencia del cuerpo P.

c) Las líneas de igual tinta en una sombra arrojada sobre el cuerpo E, serán las mismas que resultarían de no existir el cuerpo P, únicamente si, sucederá inversamente, esto es, que las zonas que separan unas líneas de otras, serán tanto más obscuras cuanto más claras resultasen, sin la existencia del cuerpo P.

d) En la sombra propia las líneas de igual tinta se trazarán imaginando un Sol ficticio, como único foco de donde provienen los rayos reflejados, encontrándose en el sentido opuesto del Sol real.

275. Efectos fisiológicos.—Su influencia es mucha bajo el punto de vista del efecto é ilusión con que aparecen los objetos á nuestra vista, comunicándole un relieve, y verdad tal como si los tuviéramos corpóreos en el espacio. Estos efectos fisiológicos se producen en los nervios de la retina. Su base teórica principal descansa en los efectos y leyes del contraste é irradiación; y como ello da lugar á mucho campo de observación sintiéndolo el genio del artista de muy distintas maneras, de aquí que los resultados vengan interpretados de múltiples variantes, según el temperamento é inspiración de dicho artista, más ó menos conocedor de los fenómenos que Natura proporciona.

De ahí provienen las *licencias*, esto es, la libertad que se toma el artista, apartándose algún tanto de la verdad de los hechos, y acentuando ó disminuyendo los fenómenos naturales de luz, sombra y color, en obsequio al mejor efecto é ilusión que pueda proporcionar á la composición objeto de su tema.

276. Efectos del contraste.—1.° Si dos superficies, colocadas la una al lado de otra, una de color obscuro y la otra

blanca, su diferencia de tono se exagera por el sólo hecho de su fácil y pronta comparación, esto es el blanco, por ser blanco, hace más negro al obscuro y viceversa.

2.° Una superficie ligeramente gris aparecerá como negra si se la destaca en medio de un fondo blanco; y al contrario aparecerá próximo al color blanco si se la destaca sobre un fondo negro.

3.° Un círculo muy blanco, colocado sobre un fondo que no lo sea tanto, aparecerá degradado por una especie de aureola gris. Al contrario, un círculo de color negro, colocado sobre un fondo casi blanco aparecerá rodeado de una aureola más blanca que dicho fondo, degradándose hacia lo blanco del fondo á medida que se aleja del círculo.

4.° Una superficie de un determinado color, verde por ejemplo, si se le coloca sobre un fondo de color verde también pero diferente del primero, aparecerá menos verde que si se le destacara sobre un fondo de color complementario, rojo por ejemplo.

En virtud de estos hechos reproducidos por un sinnúmero de experiencias, puede ya enunciarse la ley del contraste, cual es:

Dos colores que tengan tonos análogos se atenúan recíprocamente, mientras que dos tonos de colores opuestos se exaltan ó violentan entre sí.

5.° Una figura cualquiera de un cierto color colocada sobre un fondo blanco aparece rodeada de una aureola degradada con tono del color complementario.

Efectos de irradiación.—Dos superficies perfectamente iguales colocadas de lado, una blanca y la otra negra, en la apariencia no aparecen iguales, pues la blanca hace la ilusión de ser mayor. Así por ejemplo, un hilo fino, obscuro, visible sobre un fondo gris desaparecerá si el fondo se aclara. Las pequeñas bandas de plomo que sirven de armadura ó sostén de los vidrios de color en los grandes ventanales de las iglesias, aparecen mucho más delgados y reducidos que lo que aparentemente son.

6.° Si dos planos (fig. 231) A y B se cortan según una arista viva CD, encontrándose A en luz y B en sombra, esta última B aparecerá mucho más negra en las inmediaciones de CD, mientras que la otra aparecerá mucho más blanca en las mismas inmediaciones. Exagerando esta propiedad constituye una licencia.

7.° En las dibujos de arquitectura, cuando se dibuja una fachada de un edificio en donde hay ventanas (fig. 232), balcones (ó aberturas no cerradas) se observa que el fondo de las mismas viene ocupado por un color obscuro, y es que la fachada está completamente iluminada, mientras que en el interior de la habitación los techos y la mayor parte de las paredes están en sombra; sin embargo, la luz ó los rayos solares que entran en la habitación encuentran en primer término y esto casi siempre al suelo de la misma, desde donde se reflejan sobre las paredes de la estancia, clareando algún tanto la sombra que las bañaba, he aquí, pues, al dar color á los dibujos de fachada, se suele obscurecer mucho más la parte superior de los huecos en las aberturas degradando en claro hacia la parte inferior. Esta práctica más ó menos exagerada constituye una licencia artística.

8.° **Cubiertas de los edificios.**—Los tejados, los chapiteles coronando á las torres, encontrándose en lo más alto de estas construcciones, aparecen regularmente á la vista del observador como obscuros (fig. 229); es también un efecto del constraste, á causa de que se destacan sobre el fondo azul y brillante del cielo. Es también una de tantas licencias de que hechan mano los artistas para sacar resultado del contraste, dando con ello más ilusión de lo corpóreo de las masas que afectan las techumbres, y así al aplicar el color lo sobrecargan de negro.

9.° Apareciendo el cielo de color azul, los objetos que de él se destaquen suelen hacerlo con un color anaranjado, aunque de él no vayan afectados, y eso es á causa que este segundo color es complementario del azul. Este fenómeno tiene sobre todo lugar y aparece más sensible cuando se trata de la representación de edificios construídos con piedras de color amarillento. Eso es precisamente una de las causas que motiva, cuando se tenga que efectuar el lavado de una fachada que produzca el efecto como si fuese construída con piedra rojiza ó amarilla, de dar la capa más intensa hacia la parte superior.

Pero eso ya es regla general que así debe hacerse, aunque dominen los tonos de luz y sombra, y combinados también con tonos de color, siempre en la parte superior de los edificios precisa cargar los tonos por efecto del contraste que produce allí lá silueta del edificio, destacándose de aquel fondo claro, azul y limpio del cielo.

10. **Sombras estrechas y reducidas comparadas con sombras anchas y extensas.**—En los dibujos de Arquitectura las sombras estrechas y largas como la que está dibujada en A (fig. 233) y se destaca sobre un fondo muy iluminado como lo es el ábaco de un capitel, el arquitrabe ó friso de una cornisa... etc., aparecerá á igualdad de distancia mucho más obscura que otras más extensas y anchas como son las B y C. Por lo mismo, la B adjunta á una extensión muy iluminada, aparecerá mucho más obscura que la de mayor cabida C, sin embargo de encontrarse ambas en un mismo plano. He aquí porque el efecto práctico que ha de lograrse se obtendrá pasando gradualmente de la tinta B á la C por tonos graduales.

11. **Cuerpos avanzados en los edificios.** — En ellos se permiten también los artistas licencias, al representar las sombras y colores á los distintos cuerpos y detalles del dibujo; así es que cuando en un dibujo hay que representar dos cuerpos salientes, y se quiere que aparezcan dibujados de modo que ofrezcan la ilusión de tales, se adopta como norma el de sombrear y dar colores más fuertes é intensos al que está más próximo al observador, ó sea al cuerpo más avanzado, y por el contrario emplean tintas cada vez más amortiguadas y claras á medida que el cuerpo va alejándose del paramento que se considere de primera línea, contándose así por 1.°, 2.°, 3.°... etc., plano de fondo, según que existan cuerpos que vayan en resalto atrasándose ó que tengan menor vuelo que el primero que se toma como á término de comparación. (Ya hemos dicho en otro lugar que tan lejos podríamos considerar los cuerpos, que éstos tomen por fin el tono y color de la atmósfera).

Así, tomando por ejemplo el cornisamento del Templete del Pandrosium en Atenas (fig. 234), tendremos según lo dicho que la sombra del junquillo A aparecerá más fuerte que la del talón B; la de este último más intensa que toda la zona correspondiente de los dentículos C, y finalmente las distintas partes D del arquitrabe habrán de resultar las más débiles de entonación.

Se comprende que este modo de hacer no concuerda con la realidad de los hechos, considerados en las mismas circunstancias que en la práctica tienen lugar, pues si bien es cierto que si el intérvalo ó separación de los objetos es muy grande, actuará entre ellos una gran masa de aire, produciendo

diferencias bastante notables para sensacionar al espectador, quien distinguirá los objetos, sombras, tonos, etc... mucho más velados á medida que aquéllos aumenten sus distancias de la primera que se tome como de comparación. Pero semejante propiedad realmente no es aplicable como cierta en las aplicaciones del dibujo arquitectónico en donde se representan fachadas de edificios, cortes de los mismos, cornisamentos, etc., y en semejantes asuntos sabido es que si de cuerpos salientes se trata, el vuelo de los mismos no es por cierto de tanta monta para que la masa de aire que se interpone entre ellos sea suficiente para producir aquellas variaciones Sin embargo, el artista se toma semejante licencia de acentuar las sombras y tonalidades á medida que los cuerpos van avanzando, y no hay duda que con ello obrando en un justo límite y fuera de exageraciones que degeneren en abuso, logra cautivar la atención del espectador, disponiéndole con el efecto que se propone.

El mismo Gaspar Monge al hablar sobre el particular, y no siendo por cierto partidario de tal manera de obrar extraña á la verdad de los hechos, llama la atención sobre el modo de destacar los cuerpos unos de otros sin necesidad de acudir á efectos convencionales y circunscribiéndose solamente á la verdad de los fenómenos.

A este efecto arguye textualmente: *Demos por supuesto que tengamos á nuestra vista una fachada de un edificio formado de dos cuerpos en resalto, esto es, uno más saliente que otro, pero ambos afectados de un mismo color y uniforme.* Si en este estado interponemos un obstáculo (un papel ó cartón extenso) que nos oculte la arista por la cual se destaca uno de otro cuerpo, nos será imposible distinguir cuál de los dos cuerpos será delantero, y cuál será el retrasado, ambos ilusionarán cual si fueran una sola y única superficie continua; más quítese luego el obstáculo, y en seguida nos haremos cargo perfectamente del mayor ó menor avance que puedan tener. Semejante experiencia ya nos indica desde luego que es precisamente el modo de actuar la luz sobre la arista saliente del cuerpo avanzado, lo que nos advierte semejante avance. Si esta arista fuese una arista perfectamente recta, matemática, la acción de la luz sobre ella sería nula ó cuando menos inapreciable, y no podríamos tampoco distinguir este resalto. Pero en el terreno de lo práctico semejante línea nunca aparece así, siempre aparece for-

mada por materiales cuya compacidad es imperfecta, imperfectos son los instrumentos, imperfecta es también la mano de otra, resultando de aquí que la arista deja de éstar ultimada con la precisión rigurosa que sería de desear para que lo vivo de su filo, fuera perfecto; apareciendo en su lugar una superficie redondeada, cual un cilindro de radio muy diminuto, en él la degradación se hace violenta, acumulándose las generatrices degradadas en la divisoria de luz y sombra, y con ello aparece esta recta ó arista sumamente obscura, acusando el resalto del cuerpo avanzado; eso por lo referente á la arista de la parte opuesta del lado de donde viene la luz, y en cuanto á la otra arista que está hacia el mismo lado de donde el rayo luminoso proviene, en ella hiriendo la luz directamente, aparece si, una línea brillante que excede su viveza á lo iluminado de la fachada, y así acusa lo saliente del cuerpo hacia la parte que está en luz. De este modo, acentuando estas dos aristas, la una muy obscura hacia la parte de la sombra y la otra muy clara hacia la parte de la luz, subsanará la dificultad que aparece de representar fielmente los cuerpos entrantes y salientes.

Estos principios se han tenido en consideración en la figura 234, representando en las aristas *ab*, *cd*, *de*... etc., la brillantez que les corresponde por encontrarse hacia el lado del rayo luminoso, así como las *mn* de los modillones, muy ennegrecidos por estar hacia la parte opuesta.

En los sitios *x*, *z*, *y*, los efectos del reflejo y la luz del contraste.

277. El color.—Es el accidente que hace visible las superficies de los cuerpos. En las artes se conoce bajo este mismo nombre todas las materias que mezcladas con agua, gelatina ó aceite forman una pasta más ó menos líquida con la que se puede pintar toda clase de objetos. Las cualidades que debe de tener un color para cumplir las condiciones de bueno, son 1.° Una tinta bella, 2.° Gran fijeza, 3.° Cubrir bien los objetos sobre que se aplica, 4.° Mezclarse perfectamente con los líquidos que sirvan para desleirlos, 5.° Secarse rápidamente, 6.° Ser insoluble en el agua, 7.° No descomponerse por su mezcla con otros colores ó con los líquidos en que deban desleirse.

Distinguen los pintores tres colores primitivos: El rojo,

el amarillo y el azul. Son llamados los mismos, *colores ó tonos simples*, puesto que de su reunión nace el *blanco* *.

El *amarillo*, de color claro y brillante (puede ser la gutagamba que da el amarillo puro).

El rojo, brillante y medio claro (el carmín, franco y espontáneo, sin mezcla).

El azul, color de sombra (puede ser el azul de Prusia claro, cuando no esté bastardeado con ligero tinte verdoso).

En cuanto al *negro*, es la carencia de luz, y no se le considera como á color.

Cuando dichos tonos se hallan en su máximo de intensidad sin estar mezclados con negro ni blanco, entonces se les llama *puros*. Si están mezclados con negro, se dice que están *obscurecidos*, y si es el blanco el que con ellos está mezclado, entonces se dice que están *clareados*. Así según la fracción de negro ó blanco que contengan en la mezcla, serán según ello obscurecidos ó clareados á $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$... etcétera.

Tonos compuestos de 1.°, 2.° y 3.° orden. Rosa de colores de Chevreul.—Si se mezclan por partes iguales los tonos simples, se obtendrán los tonos compuestos de primer orden, cuales podrán ser tendiendo así al obscuro ó al claro.

El rojo y el amarillo dan el naranjado.

El amarillo y el azul dan el verde.

El azul y el rojo el violeta.

Si ahora se mezcla un tono de primer orden con el tono simple que le sea más próximo, tendremos los tonos compuestos de segundo orden, así:

El naranjado y el rojo da el naranjado-rojo.

El naranjado y el amarillo da el naranjado-amarillo... etc.

Los tonos de tercer orden se obtienen mezclando un tono del segundo orden con el color simple ó compuesto más próximo; así el naranjado rojo y el rojo dan el naranjado rojo-rojo, etc... y así los demás.

Para disponer á simple vista y de momento el tono que más convenga, se dispone de la que se llama *rosa de colores*; cuyo autor es Mr. Chevreul. Trácese al efecto (fig. 235) un

* En rigor, los tres colores simples, que por su mezcla dan el blanco, son: el rojo, el verde y el violeta, más nosotros seguimos el mismo sistema adoptado por varios autores que tratan sobre la materia.

círculo, y de él tómense en consideración los tres puntos *a*, *b*, *c*, que obedezcan á los vértices de un triángulo equilátero, y en cada uno de ellos se pondrá uno de los colores simples, el amarillo, rojo y el azul.

Ahora, en los puntos intermedios *d*, *e*, *f*, entre los precedentes se marcarán los tonos compuestos pertenecientes al primer orden, el verde, el violeta, el naranjado, y así sucesivamente.

Si de los tres tonos que hemos llamado simples, se descarta uno de ellos, el resultante de la mezcla de los otros dos es el color complementario del primero.

Así el rojo tiene por complementario el verde.

El amarillo tiene por complementario el violeta.

El azul tiene por complementario el naranjado.

En la rosa de los colores (fig. 235), cada color y su complementario corresponden á los extremos de un mismo diámetro.

Por otra parte, una operación muy fácil cabe para que dado un color pueda fácilmente encontrarse el complementario correspondiente. Trácese un círculo sobre una hoja de papel, imprimiendo en su interior una capa del color, cuyo complemento se desea. Se concentra luego la vista con gran atención hacia el punto centro de figura, y esto por espacio de un minuto, poco más ó menos; si luego se traslada la vista rápidamente sobre lo blanco de otro papel, la imaginación por sí sola hará aparecer el mismo círculo precedente, impregnado del color complementario.

Colores convencionales. — Cada material ó clase de obra en los dibujos de arquitectura tiene su color especial que lo representa. Así los

		Proporciones.	
Muros ó bóvedas en sección ó corte.	Carmín.		
Madera.	Ocre amarillo.	4	20
	Sepia.	4	
	Tierra de siena tostada.	10	
	Carmín.	2	
Hierro.	Azul de Prusia	18	20
	Tinta china.	2	
Fundición.	Azul de Prusia	15	20
	Tinta china.	4	
	Carmín.	1	
Latón, bronce.	Gutagamba.	18	20
	Carmín.	2	
Cobre rojo.	Tierra de siena tostada.	10	20
	Carmín.	10	
Terrenos.	Sepia y Siena tostada.		

278. Aguas.—Las aguas son á veces verdosas en el primer término, y es necesario juntarlas con vigor, principalmente en las sombras que se dan con una tinta baja de tinta china y azul de Prusia. Luego de bien seca la aguada se suavizan los claros con un poco de gutagamba mezclada de ocre ó de carmín en corta cantidad.

Si se quiere perfeccionar el lodo, se cubren con ligereza la partes sombras con tinta clara de chicoria, cual comunica mucha transparencia.

279. Rocas.—Ellas se han de pintar con vigor y franqueza; al primer golpe se han de hacer conocer sus hendiduras, grietas y cavidades. Con este objeto, se emplean con acierto tintas vivas compuestas de *Sepia* mezclada con el carmín, ó también frías y amortiguadas, que se logran con la tinta China ó la Sepia, mezcladas separadamente con el carmín.

Algunas veces se extienden por encima colores locales y transparentes; y otras se le da una mano ligera de gutagamba muy espesa, mezclada con el carmín, ó de azul de Prusia, ó de tierra de Siena tostada. Conclúyanse lo mejor posible los primeros términos, dándoles toda la fuerza conveniente, para que alejen los términos remotos.

280. Árboles.—Los troncos de los árboles se pintan con la sepia pura, ó mezclada con un poco de carmín ó azul de Prusia ó gutagamba, ó también con tinta china, según el grado de viveza que se les quiera dar. Los claros se tratan con mucha limpieza, y se refuerzan las sombras con toda la espontaneidad posible, de modo que sean vigorosas cuidando mucho de conservar los reflejos, para lograr el efecto deseado.

Para las hojas varía al infinito el modo de tratarlas, pues según la edad, especie, distribución de las ramas, color y forma de cada especie, y la hora y modo con que el Sol las ilumina, así variarán también los accidentes que de ellas aparecerán á nuestra vista, pero por regla general, será bueno atenernos á las siguientes reglas prácticas.

1.° Los perfiles recortados en sombra deben señalarse con vigor y al primer golpe, sin necesidad de retoque posterior.

2.° La fuerza aproximativa de las hojas y ramaje debe ser en lo posible semejante.

3.° A medida que las hojas se aproximan á la luz, se pre-

sentan de color más claro y teñidas de un amarillo más vivo, en tanto que las que se alejan toman un verde más obscuro en la sombra y más azulado por la parte de reflejo.

Para hojas muertas ó amarillentas del otoño, empléese gutagamba con mezcla con tierra de Siena tostada, ó bien con la Sepia, ó amarillo de Indias, dando estas tintas separadamente, á fin de comunicarlas mayor viveza; y se variarán también hasta tomar un verde obscuro, si se añade azul de Prusia.

El verdor de los árboles, se hace con la mezcla del Indigo, tierras rojas, ó de gutagamba, amarillo de Indias, ó de la piedra de hiel.

281. Cielo.—Antes se empleaba el azul de Prusia para los cielos y los lejos, y después de seco se lavaba con un pincel bien empapado en agua clara, con el objeto de suavizar la dureza y lo áspero de este color.

Este método proporcionaba bastante dulzura y armonía en el conjunto.—Se comenzaba por el azul, seguía el rojo y luego se manchaba con el amarillo.

Pero como el azul de Prusia, al cabo de tiempo tira á verde, se prefiere hoy, el ultramar, cuya consistencia y duración son bien conocidas.

Algunos artistas cuando se proponen pintar un cielo revuelto y tempestuoso, ó un clima árido ó caluroso, en vez de componer la tinta anaranjada, manchan el horizonte con una tinta igual de bermellón y laca, y una vez seca, le sobreponen otra de gutagamba.

Este método es mejor, porque así haciendo, no se ensucian los colores. Dase después mayor cuerpo á las nubes, si es necesario, con tintas unidas y aplicadas sucesivamente, las cuales se componen de tinta china laca, y ultramar. Se hacen después los reflejos, con el fin que redondeen las nubes, y sigan insensiblemente, unas á otras; pues no conviene se corten con dureza, con el cielo, ni con las otras nubes inmediatas; deben perderse entre sí insensiblemente.

En general, cuando se prepara el cielo y los lejos, convendría usar de tintas unidas é iguales, sin mezclar los colores, sucede con frecuencia que se enturbian entre sí. Por tanto, se extenderán separadamente, primero el azul, después el rojo, y en tercer lugar el amarillo. Siempre que se haya de extender una tinta sobre otra, se dejará secar antes la primera.

282. Los reflejos.—El reflejo cae hacia la parte opuesta á la iluminada y participa del color del objeto á que pertenece, y del de los objetos vecinos, que heridos por la luz rechazan parte de ella, modificada por un color particular.

Así la sombra podrá considerarse como la ausencia de la luz modificada por la mezcla de diversas tintas reflectas por los objetos en luz que le rodean.

Se infiere de aquí, que debe observarse como un principio el dar á las sombras el color de la tinta empleada para los objetos más vecinos.

Las sombras de los lejos han de participar de la tinta general del plano en donde estén situadas. Toman muy poco color, y á medida que se alejan, se degrada su fuerza, y últimamente, vienen á perderse. Debe suceder pues, lo mismo con los reflejos, porque á esta distancia la casi totalidad de los objetos, sólo se indican por medio de tintas simples y transparentes. La belleza del claro-obscuro no se logra sinó por medio de los reflejos; ella consiste en hacer redondear los objetos, al mismo tiempo indicar el color natural que tendrían si estuvieran iluminados.

283. Tintas principales de la (fig. 234) 1.° Capa correspondiente al color de la piedra. Esta es marmol pentelico, de un color amarillo de oro pronunciado. Se la podía imitar con ocre amarillo, con tierra de Siena tostada. Se suprimirá esta capa degradándola de arriba abajo, esto es, de modo que sea más intensa hacia la parte superior. Al dar esta capa se cuidará en dejar los filetes (n.° 276-11) en blanco sobre las aristas iluminadas.

2.° Tinta general de sombra. Ha de estar con relación al tono del color de la piedra. Aquí podía ser la tinta china, para el fondo de las sombras, aunque mezclada algún tanto con un poco de laca carminada y azul cobalto, así adquiere un tinte muy ligero y aéreo, simpático á la vista. Esta se pasará sin la prescripción de los filetes de reflejo, en todas las sombras, ya sean propias ó arrojadas. Se imprimirá también empezando hacia la parte superior, y degradándola hacia la inferior con el auxilio de agua bien limpia. No ha de ser muy intensa esta tinta, ha de tener el tono de las sombras en donde están más acentuados en ellas los reflejos, dichos sitios son la parte inferior de los Talones, sombras propias de los

baquetones... etc., ó sean en general las partes negativas de las molduras.

3.° Viene luego la operación de modelar las molduras, tratando á cada una de ellas según la superficie que las informen. Con ello se las va dotando del relieve correspondiente (después de haber determinado la sombra propia que á cada una concierne), las primeras capas serán seguidas de primera intención, y en cuanto á las últimas degradadas y suaves, buscando en el desvanecimiento de la sombra ó el color, el contorneo de las superficies, para que vayan sucesivamente destacándose su masa corpórea, su relieve, y formando concavidad si atrasa; á bien que las sombras arrojadas y reflejos contribuirán también á ilusionar para que así sea. Aquí es en donde hay que tener presente lo preceptuado en los núms. 271 y 274.

4.° **Tonos locales de los planos.** Esta operación, como el mismo nombre ya indica, tiene por objeto dar á cada superficie plana y en detalle, como son el tono α, β, γ, que realmente le corresponde, según las convenciones preceptuadas; y téngase para ello en cuenta que no sin razón hemos modelado antes las molduras pues ellas son las que ahora gobiernan porque situadas entre estos planos, y sus superficies mucho más movidas que dichos planos, según sea la tinta y tono en que se las haya dejado, así indicarán los que hayan de tener los planos que separan el objeto de que haya perfecta armonía del paso de uno á otro cuerpo. Recuérdese bien que al efectuar esta última operación será preciso dejar con los bordes ú orillas de hacia el lado de donde dimana la luz, los filetes brillantes de que ya hemos hecho mención.

5.° **Contra sombras.** Estas son las que se arrojan en la misma sombra, en virtud del rayo atmosférico, ó si se se quiere también el rayo terrestre; éstas se pueden observar hacia la izquierda de los dentículos, en donde aparecen con líneas á 45°, después de los ángulos inferiores, cuyas conviene hacerlas rápidamente con capas degradadas, colocando lo más intenso de ellas, en las inmediaciones de las contra-sombras.

6.° **Última mano.** Esta operación es el retoque; es muy conveniente una vez concluido el lavado, y para aumentar todo el efecto posible de manchar á la ligera, ya con el color, ya con la tinta de sombra para acentuar mejor los cuerpos avanzados y retrasados, ó dar movimiento á las superficies curvas. A este efecto se avanzan los cuerpos iluminados,

usando tonos más vigorosos ó calientes (según expresión de los artistas), más amarillos ó rojos (en nuestro caso). En cuanto á los sitios bañados por la sombra, se les hace adelantar, forzando la tinta de sombra y aún mezclándola con Sepia y tierra de Siena tostada.

Para atrasar los planos recurriendo á tintas ligeras mezcladas con azul ó neutra. Estas son las llamadas frías y los franceses *glacis*.

Los detalles colocados en cada cuerpo de edificio, serán tanto mejor perfilados y acabados, cuanto más el cuerpo avance, y al contrario, cada vez más confusos y vagos, cuanto más el cuerpo atrase, y esas prescripciones tanto si se trata del lavado, de las sombras y del dibujo.

ÍNDICE

FIN

ERRATAS

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
9	2 (de la nota)	suceda son	sucede con
14	8	Σ'	Σ
15	36	$n'c'm''d'$	$n'c'm'd'$
17	34	Σ	Ξ
25	12	tamaño	tamaña
30	39	el alzado	la planta
30	39	párrafo (12)	párrafo (13)
34	35	b	b'
35	6	rayo	radio
41	11	19-2.°	20-2.°
41	23	19	20
43	22	esta	este
52	26	proponermos	proponernos
53	13	representando	representado
55	13	prolongará	prolongada
61	4	otras	otras tantas
61	1	melmadas	inclinadas
62	19	en plano	su plano
65	30	conferencia	circunferencia
65	31	o_3, c_2, o_4	o_1, o_2, o_3,
66	7 (de la nota)	γροκοζ	τροχοζ
67	4 (de la nota)	parece	posee
77	2	primero	cubo
77	17	primero	prisma
77	23	obtenidas	obtenidos
89	39	ellos	ella
130	1 (de la nota)	una eclipse	una elipse
133	32	tornando	tomando

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
137	14	admiten	admite
144	40	párrafo 84	párrafo 85
164	29	paralela á GV	paralela á $\theta\chi$
165	25	esta se apoyará	este se apoyará
185	6	E, E′, E″, ... etc.	C, C′, C″ ... etc.
185	19	el	él
185	23	OC, OC′, OC″ ... etc.	O′C, O′C′, O″C″ ... etc.
192	29	$\omega\ \delta'$	$\omega''\ \delta'$
195	14	línea de la tierra	línea de tierra
197	31	ω	ω_1
197	37	ω	ω_1
197	38	$\omega\ m$	$\omega_1\ m$
197	39	$\omega\ m$	$\omega_1\ m$
197	40	$\omega\ n$ y $\omega\ n'$	$\omega_1\ n$ y $\omega_1\ n'$
198	4	ω	ω_1
198	5	$\omega\ k$	$\omega_1\ k$
198	7	ω H	ω_1 H
198	8	simetría	simétrica
199	8	$a'c'b$	$a'c'b'$
200	13	cilíndrico	cilindro
204	9	$d\ a$	$d\ a''$
205	27	las paralelas	los paralelos
207	2	enunciando	enunciado
209	29	I H′ B	I H′ B′
211	27	α P δ	α P_1 δ
212	31	n.° 24	n.° 124
221	6	L′, y	L′-i
221	37	dará en γ	dará en r
222	6	$g\ g$	$g\ g_1$
222	19	curva vi	curva ri
222	22	F.ª 226	F.ª 126
225	1	Y′ D, Y′ D	Y D, Y′ D
227	13	$c''\ d''$	$c'\ d''$
251	última	E r=O′ ε	E r=O ε'
252	5	á partir de ω	á partir de m
252	7	$n\ \rho = r = u\ m$	$n\ p' = r = n\ m$
252	6	hacia ρ	hacia p
252	8	ω y ρ	ω y p'
254	21	el centro F—ω'	el centro F′—ω'
295	25	1 y 6	2 y 6

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
296	14	$90 \cdot \omega$	$90^\circ - \omega$
296	40	parará	para
298	10	O	O′
300	36	$\theta t'$	$\varphi t'$
334	32	de ha ser	ha de ser
350	1	E—E′—E″	E—E′ E″
371	37	$h_g = h\Sigma$	$h_g = h'\Sigma$
371	última	$d\ b'$	$a''\ b'$
377	34	O′—O″	O′=O‴
382	24	$\chi'\ O_1^h = \chi\ O_1^v$	$x'\ O_1^h = x\ O_1^v$
382	30	afectadas	efectuadas
413	21	H p O—H′ p' j'''	$h\ p$ O—h'' p' j'''
414	33	F.ª 173	F.ª 173″
416	25	X X	$\chi\ \chi'$
418	4 (de la nota)	F.ª 172	F.ª 172^{VI}
418	24 (de la nota)	p	m
418	34 (de la nota)	O C	O C′
427	29	$\beta = \theta$	$\beta = o$
462	40 y 41	al plano tangente en C cuyo contiene las dos rectas CV, CE′	al plano de la curva de contacto ABC